



KNM XVIII 2016



PROSIDING

**Konferensi Nasional Matematika
Himpunan Matematika Indonesia
2016**

Pekanbaru, 2-5 November 2016

Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVIII

Diterbitkan oleh Indonesian Mathematical Society (IndoMS)

ISBN: 978-602-50020-1-4

@ Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

Editor: Dr. M. Imran

Desain cover: Khozin Mu'tamar, M.Si.

Ukuran: 29,7 cm x 21 cm

Agustus 2017

TIM PENILAI MAKALAH (*REVIEWER*)

1. Budi Nurani Ruchjana, Prof. Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Padjajaran
2. Isnarto, Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Negeri Semarang
3. Mashadi, Prof. Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Riau
4. Subanji, Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Negeri Malang
5. Syafrizal, Prof. Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Andalas
6. Nuning Nuraini, Dr.
Industrial and Financial Mathematics Research Group, FMIPA-Institut Teknologi Bandung
7. Kartini, Dr.
Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan PMIPA, FKIP-Universitas Riau
8. M. Imran, Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Riau
9. Ali Mahmudi, Dr.
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA-Universitas Negeri Yogyakarta
10. Sugiman, Dr,
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA-Universitas Negeri Yogyakarta
11. Maimunah, Dr.
Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan PMIPA, FKIP-Universitas Riau
12. Diah Chaerani, Dr.
Departemen Matematika, FMIPA-Universitas Padjadjaran
13. MDH Gamal, Dr
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Riau
14. Rado Yendra, Dr.
Jurusan Matematika, FST-Universitas Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
15. Sri Rezeki, Dr.
Program Studi Matematika, FKIP-Universitas Islam Riau
16. Agus Suryanto, Prof. Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Brawijaya
17. Syamsudhuha, Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Riau
18. Edi Cahyono, Prof. Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Halu Oleo
19. Arisman Adnan, Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Riau

20. Indah Emilia Wijayanti , Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Gajah Mada
21. Yenita Roza, Dr.
Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan PMIPA, FKIP-Universitas Riau
22. Ihda Hasbiyati, Dr.
Jurusan Matematika, FMIPA-Universitas Riau
23. Zubaidah Amir MZ, Dr.
Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Tarbiyah UIN SUSKA Riau
24. Atma Murni, Dr.
Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan PMIPA, FKIP-Universitas Riau

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah kita panjatkan ke hadirat Allah Yang Maha Kuasa, atas rahmat dan ridho Nya jualah, Buku Prosiding Konferensi Nasional Matematika (KNM) XVIII yang diselenggarakan atas kerjasama antara Universitas Riau, dan Himpunan Matematika Indonesia (IndoMS) ini dapat diterbitkan.

Kegiatan KNM adalah merupakan agenda rutin IndoMS yang diadakan setiap dua tahun sekali. Penyelenggaraan tahun ini merupakan penyelenggaraan ke-18 yang bertepatan dengan ulang tahun ke 40 IndoMS yang dilaksanakan dari tanggal 3-5 Nopember 2016 di Pekanbaru. Tema dari KNM XVIII ini adalah: "*40 Tahun IndoMS dalam Mendukung Masyarakat Ekonomi ASEAN*".

Pada Konferensi Nasional Matematika XVIII dibahas permasalahan organisasi yaitu pertanggungjawaban presiden IndoMS periode 2014-2016 dan pemilihan presiden IndoMS untuk periode 2016-2018. Disamping itu juga merupakan sarana berkumpulnya para matematikawan yang ada di Indonesia dalam menyampaikan pemikiran mereka dalam pengembangan matematika dan pendidikan matematika.

Prosiding ini berisikan 37 makalah yang telah dipresentasikan pada sesi paralel dan direkomendasi oleh Tim Penilai Makalah (*Reviewer*) untuk dimuat dalam prosiding dan satu makalah utama.

Tewujudnya Prosiding ini tidak terlepas dari kerja keras tim prosiding dan dukungan dari Tim Penilai Makalah serta penulis makalah. Untuk itu atas nama Tim Prosiding kami ucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya atas partisipasi dan bantuan semua pihak.

Terakhir, semoga Prosiding KNM XVIII ini memberi manfaat kepada pembaca dan penulis.

Tim Prosiding
Ketua

Dr. M. Imran

SUSUNAN PANITIA PELAKSANA KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XVIII

Pelindung :

Rektor Universitas Riau

Pembina:

Para Wakil Rektor Universitas Riau

Penanggung Jawab :

Dekan Fakultas MIPA Universitas Riau

Panitia Pengarah:

Ketua : Prof. Dr. Budi Nurani Ruchjana (Presiden IndoMS 2014-2016)

Sekretaris : Dr. Syamsudhuha (Panitia KNM XVIII)

Anggota :

Dr. Kiki A. Sugeng (Wakil Presiden I IndoMS 2014-2016)

Prof. Dr. Zulkardi (Wakil Presiden II IndoMS 2014-2016)

Prof. Dr. Edi Cahyono (Wakil Presiden III IndoMS 2014-2016)

Dra. Anna Chadidjah, MT (Bendhara IndoMS 2014-2016)

Dr. Hengki Tasman (Sekretaris IndoMS 2014-2016)

Dr. Imran M. (Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau)

Dr. MDH Gamal (Ketua Program Studi Matematika FMIPA Universitas Riau)

Dr. Kartini, MSi (Ketua Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UR)

Drs. Abdurrahman, M.Pd (Ketua Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UIR)

Ari Pani Desvina, S.Si, M.Sc (Ketua Jurusan Matematika FST UIN Suska)

Panitia Pelaksana

Ketua Pelaksana : Dr. Syamsudhuha, M.Sc

Wakil Ketua : Dr. MDH Gamal., M.Sc.

Sekretaris : Dr. Elfizar, S.Si, M.Kom

Wakil Sekretaris : Dr. Sri Rezeki, M.Si

Bendahara : Musraini, M.Si

Wakil Bendahara : Astried, M.Kom.

Seksi Sidang dan Acara

Dr. Kartini, S.Pd, M.Si

Dr. Arisman Adnan, M.Sc

Dr. Lely Deswita, M.Si

Dra. Armis T., M.Pd

Dra. Putri Yuanita, M.Ed

Dra. Susda Heleni, M.Pd

Drs. Bustami, M.Si

Seksi Sekretariat

Zulkarnain, M.Si

Efvi Mahdiyah, MIT

Hasanudin, M.Si

Fiza Febriani, MIT

Seksi Penerimaan Makalah

Supriadi Putra, M.Si
Corry Corazon Marzuki, M.Si
Ari Pani Desvina, S.Si, M.Sc
Irma Suryani, S.Si, M.Sc
Ismail Mulia, M.Si
Ibnu Daqi'il Id, M.Kom

Seksi Review Extended Abstract dan Makalah

Prof. Dr. Mashadi, M.Si (Analisis, dan Geometri)
Dr. Sri Gemawati, M.Si (Aljabar)
Dr. Elfizar, S.Si, M.Kom (Ilmu Komputer)
Dr. Imran M., M.Sc (Matematika Terapan)
Yenita Roza, PhD (Matematika Pendidikan)
Dr. Rado Yendra, M.Sc (Statistika)
Prof. Dr. Syafrizal (Teori Graf dan Kombinatorik)

Seksi Prosiding

Dr. Imran M, M.Sc
Roni Salambue, M.Si
Zaiful Bahri, S.Si., M.Kom
IndahWidiati, M.Pd

Seksi Akomodasi dan Transportasi

Dr. Zulkarnain, M.Pd
Abdul Rahman, M.Pd
Drs. Aziskhan, M.Si
Rustam Efendi, M.Si

Seksi Konsumsi

Dra. Hasriati, M.Si
Dra. Titi Solfitri, M.Ed
Dra. Rini Dian Anggraini, M.Pd
Reni Wahyuni, M.Pd
Fatayat, M.Kom
Dra. Syofni, M.Pd

Seksi Publikasi, Dokumentasi dan Pengelolaan Web

Aidil Fitriansyah, MIT
Wartono, M.Sc
Khozin Mu'tamar, M.Si

Seksi Perlengkapan

Drs. Sigit Sugiarto, M.Si
Sari Herlina, M.Pd
Haposan Sirait, M.Si
Alfirman, M.Kom

Seksi Tour

Drs. M. Natsir, M.Si
Joko Risanto, S.Kom, MKom
Gita Sastria, MIT

Seksi Keamanan dan Kesehatan

Dr. Sehatta Saragih, M.Pd
Drs. Agusni
Muhammad Soleh, M.Sc
Andoko Ageng Setyawan, M.Pd
Drs. Endang Lily, M.Si

Seksi *Sponsorship* dan *Public Relation*

Drs. Rolan Pane, M.Si

Drs. Sukamto, M.Kom

Drs. Harison, M.Si

Drs. Zuhri. D, M.Pd

Dr. Atma Murni, M.Pd

Sekretariat: FMIPA Universitas Riau, Jl. HR. Soebrantas Km 12.5 Kampus Bina Widya. Panam.
Pekanbaru 28293, Telp. (0761) 63273 Fax (0761) 63279

DAFTAR ISI

Halaman Judul	i
Tim Penilai Makalah (Reviewer)	ii
Kata Pengantar	iv
Susunan Panitia KNM XIII	v
Daftar Isi	viii
SESI UTAMA	
RESEARCH ON SKEW POLYNOMIAL RINGS	
Intan Muchtadi Alamsyah	1
INTEGRAL-CL KUAT SEBAGAI GENERALISASI INTEGRAL-HL	
Ch. Rini Indrati, Lina Aryati	2
BEBERAPA PENGEMBANGAN TEOREMA NAGEL, GERGONNE, DAN NAPOLEON	
Mashadi	3
PENERAPAN METODE PENILAIAN KONTRAK OPSI DALAM PENENTUAN NILAI PREMI ASURANSI PERTANIAN BERBASIS INDEKS CURAH HUJAN	
K. Dharmawan, W. Widia, L. P. E. Yuni	4
ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY ORDE FRAKSIONAL	
Agus Suryanto	10
MODEL STOKASTIK PENYEBARAN HIV/AIDS DALAM SISTEM KOMPLEKS	
Asrul Sani	11
KOMPUTASI NUMERIK DAN APLIKASINYA	
Tulus	12
DETEKSI TABRAKAN OBJEK PADA DISTIBUTED VIRTUAL ENVIRONMENT	
Elfizar	14
MENCARI GRAF AJAIB DAN ANTIAJAIB BERDASARKAN JARAK	
Rinovia Simanjuntak	15
NEW APPROACHES FOR PRODUCTION-INVENTORY-DISTRIBUTION ROUTING PROBLEM	
Noor Hasnah Moin, Dicky Lim Teik Kyee	16
INFORMASI GEROMBOL UNTUK PENDUGAAN AREA KECIL NIRCONTOH (CLUSTER INFORMATION ON NON-SAMPLE SMALL AREA ESTIMATION)	
Anang Kurnia, Rahma Anisa, Vinny Yuliani Sundara	17
BERCERMIN DAN HASIL PISA MATEMATIKA DAN PIAAC NUMERACY: KASUS INDONESIA DAN SINGAPURA	
Zulkardi, Berinderjeet Kaur	18

SESI PARALEL

ALJABAR

TINJAUAN TEORITIS Q-FUZZY QUASI-IDEAL DARI SEMIGRUP TERURUT
Noor Hidayat 19

KONSTRUKSI TOPOLOGI PADA MODUL VALUASI MENGGUNAKAN FUNGSI VALUASI DI MODUL
Sri Efrinita Irwan, Hanni Garminia, Pudji Astuti 25

MATEMATIKA TERAPAN

KENDALI OPTIMAL PENYEBARAN PENYAKIT BUSUK BUAH TANAMAN KAKAO AKIBAT JAMUR PHYTOPHTHORA PALMIVORA
R. Ratianingsih, G. Triwidodo, R.A. Yahya, Hajar, A.I. Jaya 29

KLASIFIKASI KANKER PARU-PARU MENGGUNAKAN SVM DENGAN PEMILIHAN FITUR BERDASARKAN FUNGSI KERNEL
Melati Vidi Jannati, Zuherman Rustam 37

MODEL ENDEMIK UNTUK TRANSMISI PENYAKIT SCHISTOSOMIASIS PADA POPULASI MANUSIA-SIPUT-CACING
Juni Wjayanti Puspita, Rina Ratianingsih, Resnawati 43

MODEL DETERMINISTIK DUA-FASE (STUDI KASUS POPULASI KOTA PEKANBARU)
Granita, Syamsudhuha 50

DEKOMPOSISI MINIMUM MATRIKS DOSIS UNTUK MENGOPTIMALKAN PENDISTRIBUSIAN DOSIS RADIASI PADA INTENSITY MODULATED RADIATION THERAPY (IMRT)
Wisnu Wardana, Siti Aminah, Kiki Ariyanti Sugeng 55

MODIFIKASI VARIAN METODE NEWTON DENGAN ORDE KONVERGENSI DELAPAN
Wartono, Atika Novia Yoma 65

MATEMATIKA KOMPUTASI

APLIKASI ENKRIPSI CITRA DIGITAL DENGAN ALGORITMA DUFFING MAP
Edi Sukirman, Suryadi MT, Sugih Prasetya 71

IMPLEMENTASI ALGORITMA ENKRIPSI CITRA DIGITAL MENGGUNAKAN TANGENT LOGISTIC MAP
Suryadi MT, Yudi Satria, Desty Chartika 77

PEMBENTUKAN SRUKTUR BAYESIAN NETWORK DARI DATA
Devni Prima Sari, Dedi Rosadi, Danardono, Adhitya Ronnie E. 84

IDENTIFIKASI GELOMBANG SPIKE DAN SHARP PADA DATA EEG PASIEN EPILEPSI MENGGUNAKAN BACKPROPAGATION NEURAL NETWORK
Agus Indra Jaya, Juni Wjayanti Puspita, Edy Soewono 91

KOMBINATORIKA DAN GRAF

KONSTRUKSI PELABELAN GRACEFUL UNTUK GRAF POHON DENGAN BANTUAN MATRIKS KETETANGGAAN
Kiki Ariyanti Sugeng, Widita Endiyarini, Denny R. Silaban 96

NILAI TOTAL KETAKTERATURAN TITIK GRAF HASIL KALI COMB P_m DAN C_4
C. M. Corazon, Lina Hasanah, N. R. Riyanti 101

RISET OPERASI

PROGRAM LINEAR MULTIOBJEKTIF INTEGER FUZZY DENGAN VARIABEL KEPUTUSAN FUZZY

Listy Vermana 107

PENERAPAN FORMULASI PROGRAM LINEAR BILANGAN BULAT SINGLE DEPOT MULTIPLE TRAVELING SALESMAN PROBLEM PADA KASUS DEPOSIT CARRYING (STUDI KASUS: BANK BTN YOGYAKARTA)

Rahmawati, Irwan Endrayanto Aluicius 114

STATISTIKA

PENERAPAN MODEL REGRESI NONPARAMETRIK SPLINE PADA DATA ANGKA GIZI BURUK DI PROVINSI MALUKU

F. Kondo Lembang, M. M. Gardjalay, K. J. Poceratu, N. Lalurmele 125

FAKTOR INFLASI DALAM ESTIMASI CADANGAN KLAIM

Lienda Noviyanti, Achmad Zanbar Soleh 135

PERBANDINGAN PEMBOBOT BISQUARE TUKEY DAN RAMSAY PADA REGRESI ROBUST-M

Yuni Mafruroh, Rahmadeni 144

PENERAPAN MULTITRAIT-MULTIMETHOD (MTMM) UNTUK PENAKSIRAN KOEFISIEN RELIABILITAS DAN VALIDITAS INSTRUMEN PENGUKURAN

Achmad Bachrudin 151

SAINS AKTUARIA

PREDIKSI HARGA SAHAM MENGGUNAKAN SUPPORT VECTOR REGRESSION BERBASIS TEKNIKAL ANALISIS

Irmawardani Saragih, Zuherman Rustam 160

EVALUASI PREMI ASURANSI DWIGUNA LAST SURVIVOR UNTUK KASUS TIGA ORANG TERTANGGUNG

Devni Prima Sari, Jazwinarti 165

PREMI ASURANSI DWIGUNA JOINT LIFE MENGGUNAKAN DISTRIBUSI PARETO

Hasriati, M. D. H. Gamal, T. P. Nababan 172

MODEL LOGIT DAN MODEL PROBIT DALAM CREDIT SCORING MODEL KREDIT MIKRO KOMERSIAL

Anna Chadidjah, Achmad Zanbar Soleh, Rizky Pangaribuan 180

MATEMATIKA PENDIDIKAN

PENGGUNAAN SOFTWARE CABRI 3D DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA UPAYA MENINGKATKAN KEMAMPUAN VISUALISASI SPASIAL MATEMATIS SISWA

Alpha Galih Adirakasiwi 188

PENGARUH PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN REFLEKTIF TERHADAP KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH DAN KOMUNIKASI MATEMATIS MAHASISWA CALON GURU

Rohana, Yunika Lestaria Ningsih 196

DESAIN PEMBELAJARAN PENGURANGAN BILANGAN CACAH MELALUI PERMAINAN PANCING IKAN UNTUK SISWA KELAS 1

Septy Cartika Sari, Yusuf Hartono, Hapizah 204

PENGEMBANGAN MODUL SEGI EMPAT BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING UNTUK MEMFASILITASI KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA SMP

Zubaidah Amir MZ, Liti Novyanti 212

DAMPAK PEMAHAMAN MATEMATIS SISWA SD MARGINAL MELALUI PENDEKATAN LABORATORIUM MINI KAWASAN KEBUN SAWIT Sehatta Saragih	220
PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN PROJECT BASED LEARNING PADA PEMBELAJARAN TIK DI SMAN 1 BATANG ANAI Khairudin, Karmila Suryani, Jusviani	228
ANALISIS KESALAHAN PESERTA DIDIK KELAS VIII.5 DAN III.7 SMP NEGERI 11 PEKANBARU DALAM MENYELESAIKAN SOAL ULANGAN HARIAN MATEMATIKA PADA MATERI RELASI FUNGSI TAHUN PELAJARAN 2014/2015 Puji Karuniakhalida	235
PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS ICT PADA POKOK BAHASAN LINGKARAN UNTUK SISWA KELAS VIII SMP/MTS Yoshe Larissa Ulfa, Putri Yuanita, Yenita Roza	241
PENGARUH PENERAPAN PENDEKATAN PROBLEM SOLVING MODEL POLYA TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI DAN BERFIKIR KREATIF MATEMATIS SISWA MTs Ramlah, Rippi Maya	247
UJI EFEKTIFITAS BAHAN AJAR METODE NUMERIK MENGGUNAKAN SOFTWARE MATLAB Finola Marta Putri	254
MEMPERKENALKAN KONSEP NILAI MUTLAK MELALUI KONTEKS ‘AIR AND SEA’ PADA SISWA SEKOLAH MENENGAH PERTAMA Nyiyayu Fahriza Fuadiah	261
PEMBELAJARAN ALJABAR BERBASIS NILAI-NILAI AKHLAK UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR ALJABAR MAHASISWA SEMESTER I UNIT 1 PRODI TADRIS MATEMATIKA STAIN MALIKUSSALEH LHOKSEUMAWA T.A 2015/2016 Rosimanidar, Abdussakir	268
PENINGKATAN KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA MELALUI STRATEGI BERMAIN JAWABAN Zulfa Amrina	276
PENGEMBANGAN LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK BERBASIS PROBLEM BASED LEARNING UNTUK MATERI MATEMATIKA SEMESTER 1 KELAS VIII SMP PADA TAHAP VALIDITAS Zulfah	283

SESI UTAMA

RESEARCH ON SKEW POLYNOMIAL RINGS

Intan Muchtadi Alamsyah

*Algebra Research Division
Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Institut Teknologi Bandung*

Abstract

In this talk we will present some research on skew polynomial rings. We have studied minimal prime ideals of skew polynomial rings over Dedekind domains, skew polynomial rings over generalized Asano prime rings and skew polynomial rings over Morita rings of Morita context. Moreover, we will also present skew polynomial rings in coding theory.

INTEGRAL-CL KUAT SEBAGAI GENERALISASI INTEGRAL-HL

Ch. Rini Indrati, Lina Aryati

*Departemen Matematika FMIPA UGM, Sekip Utara Yogyakarta 55281,
rinii@ugm.ac.id, lina@ugm.ac.id*

Abstract

Integral-HL merupakan integral yang lebih umum daripada integral Lebesgue, dalam arti setiap fungsi terintegral Lebesgue merupakan fungsi terintegral-HL. Pada paper ini dibahas integral-CL yang dibangun berdasarkan kondisi Lipschitz terhitung.

Integral-CL merupakan integral tak mutlak yang lebih umum daripada integral Lebesgue dibuktikan dengan membuktikan bahwa integral-CL merupakan generalisasi integral-HL, dalam arti setiap fungsi terintegral-HL merupakan fungsi terintegral-CL.

Kata kunci: integral-CL, integral-HL, integral Lebesgue, dan Lipschitz terhitung.

Daftar Pustaka

- [1] Čelidze, V.G., and Džvaršeišvili, A.G., 1989, The Theory of the Denjoy Integral and Some Applications, (Series in Real Analysis Volume 3, Translated by P.S. Bullen), World Scientific Publishing, Singapore.
- [2] Indrati, Ch. R., 2015, Some Characteristic of the Henstock-Kurweil Integral in Countably Lipschitz Condition, presented in The 7th SEAMS-UGM, 18 - 21 August 2015.
- [3] Indrati, Ch. R., and Aryati, L., 2016, The Countably Lipschitz Integral, GJPAM, Volume 12, Number 5 (2016), pp. 3991–3999.
- [4] Lee P. Y., 1989, Lanzhou Lectures on Henstock Integration, World Scientific Publishing, Singapore.
- [5] Lee P. Y. and Vyborny, R., 2000, Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] Schurle, A.W., A Function is Perron Integrable if it has locally small Riemann sums, J. Australian Math. Soc (Series A) 41 (1986), 224 - 232.

BEBERAPA PENGEMBANGAN TEOREMA NAGEL, GERGONNE, DAN NAPOLEON

Mashadi

*Program Studi S2 Matematika FMIPA Universitas Riau
mashadi.mat@gmail.com*

Abstrak

Teorema Nagel, Gergonne dan Napoleon dalam geometri bidang pada umumnya hanya dikenal untuk sebarang segitiga, yang masing-masing ada 2 jenis yaitu yang dikonstruksi di dalam dan di luar segitiga. Dalam tulisan ini diberikan cara alternatif mengkonstruksi Nagel serta pengembangan Teorema Nagel, Gergonne dan Napoleon dalam sebarang segi-empat. Juga akan dibahas beberapa panjang jari-jari yang dapat dikonstruksi dari pengembangan teorema tersebut pada segi-empat.

PENERAPAN METODE PENILAIAN KONTRAK OPSI DALAM PENENTUAN NILAI PREMI ASURANSI PERTANIAN BERBASIS INDEKS CURAH HUJAN

K. Dharmawan^{*1}, W. Widia², L. P. E. Yuni³

¹Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Udayana

²Jurusan Teknik Pertanian, FTP, Universitas Udayana

³Jurusan Biologi, FMIPA, Universitas Udayana

*email: k.dharmawan@unud.ac.id

Abstrak

Asuransi pertanian yang berbasis pada indeks iklim/cuaca merupakan alat manajemen risiko yang relatif baru di Indonesia. Penentuan nilai premi asuransi sejenis ini masih merupakan tantangan yang cukup besar bagi praktisi maupun peneliti dalam mendapatkan nilai premi yang fair, akurat, dan berkeadilan. Tujuan dari makalah ini adalah menyajikan langkah-langkah yang diperlukan dalam menghitung indeks curah hujan yang akan dipakai sebagai pemicu (*trigger*) dalam menilai premi asuransi pertanian dan menghitung premi asuransi pertanian untuk kasus di Kabupaten Tabanan. Metode yang dipakai dalam menilai premi adalah metode penilaian opsi put tipe cash-or-nothing yang dikembangkan oleh Black-Scholes. Metode Black-Scholes memberikan nilai premi yang lebih fair jika dibandingkan dengan premi menurut AUTP (Asuransi Usaha Tani Padi)

Kata Kunci: Asuransi Pertanian, Model Black-Scholes, Indeks Curah Hujan, Kontrak Opsi

1. Pendahuluan

Sektor pertanian dalam perekonomian nasional memiliki peran yang sangat penting. Peran penting ini terwujud dalam berbagai bentuk seperti penyedia sumber pangan bagi masyarakat, sumber pendapatan nasional, membuka kesempatan kerja, sumber investasi, serta penghasil devisa negara ketika produk-produk hasil pertanian diekspor ke negara lain. Usaha pada sector pertanian dihadapkan pada risiko ketidakpastian yang cukup tinggi dan petani selama ini menanggung sendiri risiko tersebut. Menurut Undang-undang No. 19 tahun 2013, tentang perlindungan dan pemberdayaan petani pasal 37 ayat (1), "Pemerintah dan Pemerintah Daerah sesuai dengan kewenangannya berkewajiban melindungi usaha tani yang dilakukan oleh petani dalam bentuk asuransi pertanian". Sebagai wujud dari pelaksanaan undang-undang tersebut, pemerintah melalui Kementerian Keuangan, Badan Kebijakan Fiskal, Pusat Pengelolaan Risiko Fiskal telah memulai melakukan kajian mengenai implementasi asuransi pertanian secara nasional [6], studi kelayakan mengenai asuransi pertanian berbasis curah hujan juga telah dilaksanakan, lihat [11].

Seperti diungkapkan oleh Insyafiah dan Wardani pada [6] bahwa asuransi pertanian diterapkan untuk melindungi petani dari kerugian gagal panen akibat terjadinya bencana alam, serangan organisme pengganggu tumbuhan, wabah penyakit hewan menular, atau dampak perubahan iklim [6]. Selain itu, asuransi pertanian dapat juga diberikan pada usaha tani untuk melindungi petani dari risiko penurunan harga di pasar, khususnya untuk komoditas pertanian yang dijual di pasar modal, seperti kedelai, kelapa sawit, kopi, cengkeh, dll.

Penetapan kebijakan mengenai perlindungan terhadap usaha tani berupa asuransi pertanian, memunculkan masalah yaitu bagaimana menentukan nilai kontrak premi asuransi pertanian tersebut yang fair, akurat, dan berkeadilan. Berbagai usulan telah disampaikan, baik oleh praktisi asuransi atau peneliti pada bidang asuransi, bahkan penentuan nilai kontrak asuransi pertanian menjadi isu yang sangat penting di bidang keuangan pertanian akhir-akhir ini. Berbagai metode penentuan nilai kontrak telah diusulkan pada berbagai artikel seperti pada [3], [4], dan [5]. Dari sekian banyak metode perhitungan premi yang ada, makalah ini lebih berfokus pada perhitungan premi menggunakan metode yang dibahas pada [12].

Asuransi pertanian yang berbasis pada indeks iklim/cuaca merupakan alat manajemen risiko yang relatif baru dan saat ini sedang dikembangkan dikembangkan diberbagai negara seperti Thailand, India, Filipina, dan beberapa negara di Afrika [9]. Asuransi indeks iklim adalah asuransi yang dihubungkan dengan indeks ilmiah (*scientific index*) seperti curah hujan, suhu, kelembaban atau hasil panen, bukan kerugian aktual. Indeks iklim sering digunakan untuk pertanian karena adanya korelasi yang kuat antara kejadian iklim dengan kehilangan hasil tanaman. Korelasi yang tinggi dapat diketahui dengan melakukan analisis dan evaluasi terhadap beberapa model yang menghubungkan kejadian iklim yang direpresentasikan melalui curah hujan dengan hasil tanaman. Indeks iklim yang dihasilkan merupakan masukan penting dalam pengembangan model asuransi indeks iklim. Asuransi indeks iklim ini akan memberikan kepastian pada bidang pertanian di Indonesia. Alat manajemen risiko ini diciptakan untuk menanggapi risiko iklim khususnya curah hujan terhadap produk hasil pertanian. Apalagi dengan kondisi iklim yang tidak menentu, petani harus jeli melihat komoditas yang akan ditanam agar tidak gagal panen [15].

Asuransi berbasis pada indeks adalah suatu jenis asuransi dimana pihak penanggung akan melakukan pembayaran kepada pihak tertanggung apabila terjadi peristiwa pemicu (*triggering event*) yang menyebabkan kerugian bagi pihak tertanggung. Peristiwa pemicu itu disepakati bersama sebelum kontrak itu ditandatangani. Peristiwa pemicu tersebut dapat berupa indeks curah hujan, suhu permukaan, banjir, atau kejadian alam lainnya yang dapat mengakibatkan kerugian pada petani. Prinsip dasar asuransi pertanian indeks iklim antara adalah (a) pembayaran dilakukan pada pemegang polis apabila terpenuhi kondisi curah hujan yang tidak diharapkan, tanpa perlu bukti kegagalan panen (b) sistem mengasuransikan indeks iklim, bukan tanamannya [7].

Tujuan dari makalah ini adalah (1) menyajikan langkah-langkah yang diperlukan dalam menghitung indeks curah hujan yang akan dipakai sebagai pemicu (*trigger*) dalam menilai premi asuransi pertanian yang berbasis pada perubahan curah hujan (2) menghitung premi asuransi pertanian berbasis indeks curah hujan untuk Kabupaten Tabanan.

2. Penentuan Premi Menggunakan Penilaian Kontrak Opsi

Pada bagian ini, diperkenalkan konsep kontrak opsi yang akan dipakai dalam menentukan premi asuransi pertanian. Opsi merupakan suatu kontrak atau perjanjian yang memberikan hak bukan kewajiban kepada pemegang kontrak untuk membeli atau menjual suatu asset induk (*underlying asset*) dengan harga tebus (*strike price*) yang telah disepakati pada saat atau sebelum jatuh tempo (*expiration date*). Apabila pemegang opsi tidak menggunakan haknya pada waktu jatuh tempo, maka hak tersebut akan hilang dengan sendirinya. Opsi dapat digunakan untuk meminimalkan resiko sekaligus memaksimalkan keuntungan dengan daya ungkit (*leverage*) yang lebih besar [10]. Terdapat banyak metode yang dipakai untuk menentukan nilai kontrak opsi, salah satunya adalah metode *Black-Scholes*, yang diformulasikan sebagai berikut:

$$P(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(K - S_T, 0)] \quad (1)$$

Solusi persamaan (1), diturunkan secara lengkap pada [1], adalah

$$P(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_0e^{-\delta(T-t)}N(-d_1) \quad (2)$$

dimana

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

dengan $P(S_t, t)$ = nilai kontrak opsi jual tipe Eropa, S_0 = perubah acak yang merupakan harga saham pada saat $t = 0$, K = harga tebus (*strike price*) dari saham induk, r = suku bunga bebas risiko per tahun, δ = dividen dari saham per tahun, dan $N(x)$ = fungsi distribusi kumulatif normal standar.

Pemegang opsi memiliki hak yang dibelinya seharga C untuk menentukan apakah akan melaksanakan atau tidak (atau yang biasa disebut meng-*exercise*) opsi miliknya, yaitu hak membeli (pada opsi beli) atau hak menjual (pada opsi jual) dan pihak yang menjual opsi atau yang biasa disebut penerbit opsi wajib memenuhi hak opsi dari pemegang opsi tersebut sesuai dengan harga tebus yang disepakati

yaitu K .

Untuk memahami bagaimana penilaian kontrak opsi ini dipakai dalam menghitung premi asuransi pertanian perlu dipahami istilah *cash-or-nothing put option*. Misalkan S_t adalah harga saham yang dipakai acuan dalam kontrak opsi pada saat t , maka pemilik kontrak *cash-or-nothing put option* akan menerima sejumlah γ rupiah pada saat kontrak jatuh tempo jika harga saham S_t lebih kecil dari harga tebus K , $S_T < K$, atau akan menerima 0 rupiah jika $S_T \geq K$. Simbol γ merupakan fungsi *payoff* dari suatu kontrak opsi tersebut yang didefinisikan sebagai

$$\gamma = \begin{cases} P & S_T < K \\ 0 & S_T \geq K \end{cases}$$

Seperti dijelaskan pada [1] dan [2] bahwa formula Black-Scholes diturunkan dengan asumsi bahwa nilai ekspektasi pada persamaan (1) dihitung menggunakan peluang *risk-neutral* dan S_T/S_0 diasumsikan berdistribusi lognormal. Sehingga, $N(-d_2)$ adalah peluang (*risk-neutral*) bahwa harga saham akan lebih kecil dari harga tebus K pada saat T . Jadi nilai kontrak dari *cash-or-nothing put option* adalah $Pe^{-r(T-t)}N(-d_2)$. Seperti diklaim pada [12] atau [14] bahwa terdapat banyak persamaan antara kontrak asuransi berbasis indeks dengan *cash-or-nothing put option*, sehingga asuransi berbasis indeks dapat dihitung preminya menggunakan perhitungan nilai kontrak opsi jual tipe *cash-or-nothing*. Asumsi lain yang harus dipenuhi adalah petani pemilik usaha tani bersifat *risk averse*, menghindari risiko dan membeli polis asuransi berbasis cuaca untuk mengurangi risiko yang mungkin terjadi. Asumsi lain adalah seperti dibahas pada [3] bahwa petani diasumsikan memiliki dua aset, yaitu hasil panen tanaman tunggal dan polis asuransi indeks cuaca. Untuk asuransi berbasis pada indeks cuaca, nilai pertanggungansian (*Payout*) bergantung pada realisasi cuaca dan dirancang sebagai *cash-or-nothing put option*.

Untuk menghitung premi asuransi pertanian berbasis indeks curah hujan, ada beberapa parameter pada kontrak opsi yang harus disesuaikan dengan asuransi pertanian. Salah satu parameter yang dipakai dalam asuransi indeks adalah parameter peristiwa pemicu (*triggering event*) yang dalam hal ini adalah curah hujan, struktur *payout* dari asuransi indeks adalah pembayaran sekaligus, dan indeks curah hujan berdistribusi lognormal. Hal yang paling mendasar dalam asuransi berbasis indeks adalah nilai premi hanya merespon pada curah hujan atau suhu permukaan yang telah dicatat oleh Badan Meteorologi, Kebumihan dan Geofisika (BMKG) pada periode yang telah ditetapkan. Pemegang polis asuransi pertanian akan menerima pertanggungansian jika curah hujan berada dibawah nilai pemicu (*trigger*) yang dihitung berdasarkan data historis curah hujan disuatu tempat. Misalkan pembayaran sekaligus dari kontrak asuransi pertanian tersebut adalah P , maka nilai premi asuransi pertanian berbasis indeks dapat dihitung dengan formula

$$\text{Premi} = Pe^{-r(T-t)}N(-d_2). \quad (3)$$

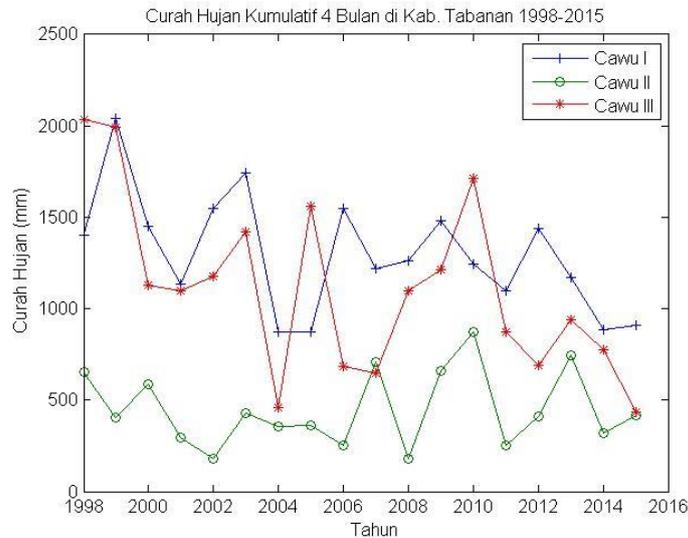
Dalam hal ini, $N(\cdot)$ adalah fungsi distribusi kumulatif normal standar, sehingga $N(-d_2)$ adalah peluang sesungguhnya (*real world*) bahwa curah hujan lebih kecil dari indeks (pemicu) curah hujan dan r adalah suku bunga majemuk pada interval waktu $(T - t)$.

3. Penerapan Model

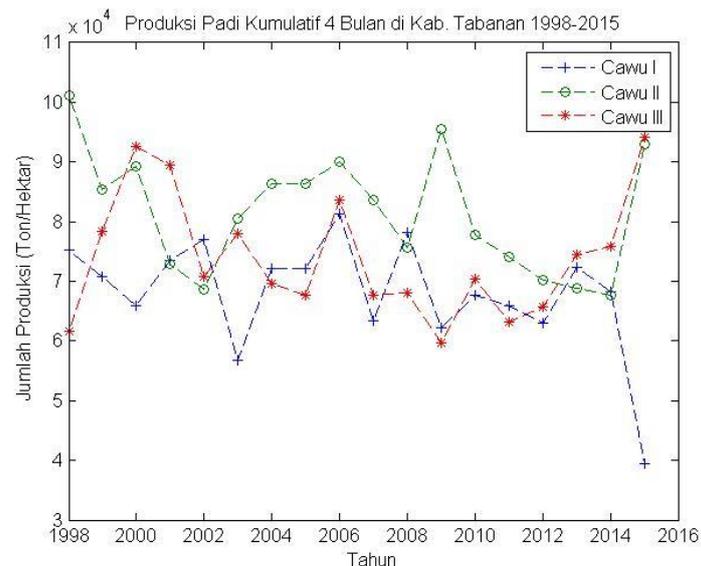
Kabupaten Tabanan, dikenal sebagai daerah lumbung beras di Bali, penghasil beras terbanyak di Bali, dan memiliki peran sentral dalam pertanian dengan luas wilayah 839,33 km² atau 14,90% dari luas Provinsi Bali (Sumber: BPS Tabanan, 2015). Menurut data Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Bali tahun 2015, luas sawah di Kabupaten Tabanan sebesar 21962 Hektar dari total 80542 Hektar sawah di Bali. Ditinjau dari produksi padi sawah, Kabupaten Tabanan selalu menempati posisi tertinggi. Tahun 2014 Kabupaten Tabanan dapat menghasilkan gabah 214192 ton dari total produksi padi sawah di Provinsi Bali 857499 ton, perhatikan juga Gambar 2. Hal ini memperkuat predikat Kabupaten Tabanan sebagai "lumbung berasnya Bali". Sebagai tambahan, mengacu pada data BMKG, Kabupaten Tabanan memiliki curah hujan yang cukup tinggi, seperti tersaji pada Gambar 2.

Seperti diberitakan oleh Koran online www.antarabali.com, edisi 11 Agustus 2015, bahwa, sekitar 800 Hektar sawah di Kecamatan Selemadeg Timur, Kabupaten Tabanan, Bali mengalami kekeringan sejak dua bulan terakhir dan kondisi ini dikhawatirkan menimbulkan gagal panen bagi petani setempat. Selanjutnya diungkapkan bahwa Kecamatan Selemadeg Timur, Kabupaten Tabanan, selama dua bulan terakhir tidak turun hujan. Pesan yang perlu dicermati dari berita ini adalah usaha tani penuh dengan risiko ketidakpastian akibat dari perubahan iklim global. Sehingga diperlukan suatu proses adaptasi dalam menghadapi perubahan iklim tersebut. Penjelasan lebih lengkap mengenai pengaruh perubahan iklim dalam usaha tani dapat dibaca pada [7], [8], atau [13]. Penentuan tanaman padi sebagai kajian tentu dengan harapan bahwa antara curah hujan dengan produksi padi memiliki korelasi yang cukup kuat.

Artinya, curah hujan dapat dipakai sebagai penentu produksi padi. Data produksi padi yang dipakai dalam analisis adalah data yang tercatat pada periode 1998-2015, seperti tersaji dalam Gambar 3.



Gambar 2. Data Historis Curah Hujan di Kabutapen Tabanan Periode 1998-2015



Gambar 3. Data Historis Produksi Padi di Kabupaten Tabanan Periode 1998-2015

Berdasarkan hasil *public hearing* di kabupaten Tabanan, seperti dilaporkan oleh Insyiah dan Wardhani [6], bahwa biaya input usaha tani padi, yaitu biaya untuk menanam padi sampai pada musim panen padi per hektar pada masa tanam tahun 2009 sebesar Rp5,5 juta per hektar. Dengan biaya input sebesar Rp5,5 juta/hektar mampu menghasilkan produksi padi sebesar Rp8,1 juta/hektar sehingga petani memperoleh keuntungan sebesar Rp2,6 juta/hektar. Dengan asumsi inflasi berkisar antara 5%-8% per tahun, maka biaya produksi diperkirakan Rp10.131.775 per hektar per musim tanam.

Dalam uji coba yang dilakukan oleh Asuransi Usaha Tani Padi (AUTP) ditetapkan bahwa nilai premi adalah 3% per hektar per musim tanam dari total biaya pertanggungan [6]. Jadi kalau angka 3% ini disepakati maka untuk Kabupaten Tabanan dengan biaya total produksi Rp10.131.775 per hektar, maka nilai preminya adalah Rp304.000. Selanjutnya nilai premi akan dihitung menggunakan metode penilaian *cash-or-nothing put option*. Dalam penentuan nilai premi berbasis curah hujan, harus dipastikan curah hujan memang dapat menurunkan produksi padi. Tahap selanjutnya adalah mengelompokkan data historis menjadi data Cawu I (Januari-April), Cawu II (Mei-Agustus), dan Cawu III (September-Desember) seperti tersaji pada Gambar 2 dan Gambar 3. Asumsikan bahwa penurunan volume curah

hujan pada Cawu II dapat menurunkan produksi padi.

Dalam menerapkan metode *Black-Scholes*, asumsi kelognormalan data harus dipenuhi. Data curah hujan pada Cawu II diuji kelognormalan data, menggunakan uji *Anderson-Darling* (adtest) pada taraf signifikan $\alpha = 5\%$. Hasil uji menunjukkan bahwa curah hujan pada Cawu II berdistribusi lognormal, sebagai pembanding lihat Gambar 4. Nilai *trigger* ditentukan dari nilai persentil curah hujan Cawu II, premi dihitung per Cawu (musim tanam), atau $T = 0.50$ dengan suku bunga bebas risiko diasumsikan konstan $r = 6.5\%$ per tahun dengan tahapan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Premi} &= 10,131,775 \times e^{-rT} \times N(-d_2) \\ &= 10,131,775 \times e^{-0,065 \times 0,25} \times 0,029 \\ &= 293300 \end{aligned}$$

dengan

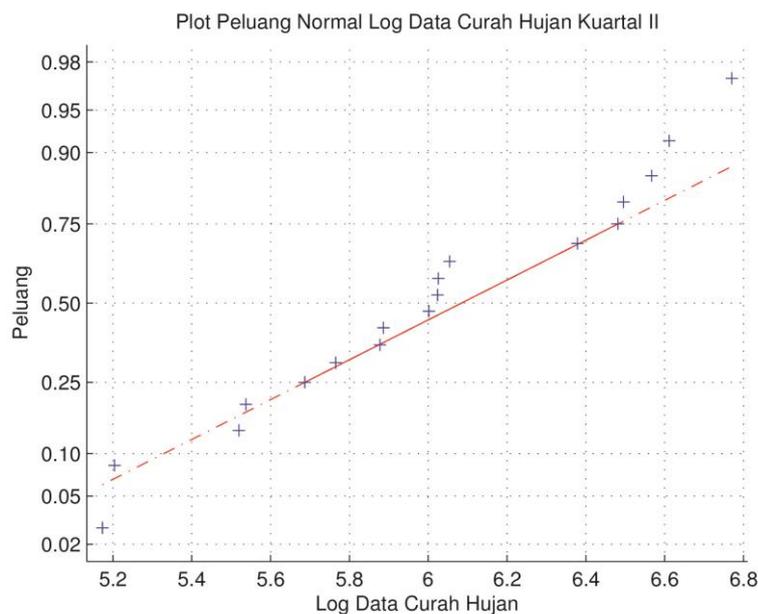
$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{C_0}{C_T}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{414}{214,40}\right) + \left(0,065 + \frac{(0,4762)^2}{2}\right)(0,5)}{0,4762\sqrt{0,5}} \\ &= 1,8822 \end{aligned}$$

Nilai premi untuk *trigger* yang berbeda-beda disajikan dalam Tabel 1. Jika dibandingkan dengan nilai premi yang ditetapkan oleh Asuransi Usaha Tani Padi (AUTP), yaitu 3% dari nilai pertanggungan yang setara dengan Rp304.000, maka nilai premi dihitung menggunakan metode *Black-Scholes* memberikan nilai premi yang lebih fair.

Tabel 1. Nilai Premi Untuk *Trigger* Yang Berbeda-beda

	<i>Trigger</i> (mm)	Pertanggungan (Rp.)	Premi (Rp.)	Persentase (%)
Persentil ke-10	202.25	10,131,775	195,360	1.93
Persentil ke-11	214.40	10,131,775	293,300	2.89
Persentil ke-15	250.40	10,131,775	761,280	7.51
Persentil ke-20	258.10	10,131,775	897,810	8.86

Metode *Black-Scholes* memberikan nilai premi yang lebih bervariasi dan fair jika dibandingkan dengan premi menurut AUTP (Asuransi Usaha Tani Padi)



Gambar. 4 Plot Kenormalan Data Curah Hujan Cawu II Periode 1998-2015

4. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas, ada beberapa hal menarik yang perlu dicatat khususnya untuk data curah hujan dan produksi padi di Kab. Tabanan: (1) korelasi antara curah hujan dan produksi padi tidak begitu signifikan sehingga akan memperlemah argumentasi pentingnya penerapan asuransi berbasis indeks curah hujan, (2) pembagian waktu tanam menjadi catur wulanan sebaiknya tetap setiap tahunnya sehingga penentuan korelasi antara curah hujan dan produksi menjadi lebih akurat, (3) tren curah hujan relatif konstan pada masing-masing cawu yang mengindikasikan bahwa pengaruh perubahan iklim global (*global climate change*) belum nampak pada data curah hujan di Kab. Tabanan, (4) penerapan paradigma opsi sebagai cara menghitung premi menunjukkan adanya keadilan dan fleksibilitas nilai premi jika dibandingkan dengan penetapan 3% dari nilai pertanggungan seperti yang disarankan oleh AUTP, (5) dalam penelitian ini juga ditemukan bahwa penentuan *trigger* dan pertanggungan mempunyai pengaruh yang sangat besar pada nilai premi (lihat Tabel 1), (6) perancangan asuransi berbasis indeks cuaca memerlukan kajian yang kontinu dan mendalam sehingga ditemukan korelasi yang akurat dan efektif merepresentasikan hubungan antara variabel indeks dengan kerugian hasil usaha tani, (7) catatan penting dalam asuransi berbasis indeks cuaca adalah indeks berlaku spesifik pada wilayah bersangkutan, (8) yang terakhir adalah keterlibatan semua pemangku kepentingan (*stakeholder*): pemerintah pada semua tingkat (pusat sampai desa) sebagai pembuat regulasi, perusahaan asuransi sebagai penyedia dana, aktuaris atau peneliti di perguruan tinggi sebagai mitra kerja, dan petani sebagai pemberi informasi mengenai biaya produksi, sehingga asuransi ini dapat memberikan solusi atau strategi baru bagi usaha tani dalam mengelola risiko.

Daftar Pustaka

- [1] Buchanan, J. R. (2006). *An Undergraduate Introduction to Financial Mathematics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [2] Bulut H. and K. Collins. (2014). Designing farm supplemental revenue coverage options on top of crop insurance coverage. *Agricultural Finance Review*, Vol. 74 No. 3, 2014, pp. 397-426.
- [3] Conradt S., R. Finger, and M. Sporri. (2015). Flexible weather index-based insurance design, *Climate Risk Management* 10, pp. 106-117
- [4] Daron J. D. and D. A. Stainforth. (2014) Assessing pricing assumptions for weather index insurance in a changing climate. *Climate Risk Management* I. p.76-91
- [5] Estiningtyas, W. I. Las, dan H. Syahbuddin. (2013). *Pengembangan Asuransi Indeks Iklim Pada Usaha Tani Untuk Menghadapi Perubahan Iklim, Politik Pembangunan Pertanian Indonesia*, editor: Haryono Suparno dkk. Badan Penelitian dan Pengembangan Pertanian, Kementerian Pertanian Republik Indonesia
- [6] Insyafiah dan I. Wardani, (2014). *Kajian Persiapan Implementasi Asuransi Pertanian Secara Nasional*. Kementerian Keuangan dan Kebijakan Fiskal Pusat Pengelolaan Risiko Fiskal
- [7] IRI. (2012). *Index Insurance Capacity Building Exercises for Indonesia Release 2.0*. TRI, Earth Institute, Columbia University.
- [8] IFAD-WFP. (2011). Weather Index-based Insurance in Agricultural Development: A Technical Guide IRI. 2010. *Weather Index Insurance education Tool (WhET)*
<http://iri.columbia.edu/education/insurancetool>.
- [9] Heimfarth L. E. (2012). *Theory and application of weather index-based insurance in agriculture*. Doctoral Degree Dissertation, Faculty of Agricultural Sciences, Georg-August-Universität Göttingen, Germany
- [10] Hull, J. C. (2009). *Option, Futures, and Other Derivatives*. New Jearsey: Pearson Prentice Hall.
- [11] Mariamorn, O. P. (2010). *A Feasibility Study on Weather Index Insurance for Agriculture in Indonesia - Weather Index Insurance in the Context of Agricultural Risk Management and Relevant International Experiences*. Bahan Presentasi dalam Weather Index Insurance Seminar 2010.
- [12] Okine A. N. (2014), *Pricing of Index Insurance Using Black-Scholes Framework: A Case Study of Ghana*. Master of Science Thesis, Dept. of Mathematics, Illinois State University.
- [13] Sarris A. (2013). Weather index insurance for agricultural development: introduction and overview. *Agricultural Economics* 44, p.381-384.
- [14] Wacek, M. G. (1997), Application of the Option Market Paradigm to The solution of Insurance Problems, *PCAS LXXXIV*, pp.701-733
- [15] Weber, R. 2015. Meso-level weather index insurance: Overcoming low risk reduction potential of micro-level approaches. *Agricultural Finance Review*, Vol. 75 No. 1, 2015, pp. 31-46

ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY ORDE FRAKSIONAL

Agus Suryanto

*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya
suryanto@ub.ac.id*

Abstract

Interaksi predator-prey adalah salah satu kajian utama dalam ekologi karena merupakan salah satu hubungan dasar antar spesies untuk model ekologi yang sekaligus merupakan blok dasar untuk rantai makanan yang lebih rumit. Dinamika populasi predator dan prey seringkali dimodelkan dengan menyatakan laju perubahan populasi masing-masing spesies akibat proses pertumbuhan (kelahiran) dan kematian (alami, pemangsa) yang mungkin bergantung pada kepadatan populasi baik prey maupun predator. Dalam hal ini laju perubahan populasi dinyatakan sebagai turunan pertama terhadap waktu sehingga diperoleh model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa orde satu nonlinear. Hal ini secara implisit menyatakan bahwa laju perubahan populasi bergantung secara instan pada populasi prey/predator pada saat ini. Secara umum, laju perubahan populasi juga bergantung pada masa lampau. Dengan berkembangnya teori kalkulus fraksional, kebergantungan laju perubahan populasi pada memori masa lampau, turunan pertama terhadap waktu dimodifikasi menjadi turunan orde fraksional (pecahan) sehingga diperoleh model berupa sistem persamaan diferensial fraksional. Dalam artikel ini dibahas analisis dinamik model fraksional berupa penentuan titik kesetimbangan dan eksistensinya, termasuk kestabilan lokal titik kesetimbangan. Kriteria kestabilan titik kesetimbangan didasarkan pada Matignon[1]. Dalam hal ini solusi sistem persamaan diferensial fraksional dapat dinyatakan sebagai fungsi Mittag-Leffler sehingga kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh konvergensi fungsi Mittag-Leffler tersebut.

Solusi analitik sistem persamaan diferensial fraksional nonlinear secara umum sulit didapatkan. Oleh karena itu diperlukan pendekatan numerik untuk mendapat solusinya. Dalam artikel ini akan dikonstruksi skema Grünwald-Letnikov nonstandar untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial fraksional. Skema diperoleh dengan mendiskretisasi turunan fraksional menggunakan pendekatan Grünwald-Letnikov [2] yang dikombinasikan dengan metode beda hingga nonstandar [3].

Untuk memberikan ilustrasi, metode analisis dan skema numerik diimplementasikan pada model predator-prey fraksional dengan respon fungsional ratio-dependent. Dari hasil-hasil simulasi ditunjukkan bahwa solusi-solusi numerik yang dihasilkan oleh skema Grünwald-Letnikov nonstandar sesuai dengan hasil analisis dinamik.

Daftar Pustaka

- [1] Matignon, D., Stability results for fractional differential equations with application to control processing, in: Appl. Computational Eng. Sys. 2, France, 963-968, 1996
- [2] Mickens, R., Nonstandard finite difference models of differential equations, World Scientific, 1994.
- [3] Arenas A.J., Gonzales-Parra, G. and Chen-Charpentier, B.M., Construction of nonstandard finite difference schemes for the SI and SIR epidemic models of fractional order, Math. Comput. Simul. 121, 48-63, 2016.
- [4] Scherer, R., Kalla, S.L., Tang, Y. and Huang, J., The Grünwald-Letnikov method for fractional differential equations, Comput. Math. Appl. 62, 902-917, 2011.

MODEL STOKASTIK PENYEBARAN HIV/AIDS DALAM SISTEM KOMPLEKS

Asrul Sani

*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Halu Oleo
saniasrul2001@yahoo.com*

Abstrak

Salah satu faktor penting di dalam penyebaran HIV/AIDS adalah mobilitas individu dalam suatu populasi. Dalam tulisan ini diberikan beberapa model stokastik penyebaran HIV/AIDS pada populasi heteroseksual dengan asumsi populasi konstan dan tidak konstan. Selanjutnya, untuk setiap model stokastik tersebut diturunkan analog model deterministik dan model difusinya, dengan menggunakan teknik penskalaan. Dari model deterministik yang telah diperoleh dilakukan analisis kestabilan titik-titik ekuilibrium. Diilustrasikan secara numerik keakuratan pendekatan deterministik dari model stokastiknya melalui beberapa eksperimen numerik. Dengan menggunakan model deterministik tersebut, beberapa masalah kontrol optimal penyebaran HIV dalam populasi heteroseksual dengan mobilitas diturunkan. Masalah optimasi non linier dengan multi-modal ini diselesaikan dengan pendekatan metode Cross-Entropy dan selanjutnya ditunjukkan bagaimana strategi kontrol regional dapat diperoleh yang meminimumkan penyebaran HIV dalam skala nasional.

Kata Kunci: HIV/AIDS, Mobilitas, Model Stokastik, Model Deterministik, Teknik Penskalaan, Metode Cross-Entropy

KOMPUTASI NUMERIK DAN APLIKASINYA

Tulus

*Departemen Matematika, FMIPA USU, Medan 20155
tulus@usu.ac.id*

Abstract

Masalah nyata setiap waktu dihadapi oleh mahluk yang hidup di dunia ini. Telah banyak cara yang digunakan oleh manusia untuk menyelesaikan masalah tersebut. Sampai saat ini salah satu yang dilakukan para ilmuwan dalam menyelesaikan masalah adalah dengan terlebih membangun model matematika dari masalah tersebut dan kemudian menyelesaikannya baik secara analitik maupun secara numerik. Penyelesaian masalah secara numerik biasanya dilakukan apabila penyelesaian analitik sulit dilakukan, walaupun telah dijamin ada penyelesaiannya.

Tulisan ini memaparkan penyelesaian beberapa masalah di bidang mekanika, yaitu masalah dinamika fluida yang terjadi pada pembuluh darah yang mengalami beberapa level penyempitan, masalah dinamika fluida pada proses percampuran di dalam suatu reaktor berputar, dan masalah dinamika fluida pada suatu jaringan perpipaan. Untuk setiap masalah yang diperhatikan tersebut dibangun dan diperhatikan model matematika dalam bentuk persamaan penakluk dengan disertai syarat batas dan kemudian menyelesaikannya secara komputasi numerik.

Komputasi dilakukan menggunakan metode elemen hingga dengan memperhatikan masing-masingnya sebagai masalah dua dimensional axisimetrik, masalah tiga dimensional. Sifat-sifat material dari fluida yang diperhatikan, yaitu darah, campuran limbah dan juga gas, adalah viskositas dan berat jenis. Syarat batas yang diperhatikan adalah masukan (inlet), keluaran (outlet), dan dinding (wall). Mesh dibangun sesuai dengan bangun geometri dari domain yang diperhatikan. Untuk masalah dua dimensional axisimetrik digunakan elemen segi tiga, dan untuk masalah tiga dimensional digunakan elemen tetrahedron.

Hasil yang diperoleh terhadap komputasi masalah dari ketiga persoalan yang diperhatikan adalah distribusi tekanan dan kecepatan. Untuk masalah tekanan pembuluh darah yang mengalami penyempitan dihitung distribusi tekanan untuk level penyempitan yang bervariasi, yaitu 25%, 50% dan 75%. Hasil penghitungan menunjukkan adanya pengaruh level penyempitan terhadap distribusi tekanan di dalam pembuluh darah tersebut. Kemudian untuk masalah pengadukan campuran fluida di dalam tangki reaktor dilakukan pengadukan dengan bervariasi laju putar adukan, yaitu 10 rpm, 15 rpm, 20 rpm dan 25 rpm. Dari penghitungan diperoleh hasil bahwa distribusi shear rate di dalam tangki dipengaruhi oleh laju putar adukan. Terakhir untuk masalah aliran fluida di dalam jaringan pipa diperhatikan aliran dengan memvariasikan bentuk percabangan dan letak inlet dan outlet. Hasil penghitungan menunjukkan bahwa perbedaan bentuk percabangan dan letak inlet dan outlet mempengaruhi distribusi kecepatan alir dan tekanan di dalam pipa.

Daftar Pustaka

- [1] Zhang, S., D. Müller, H. Arellano-Garcia, and G. Wozny, CFD Simulation of the Fluid Hydrodynamics in a Continuous Stirred-Tank, Chemical Engineering Transactions, Vol 32, pp. 1441-1446, 2013.
- [2] Kumar, B., Energy Dissipation and Shear Rate with Geometry of Baffled Surface Aerator, Chemical Engineering Research Bulletin, Vol 14, pp. 92-96, 2010.
- [3] Pérez, J.A.S, E.M. Rodríguez Porcel, J.L. Casas López, J.M. Fernández Sevilla, Y. Chisti, Shear rate in stirred tank and bubble column bioreactors, Chemical Engineering Journal, Vol. 124, pp. 1–5, 2006
- [4] Safrit, B.T., G.E. Schlager and Ziang Li, Modeling and Simulation of Polymerization of Lactide to Polylactic Acid and Co-Polymers of Polylactic Acid using High Viscosity Kneader Reactors, 2013. [http://www.listdryprocessing.com/fileadmin/user_upload/download/publications/modeling-and-simulation-of-polymerization-of-lactide-to-poly-lactic.pdf.] Accessed: June 29, 2015.

- [5] Johnsen, M.S., Particle Transport and Hole Cleaning in Wells During Drilling, Master Thesis, University of Stavanger, 2014.
- [6] Vlaev, S., D. Georgiev, I. Nikov, M. Elqotbi, The CFD Approach for Shear Analysis of Mixing Reactor: Verification and Examples of Use, Journal of Engineering Science and Technology, Vol. 2, No. 2, pp. 177–187, 2007.
- [7] COMSOL, Laminar Flow in a Baffled Stirred Mixer, 2014. [https://www.comsol.it/shared/downloads/models/cfd_baffled_mixer.pdf]. Accessed: June 29, 2015.
- [8] Allaire, Paul E. 1985. Basic of the Finite Element Method: Solid Mechanics, Heat Transfer and Fluid Mechanics. Wm. C. Brown. USA.
- [9] Munson, Bruce R., Young, Donald F., and Okiishi, Theodore H. 2003. Mekanika Fluida: Edisi keempat. Penerbit Erlangga. Jakarta.

DETEKSI TABRAKAN OBJEK PADA DISTIBUTED VIRTUAL ENVIRONMENT

Elfizar

*Program Studi Sistem Informasi Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau
elfizar@lecturer.unri.ac.id*

Abstrak

Metode deteksi tabrakan objek merupakan bagian yang paling penting dalam aplikasi-aplikasi tiga dimensi (3D). Ditengah tingginya kuantitas dan kualitas penelitian tentang metode ini, namun implementasinya pada aplikasi Distributed Virtual Environment (DVE) cukup rendah. DVE yang ada saat ini banyak menggunakan metode deteksi tabrakan objek yang sederhana, yaitu Axis Aligned Bounding Box (AABB). Hal ini menyebabkan rendahnya kualitas (akurasi dan akselerasi) DVE yang dihasilkan untuk merepresentasikan suatu keadaan sebenarnya di dunia nyata (real-world).

Berdasarkan analisa yang dilakukan, Oriented Bounding Box (OBB) adalah metode yang tepat untuk digunakan pada DVE berdasarkan akurasi dan fleksibilitasnya dibandingkan dengan metode lainnya. Namun, tidak memungkinkan untuk langsung menggunakan OBB pada DVE karena kompleksitasnya. Oleh karena itu, implementasi OBB pada DVE dengan arsitektur simulator berbasis objek adalah suatu cara untuk mengurangi workload yang ada pada simulator.

Untuk mengimplementasikan metode baru tersebut pada DVE maka perlu dilakukan pengembangan DVE yang sesuai dengan kebutuhan. Tahap ini berisikan beberapa tahap pengembangan aplikasi, yaitu analisa, desain, coding program, dan uji aplikasi. Terdapat tiga parameter yang digunakan dalam evaluasi ini, yaitu missing, runtime, dan framerate.

Hasil eksperimen menunjukkan bahwa seluruh nilai parameter untuk OBB yang diterapkan pada DVE memiliki nilai yang lebih baik dibandingkan dengan AABB. Ini mengisyaratkan bahwa OBB layak menjadi metode deteksi tabrakan alternatif di DVE.

Kata Kunci : Aplikasi 3D, Deteksi tabrakan objek, Distributed virtual environment.

MENCARI GRAF AJAIB DAN ANTIAJAIB BERDASARKAN JARAK

*In memoriam Mirka Miller
(9 May 1949 – 2 January 2016)*

Rinovia Simanjuntak

*Kelompok Keahlian Matematika Kombinatorika
FMIPA Institut Teknologi Bandung
rino@math.itb.ac.id*

Abstrak

Pada tahun 2003, bersama dengan Mirka Miller dan Chris Rodger [1], kami memperkenalkan ulang suatu pelabelan graf yang mempertimbangkan tetangga setiap titik dalam penghitungan bobot titik tersebut. Pelabelan ini kemudian diperluas oleh O'Neal dan Slater [2] pada tahun 2011 untuk mempertimbangkan bukan hanya tetangga dari suatu titik, tetapi juga titik-titik (lain) yang berjarak tertentu dari titik tersebut.

Misalkan G adalah suatu graf dengan orde $|V(G)|$ dan diameter $\text{diam}(G)$. Untuk suatu himpunan jarak $D \subseteq \{1, 2, \dots, \text{diam}(G)\}$, graf G dikatakan D -ajaib berdasarkan jarak apabila terdapat bijeksi $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ dan konstanta k sehingga untuk setiap titik x , $\sum_{y \in N_D(x)} f(y) = k$, dengan $N_D(x) = \{y \in V(G) \mid d(x,y) \in D\}$. Di pihak lain, graf G dikatakan D -antiajaib berdasarkan jarak jika $\sum_{y \in N_D(x)} f(y) = k$ unik untuk setiap titik x .

Kami mendefinisikan graf jarak D dari suatu graf G , yang dinotasikan sebagai $\Delta D(G)$, sebagai graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $\{\{x,y\} \mid d_G(x,y) \in D\}$. Kami mengkonstruksi graf D -ajaib dan D -antiajaib berdasarkan jarak dengan menggunakan beberapa metoda, di antaranya dengan menggunakan spektrum dari graf G maupun spektrum dari graf $\Delta D(G)$.

Daftar Pustaka

- [1] M. Miller, C. Rodger, and R. Simanjuntak, Distance magic labelings of graphs, Australasian J. Combinat. 28 (2003) 305 - 315.
- [2] A. O'Neal and P. Slater, An introduction to distance D -magic graphs, J. Indones. Math. Soc. Special Edition (2011) 89-107.

NEW APPROACHES FOR PRODUCTION-INVENTORY-DISTRIBUTION ROUTING PROBLEM

Noor Hasnah Moin, Dicky Lim Teik Kyee

*Institute of Mathematical Sciences, Faculty University of Malaya,
50603 Kuala Lumpur, Malaysia.*

Abstract

The integrated Production, Inventory and Distribution Routing Problem (PIDRP) is modelled as a one-to-many distribution system, in which a single warehouse or production facility is responsible for restocking geographically dispersed customers whose demands are deterministic and time-varying. The demand can be satisfied from either inventory held at the customer sites or from daily production. A fleet of homogeneous capacitated vehicles for making the deliveries is also considered. Capacity constraints for the inventory are imposed at the production site and for each customer. The demand must be fulfilled on time, without delay. The first algorithm proposes a two-phase solution approach within a MatHeuristic framework. Phase I solves a mixed integer programming model which includes all the constraints in the original model except for the routing constraints. In phase 2, we propose a variable neighborhood search procedure (VNS) as the metaheuristics for solving the problem. Whilst the second algorithm starts with VNS procedure first and it iterates between mixed integer programming model and VNS. We improvised the algorithm by incorporating simulated annealing approach to increase the exploration of the solution space. Both algorithms are compared to Greedy Randomized Adaptative Search Procedure (GRASP) and Memetic Algorithm with Population Management (MA|PM) algorithm.

INFORMASI GEROMBOL UNTUK PENDUGAAN AREA KECIL NIRCONTOH (CLUSTER INFORMATION ON NON-SAMPLE SMALL AREA ESTIMATION)

Anang Kurnia, Rahma Anisa, Vinny Yuliani Sundara

*Departemen Statistika FMIPA IPB – Bogor
anangk@apps.ipb.ac.id*

Abstrak

EBLUP atau EB adalah metode yang banyak digunakan untuk memprediksi parameter pada area (sub-domain) dengan ukuran contoh kecil atau bahkan area nircontoh (non-sample area). Permasalahan yang terjadi adalah ketika model ini digunakan untuk memprediksi unit/parameter pada area nircontoh. EBLUP/EB baku akan memprediksi unit/parameter yang menjadi perhatian menggunakan model sintetis dengan mengabaikan pengaruh acak area karena pengaruh acak tersebut tidak bisa diduga pada area yang nircontoh. Dengan demikian seluruh nilai prediksi yang dihasilkan untuk area nircontoh akan terdistorsi pada satu garis model sintetis. Salah satu gagasan yang dikembangkan dalam paper ini adalah dengan menganggap bahwa terdapat kemiripan karakteristik antar-area tertentu dan hubungan antar-area tersebut dapat dianalisis dengan teknik penggerombolan (clustering). Informasi dari hasil penggerombolan ini ditambahkan ke dalam model untuk memodifikasi model EBLUP/EB baku baik pada intersep maupun kemiringan fungsi sintetis yang dibangun. Modifikasi ini dilakukan dengan menambahkan nilai tengah penduga pengaruh acak dari area dan perbedaan koefisien dugaan peubah penyerta (auxiliary variable) pada setiap kelompok yang dibangun. Pada paper ini, kebaikan model yang diusulkan dibandingkan dengan model EBLUP/EB baku dievaluasi berdasarkan nilai bias relatif dan akar kuadrat tengah galat relatif. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penambahan informasi gerombol dapat meningkatkan kebaikan model dalam memprediksi parameter pada area nircontoh. Di bagian akhir disampaikan ilustrasi praktis untuk menduga pengeluaran per-kapita serta tingkat kemiskinan di Kabupaten/Kota Bogor.

Kata kunci : pendugaan area kecil, informasi kelompok, nir-contoh, EBLUP/EB.

BERCERMIN DAN HASIL PISA MATEMATIKA DAN PIAAC NUMERACY: KASUS INDONESIA DAN SINGAPURA

Zulkardi¹, Berinderjeet Kaur²

¹Universitas Sriwijaya,

*²Department of Mathematics and Mathematics Education,
National Institute Of Education Singapore
berinderjeet.kaur@nie.edu.sg*

Abstrak

Makalah ini bertujuan untuk membandingkan hasil survey Internasional yang dilakukan oleh OECD yaitu PISA dan PIAAC. Dua Negara ASEAN dan bertetangga, Indonesia dan Singapura akan dilihat baik dari sudut pandang hasil pada bidang matematika atau numeracy dan usaha yang telah dan akan dilakukan oleh kedua negara untuk menyikapi hasil survey tersebut. PISA untuk anak usia 15 tahun hasil terakhirnya sedangkan PIAAC untuk orang dewasa pekerja usia 16-65 tahun. Selain itu juga akan didiskusikan apa dan bagaimana kita sebagai pendidik dan peneliti matematika bercermin dari hasil kedua survey tersebut untuk melakukan perubahan dalam rangka peningkatan mutu pendidikan anak Indonesia di masa yang akan datang? Terakhir, pendekatan pembelajaran matematika dikenal PMRI akan disampaikan dalam diskusi.

Kata Kunci: PISA, PIAAC, PMRI

SESI PARALEL

TINJAUAN TEORITIS Q-FUZZY QUASI-IDEAL DARI SEMIGRUP TERURUT

Noor Hidayat

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Brawijaya Malang
noorh@ub.ac.id

Abstrak

Dalam makalah ini dibahas tentang Q-fuzzy *quasi-ideal* dari semigrup terurut. Diperoleh hasil berupa syarat perlu dan cukup agar suatu himpunan bagian Q-fuzzy merupakan *quasi-ideal* dalam hal ini dikarakterisasi melalui himpunan *level subset* Q-fuzzy yang juga harus merupakan suatu *quasi-ideal*.

Kata Kunci: Q-fuzzy, *quasi-ideal*, *level subset*

1. Pendahuluan

Pada tahun 1965, Zadeh [14] pertama kali memperkenalkan suatu konsep himpunan fuzzy. Semenjak itu konsep himpunan fuzzy banyak dikembangkan para peneliti, baik dari sisi aplikasinya maupun sisi teoritisnya. Pengembangan aplikasinya dilakukan pada bidang teknik, ilmu sosial, teori grap, dan lain-lain. Salah satu pengembangan dari sisi teori, dilakukan oleh Rosenfeld [8] dengan membahas tentang subgroup fuzzy. Solairaju dan Nagarajan [12], pada tahun 2008, memperkenalkan suatu struktur baru yang dikenal dengan grup Q-fuzzy. Pengembangan konsep Q-fuzzy selanjutnya banyak dilakukan oleh para peneliti, sehingga dikenal beberapa struktur Q-fuzzy antara lain: semigrup Q-fuzzy, ring Q-fuzzy, near ring Q-fuzzy dan lain sebagainya [1,5,6,10].

Himpunan bagian Q-fuzzy (Q-fuzzy *subset*) pada suatu himpunan tak-kosong S didefinisikan sebagai suatu pemetaan dengan domain $S \times Q$ dan kodomain interval tertutup antara 0 dan 1 [1,5,6,7]. Dengan kata lain himpunan bagian Q-fuzzy merupakan hasil pengembangan dari himpunan bagian fuzzy dengan mengubah domainnya. Dalam makalah ini dilakukan pengembangan konsep Q-fuzzy *quasi-ideal* dari semigrup terurut yang merupakan pengembangan dari konsep *quasi-ideal* fuzzy yang telah dikembangkan oleh Tang dan Xie dalam [13]. Perubahan domain dari semigrup terurut S menjadi himpunan pasangan terurut $S \times Q$ untuk S semigrup terurut dan Q semigrup, merupakan kebaruan dari makalah ini. Selanjutnya Q-fuzzy *quasi-ideal* dikarakterisasi melalui himpunan *level subset* Q-fuzzy.

2. Notasi dan Konsep Dasar

Semigrup S adalah himpunan tak-kosong S yang dilengkapi operasi biner "*" yang memenuhi hukum asosiatif [4]. Semigrup S disebut semigrup terurut, jika S dilengkapi dengan relasi terurut secara parsial (*partially order relations*) " \leq " sedemikian sehingga $x \leq y \Rightarrow cx \leq cy, \forall c \in S$ dan selanjutnya dinotasikan dengan $(S, *, \leq)$ [4,13]. Himpunan tak kosong $P \subseteq S$ disebut subsemigrup jika $(P, *)$ merupakan semigrup ([2,7]). Ideal kanan dari semigrup terurut S , adalah suatu himpunan $I \neq \emptyset$ dimana $I \subseteq S$ dan memenuhi kondisi berikut:

$$IS \subseteq I \text{ dan } a, b \in I \ni b \leq a \Rightarrow b \in I$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$r * x \in I, \forall x \in S \text{ dan } a, b \in I \ni b \leq a \Rightarrow b \in I$$

Ideal kiri didefinisikan secara analog. Jika ideal kanan I juga merupakan ideal kiri, maka I disebut sebagai **ideal**. Dalam hal ini berlaku [9,13] $IS \cup SI \subseteq I$.

Misal S suatu semigrup terurut dan $T \subseteq S$. Himpunan T disebut: **prima**, jika $A, B \subseteq S, AB \subseteq T$ maka $A \subseteq T$ atau $B \subseteq T$ Hal ini ekuivalen dengan $a, b \in S, ab \in T \Rightarrow a \in T$ atau $b \in T$. T disebut **prima lemah** (*weakly prime*), jika untuk semua ideal A, B dari S sedemikian sehingga

$AB \subseteq T$, diperoleh $A \subseteq T$ atau $B \subseteq T$. Selanjutnya T disebut **semiprima** jika $A \subseteq S, A^2 \subseteq T$ maka $A \subseteq T$ atau ekuivalen dengan $a \in S, a^2 \in T \Rightarrow a \in T$. Pandang $H \subseteq S$ dan definisikan suatu himpunan $(H) = \{t \in S \mid t \leq h, \text{ untuk suatu } h \in H\}$. Selanjutnya definisikan suatu himpunan *quasi-ideal* dari S [3,13]. Pandang $I \subseteq S$ dengan I himpunan tak-kosong. I disebut **quasi-ideal** dari S jika 1) $(IS] \cap (SI) \subseteq I$ dan 2) $a \in I$ dan $b \in S, b \leq a \Rightarrow b \in I$. Dapat dibuktikan bahwa setiap ideal kiri (kanan) dari S merupakan *quasi ideal* dari S

Himpunan bagian fuzzy [14] dari himpunan X adalah suatu pemetaan f dengan domain X dan kodomain interval tertutup $[0,1]$. Semigrup terurut S sendiri merupakan himpunan bagian fuzzy dari S [13] sedemikian sehingga $S(x) = 1, \forall x \in S$. Misal f dan g dua buah himpunan bagian fuzzy dari semigrup terurut S . Didefinisikan relasi inklusi, irisan dan gabungan dari himpunan bagian fuzzy [13]:

$$\begin{aligned} f \subseteq g & \text{ didefinisikan dengan } f(x) \leq g(x), \forall x \in S. \\ (f \cap g)(x) &= \min\{f(x), g(x)\} = f(x) \wedge g(x), \forall x \in S \\ (f \cup g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\} = f(x) \vee g(x), \forall x \in S \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk $x \in S$ definsikan himpunan A_x sebagai berikut:

$$A_x = \{(x, y) \in S \times S \mid x \leq yz\}$$

dan *product* $f \circ g$ sebagai berikut:

$$(\forall x \in S)(f \circ g)(x) = \begin{cases} \bigvee_{(y,z) \in A_x} \min\{f(y), g(z)\} & \text{jika } A_x \neq \varnothing \\ 0 & \text{jika } A_x = \varnothing \end{cases}$$

Dapat ditunjukkan bahwa operasi " \circ " memenuhi hukum asosiatif. Untuk sembarang himpunan bagian A dari S definisikan fungsi karakteristik, sebagai berikut:

$$g_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in A \\ 0 & \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

Lema 2.1 [13]. Misal S semigrup terurut, dan Q himpunan tak-kosong dan $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ adalah himpunan bagian fuzzy dari S . Jika $\alpha_1 \subseteq \beta_1, \alpha_2 \subseteq \beta_2$, maka $\alpha_1 \circ \alpha_2 \subseteq \beta_1 \circ \beta_2$.

Suatu himpunan bagian fuzzy f dari S disebut **ideal kiri (kanan) fuzzy** [11,13] dari S jika $f(xy) \geq f(y)$ ($f(xy) \geq f(x)$), $\forall x, y \in S$ dan $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in S$. Hal itu ekuivalen dengan

$$S \circ f \subseteq f \quad (f \circ S \subseteq f) \text{ dan } x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y), \forall x, y \in S.$$

Himpunan bagian fuzzy f disebut **quasi-ideal fuzzy** [11,13] dari S jika $(f \circ S) \cap (S \circ f) \subseteq f$ dan $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in S$. Dapat dibuktikan bahwa setiap ideal kiri fuzzy dari S merupakan *quasi-ideal* fuzzy dari S . Didefinisikan himpunan berikut:

$$f_t = \{x \in S \mid f(x) \geq t\}, t \in [0,1]$$

dan selanjutnya disebut sebagai **level subset** dari f .

Lema 2.2 berikut ini menunjukkan syarat perlu dan cukup agar suatu himpunan bagian dari S merupakan *quasy ideal*. Sedangkan Teorema 2.3 merupakan syarat perlu dan cukup agar suatu himpunan bagian fuzzy merupakan *quasy ideal*.

Lema 2.2 [13] Misal $I \subseteq S$ dan I himpunan tak-kosong. Himpunan I merupakan *quasy ideal* dari S jika dan hanya jika fungsi karakteristik dari I merupakan *quasy ideal* fuzzy dari S .

Teorema 2.3 [11,13]. Misal S semigrup terurut dan f suatu himpunan bagian fuzzy dari S . f merupakan *quasy ideal* dari S jika dan hanya jika f_t himpunan tak-kosong dan merupakan *quasy ideal* dari S .

Pandang semigrup terurut $(S, +, \leq)$ dan Q himpunan tak-kosong. **Himpunan bagian Q-fuzzy** α didefinisikan [6] sebagai suatu pemetaan dengan domain $S \times Q$ dan kodomain berupa interval tertutup $[0,1]$. Dalam notasi fungsi ditulis sebagai $\alpha: S \times Q \rightarrow [0,1]$. Relasi inklusi, irisan, gabungan dan *dot product* pada himpunan bagian Q-fuzzy didefinisikan secara analog sebagaimana di atas, yaitu [5,6]

- a) Relasi inklusi $\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha(x, q) \leq \beta(x, q), \forall x \in S, \forall q \in Q.$
b) Relasi irisan $\alpha \cap \beta = \min\{\alpha(x, q), \beta(x, q)\} = \alpha(x, q) \wedge \beta(x, q), \forall x \in S, \forall q \in Q.$
c) Relasi gabungan $\alpha \cup \beta = \max\{\alpha(x, q), \beta(x, q)\} = \alpha(x, q) \vee \beta(x, q), \forall x \in S, \forall q \in Q.$
d) *dot product* $(\forall(x, q) \in S \times Q)(\alpha \circ \beta)(x, q) = \begin{cases} \vee \min\{\alpha(y, q), \beta(z, q)\} & \text{jika } A_x \neq \varnothing \\ (y, z) \in A_x & \\ 0 & \text{jika } A_x = \varnothing \end{cases}$

Selanjutnya di bawah ini didefinisikan [5,6,13] beberapa terminology, diantaranya himpunan Q-level subset, fungsi karakteristik, ideal kanan (kiri) Q-fuzzy dan Q-fuzzy quasi-ideal. Himpunan Q-level subset, dinotasikan dengan α_t^Q dan didefinisikan sebagai

$$\alpha_t^Q = \{(x, q) \in S \times Q \mid \alpha(x, q) \geq t\}, t \in [0,1].$$

Untuk sembarang himpunan bagian $A \times Q \subseteq S \times Q$ didefinisikan **fungsi karakteristik** dari $A \times Q$ sebagai berikut:

$$\alpha_{A \times Q}(x, q) = \begin{cases} 1 & \text{jika } (x, q) \in A \times Q \\ 0 & \text{jika } (x, q) \notin A \times Q \end{cases}$$

Suatu himpunan bagian Q-fuzzy α dari S disebut [5,6] **ideal kanan (kiri) Q-fuzzy** dari S jika

- 1) $x \leq y \Rightarrow \alpha(x, q) \geq \alpha(y, q).$
- 2) $\alpha(xy, q) \geq \alpha(x, q) \wedge \alpha(y, q), \forall x, y \in S, \forall q \in Q$

Himpunan bagian Q-fuzzy α dari S disebut [5,6] **ideal Q-fuzzy** dari S jika

- 1) $x \leq y \Rightarrow \alpha(x, q) \geq \alpha(y, q).$
- 2) $\alpha(xy, q) \geq \alpha(x, q) \vee \alpha(y, q), \forall x, y \in S, \forall q \in Q.$

Himpunan bagian Q-fuzzy α dari S disebut [5] Q-fuzzy **quasi-ideal** dari S jika

- 1) $x \leq y \Rightarrow \alpha(x, q) \geq \alpha(y, q).$
- 2) $(\alpha \circ S) \cap (S \circ \alpha) \subseteq \alpha, \forall x, y \in S, \forall q \in Q.$

Teorema 2.4 [5] : Jika S suatu grupoid terurut dan Q himpunan tak-kosong, maka ideal kanan Q-fuzzy (kiri) adalah Q-fuzzy *quasi-ideal* dari S.

Teorema 2.5 [5]. Misal S semigrup terurut dan Q himpunan tak-kosong. Himpunan bagian Q-fuzzy α dari S merupakan Q-fuzzy *quasi-ideal* dari S jika dan hanya jika terdapat suatu ideal kanan Q-fuzzy β dan ideal kiri Q-fuzzy γ dari S sedemikian sehingga $\gamma = \alpha \cap \beta$

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan diuraikan tentang beberapa sifat atau karakteristik dari himpunan bagian Q-fuzzy dan Q-fuzzy *quasi-ideal*. Adapun definisi tentang Q-fuzzy *quasi-ideal* berdasarkan pada Definisi dari Lekkoksung [5]. Sifat pertama sebagaimana tertera pada Lema 3.1, menunjukkan bahwa product dari dua buah himpunan bagian Q-fuzzy mempertahankan sifat himpunan bagian dari Q-fuzzy. Sifat berikutnya sebagaimana Teorema 3.2, menunjukkan tentang syarat perlu dan cukup dari suatu himpunan bagian Q-fuzzy agar menjadi Q-fuzzy *quasi-ideal* yang dikarakterisasi menggunakan himpunan *level subset*.

Lema 3.1 Misal S semigrup terurut, Q himpunan tak-kosong dan $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ adalah himpunan bagian Q-fuzzy dari S. Jika $\alpha_1 \subseteq \beta_1, \alpha_2 \subseteq \beta_2$, maka $\alpha_1 \circ \alpha_2 \subseteq \beta_1 \circ \beta_2$.

Bukti. Karena $\alpha_1 \subseteq \beta_1, \alpha_2 \subseteq \beta_2$, maka berlaku

$$\alpha_1(x, q) \leq \beta_1(x, q), \alpha_2(x, q) \leq \beta_2(x, q), \forall(x, q) \in S \times Q.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)(x, q) \leq \beta_1 \circ \beta_2, \forall(x, q) \in S \times Q.$$

Ambil sembarang $(x, q) \in S \times Q$

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)(x, q) = \min\{\alpha_1(y, q), \alpha_2(z, q)\}, \forall(y, z) \in A_x$$

$$(\beta_1 \circ \beta_2)(x, q) = \min\{\beta_1(y, q), \beta_2(z, q)\}, \forall (y, z) \in A_x$$

- Kasus 1 Misal $\min\{\alpha_1(y, q), \alpha_2(z, q)\} = \alpha_1(y, q)$ dan $\min\{\beta_1(y, q), \beta_2(z, q)\} = \beta_1(y, q)$. Jelas bahwa $\alpha_1 \circ \alpha_2 \subseteq \beta_1 \circ \beta_2$.
- Kasus 2 Misal $\min\{\alpha_1(y, q), \alpha_2(z, q)\} = \alpha_2(z, q)$ dan $\min\{\beta_1(y, q), \beta_2(z, q)\} = \beta_1(y, q)$, dalam hal ini $\alpha_2(z, q) \leq \alpha_1(y, q)$ dan $\beta_1(y, q) \leq \beta_2(z, q)$. Diperoleh bahwa $\alpha_2(z, q) \leq \alpha_1(y, q) \leq \beta_1(y, q) \leq \beta_2(z, q)$, sehingga $\alpha_1 \circ \alpha_2 \subseteq \beta_1 \circ \beta_2$.
- Kasus 3 Misal $\min\{\alpha_1(y, q), \alpha_2(z, q)\} = \alpha_1(y, q)$ dan $\min\{\beta_1(y, q), \beta_2(z, q)\} = \beta_2(z, q)$ dalam hal ini $\alpha_1(y, q) \leq \alpha_2(z, q)$ dan $\beta_2(z, q) \leq \beta_1(y, q)$. Diperoleh bahwa $\alpha_1(y, q) \leq \alpha_2(z, q) \leq \beta_2(z, q) \leq \beta_1(y, q)$, sehingga $\alpha_1 \circ \alpha_2 \subseteq \beta_1 \circ \beta_2$.
- Jadi terbukti Jika $\alpha_1 \subseteq \beta_1, \alpha_2 \subseteq \beta_2$, maka $\alpha_1 \circ \alpha_2 \subseteq \beta_1 \circ \beta_2$. \square

Untuk $H \subseteq S$ dan Q semigrup, didefinisikan himpunan berikut:

$$\alpha_t^Q(H \times Q) = \{(x, q)(s, q_1) \mid (x, q) \in \alpha_t^Q, (s, q_1) \in H \times Q\}$$

Dimana $(x, q)(s, q_1) = (xs, qq_1)$. Jelas $xs \in S, qq_1 \in Q$ sehingga $\alpha_t^Q(H \times Q) \subseteq S \times Q$. Selanjutnya didefinisikan juga himpunan berikut:

$$(H \times Q] = \{(s, q) \in S \times Q \mid s \leq h, \text{ untuk suatu } h \in H\}$$

dan

$$(\alpha_t^Q(S \times Q]) = \{(x, q) \in S \times Q \mid x \leq ap, \text{ untuk suatu } (a, q_1)(p, q_2) \in \alpha_t^Q(S \times Q)\}$$

Teorema 3.2 Misal S semigrup terurut, Q semigrup, dan α himpunan bagian Q -fuzzy dari S . α merupakan Q -fuzzy *quasi-ideal* jika dan hanya jika semua *level subset* Q -fuzzy tak-kosong merupakan *quasi-ideal* dari S .

Bukti. (\Rightarrow) Diketahui α adalah *quasi-ideal* Q -fuzzy dari S dan $t \in [0, 1]$ sedemikian sehingga α_t^Q himpunan tak-kosong. Akan ditunjukkan bahwa α_t^Q adalah *quasi-ideal* dari S . Ambil sembarang $(x, q) \in S \times Q$ sedemikian sehingga $(x, q) \in (\alpha_t^Q(S \times Q]) \cap ((S \times Q)\alpha_t^Q]$. Akan ditunjukkan bahwa $(x, q) \in \alpha_t^Q$. Karena

$$(x, q) \in (\alpha_t^Q(S \times Q]) \cap ((S \times Q)\alpha_t^Q]$$

maka diperoleh bahwa

$$(x, q) \in (\alpha_t^Q(S \times Q]) \text{ dan } (x, q) \in ((S \times Q)\alpha_t^Q]$$

Karena $(x, q) \in (\alpha_t^Q(S \times Q])$ maka $x \leq yz$ untuk suatu y, z sedemikian sehingga

$$(y, q_1)(z, q_2) \in \alpha_t^Q(S \times Q).$$

Berikutnya, karena $(x, q) \in ((S \times Q)\alpha_t^Q]$ maka $x \leq y_1z_1$ untuk suatu y_1, z_1 sedemikian sehingga

$$(y_1, q_3)(z_1, q_4) \in (S \times Q)\alpha_t^Q.$$

Dengan demikian diperoleh bahwa $x \leq yz, x \leq y_1z_1$ untuk suatu y, y_1, z, z_1 sedemikian sehingga $(y, q_1), (z_1, q_4) \in \alpha_t^Q$ dan $(z, q_2), (y_1, q_3) \in S \times Q$. Hal ini menunjukkan bahwa $(y, z), (y_1, z_1) \in A_x$.

Karena diketahui α merupakan Q -fuzzy *quasi-ideal* dari S , maka $(\alpha \circ S) \cap (S \circ \alpha) \subseteq \alpha$. atau

$$\alpha(x, q) \geq ((\alpha \circ S) \cap (S \circ \alpha))(x, q) = \min\{(\alpha \circ S)(x, q), (S \circ \alpha)(x, q)\}, \forall (x, q) \in S \times Q.$$

Sekarang pandang

$$(\alpha \circ S)(x, q) = \bigvee_{(a, p) \in A_x} (\min\{\alpha(a, q), S(p, q)\})$$

dan

$$(S \circ \alpha)(x, q) = \bigvee_{(b, c) \in A_x} (\min\{S(b, q), \alpha(c, q)\}).$$

Tetapi

$$\bigvee_{(a,p) \in A_x} (\min\{\alpha(a,q), S(p,q)\}) \geq \min\{\alpha(y,q), S(z,q)\}$$

dan

$$\bigvee_{(b,c) \in A_x} (\min\{S(b,q), \alpha(c,q)\}) \geq \min\{S(y_1,q), \alpha(z_1,q)\}$$

sehingga

$$\alpha(x,q) \geq \min\{(\alpha \circ S)(x,q), (S \circ \alpha)(x,q)\} \geq \min\{\min\{\alpha(y,q), S(z,q)\}, \min\{S(y_1,q), \alpha(z_1,q)\}\} \geq \min\{\min\{\alpha(y,q), 1\}, \min\{1, \alpha(z_1,q)\}\} = \min\{\alpha(y,q), \alpha(z_1,q)\}$$

Karena $(y, q_1), (z_1, q_4) \in \alpha_t^Q$, maka diperoleh bahwa $\alpha(y, q_1) \geq t$ dan $\alpha(z_1, q_4) \geq t$. Dengan demikian $\alpha(x, q) \geq \min\{\alpha(y, q), \alpha(z_1, q)\} \geq t$ atau dengan kata lain $(x, q) \in \alpha_t^Q, \forall (x, q)$. Jadi terbukti bahwa

$$(\alpha_t^Q(S \times Q)] \cap ((S \times Q)\alpha_t^Q] \subseteq \alpha_t^Q$$

Sekarang ambil sembarang $(x, q) \in \alpha_t^Q(S \times Q)$ sedemikian sehingga $y \leq x$. Akan ditunjukkan bahwa $(y, q) \in \alpha_t^Q$. Karena $(x, q) \in \alpha_t^Q$, maka $\alpha(x, q) \geq t$. Sementara itu α merupakan quasi-ideal Q-fuzzy dari $S \times Q$, sehingga berlaku: $\alpha(x, q) \geq \alpha(y, q) \geq t$ yang berarti $(y, q) \in \alpha_t^Q$. Berdasarkan uraian ini diperoleh bahwa α_t^Q merupakan quasi-ideal dari $S \times Q$.

(\Leftrightarrow) Diketahui bahwa α_t^Q merupakan quasi-ideal dari $S \times Q$. Akan ditunjukkan bahwa α merupakan quasi-ideal Q-fuzzy, dalam hal ini 2 hal berikut dipenuhi: i) $(\alpha \circ S) \cap (S \circ \alpha) \subseteq \alpha$ dan ii) jika $x \leq y$ maka $\alpha(x, y) \geq \alpha(y, q), \forall x, y \in S, \forall q \in Q$. Ambil sembarang $(x, q) \in S \times Q$. Andaikan $\alpha(x, q) \leq ((\alpha \circ S) \cap (S \circ \alpha))(x, q)$. Hal ini berarti terdapat suatu $t \in (0, 1)$ sedemikian sehingga

$$\alpha(x, q) < t < ((\alpha \circ S) \cap (S \circ \alpha))(x, q) = \min\{(\alpha \circ S)(x, q), (S \circ \alpha)(x, q)\}$$

Hal ini menunjukkan bahwa

$$(\alpha \circ S)(x, q) > t \text{ dan } (S \circ \alpha)(x, q) > t.$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \bigvee_{(p,h) \in A_x^Q} (\min\{\alpha(p,q), S(h,q)\}) &> t \\ \bigvee_{(p,h) \in A_x^Q} (\min\{S(p,q), \alpha(h,q)\}) &> t \end{aligned}$$

sehingga mengakibatkan bahwa terdapat $a, b, c, d \in S, (a, b), (c, d) \in A_x$ sedemikian sehingga $\alpha(a, q) > t, \alpha(c, q) > t$. Hal ini menunjukkan bahwa

$$(a, q) \in \alpha_t^Q \text{ dan } (c, q) \in \alpha_t^Q.$$

Dengan demikian $(a, q)(b, q_1) \in \alpha_t^Q(S \times Q)$ dan $(d, q_2)(c, q_3) \in (S \times Q)\alpha_t^Q$, sehingga $(x, q) \in (\alpha_t^Q(S \times Q)]$ dan $(x, q) \in ((S \times Q)\alpha_t^Q]$. Jadi diperoleh bahwa

$$(x, q) \in (\alpha_t^Q(S \times Q)] \cap ((S \times Q)\alpha_t^Q] \subseteq \alpha_t^Q,$$

sehingga $(x, q) \in \alpha_t^Q$ yang menunjukkan bahwa $\alpha(x, q) \geq t$. Jelas hal ini bertentangan, sehingga haruslah $(\alpha \circ S) \cap (S \circ \alpha) \subseteq \alpha$. Selanjutnya, misal $(x, q), (y, q) \in S \times Q$. Jika $x \leq y$, maka $\alpha(x, q) \geq \alpha(y, q)$. Sekarang misalkan $\lambda = \alpha(y, q)$, didapat bahwa $(y, q) \in \alpha_\lambda$. Karena α_λ quasi-ideal dari $S \times Q$, maka $(x, q) \in \alpha_\lambda$. Jadi $\alpha(x, q) \geq \lambda = \alpha(y, q)$. Oleh karena itu α adalah suatu Q-fuzzy quasi-ideal.

Daftar Pustaka

- [1] Bhimraj, G. and Barthakur, G.K., (2014), On Q-Fuzzy Ideal and Q-Fuzzy Quotient Near-Rings, *Research Journal of Mathematical and Statistical Sciences*, Vol. 2(7)
- [2] Harju, T., Lecture Notes on Semigroups, <https://pdfs.semanticscholar.org/3193/9dfde70be855c8919462216c0801b5d4a8de.pdf>, akses 30-01-2017, 6:10 AM.
- [3] Kehayopulu, N., Tsingelis, (2006), M., Regular ordered semigroups in terms of fuzzy subsets, *Information Sciences* 176, 3675–3693
- [4] Lallement, G., (1979), *Semigroups and Combinatorial Applications*, John Wiley & Sons, Inc, USA.

- [5] Lekkoksung, S., (2014), On Q-Fuzzy Ideals in Ordered Semigroups, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volume 92, No. 3, pp 369 – 379.
- [6] Lekkoksung, S., (2012), 3-Prime Q-Fuzzy Ideals of Ordered Semigroups, *International Mathematical Forum*, Vol 7, No. 12, PP 591 – 595.
- [7] Pratiwi, Y.D., (2012), Produk Cartesius Semigrup Smarandache, *Jurnal Matematika* Vol. 2 No. 2, Desember. ISSN : 1693 – 1394.
- [8] Rosenfeld, A., (1971), Fuzzy Groups, *Journal of Mathematical Analysis and Application* 35, pp 512 – 517.
- [9] Saito, T., (1963), Regular Elements In An Ordered Semigroup, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 13 No. 1.
- [10] Sarangapani, P. and Muruganatham, P., (2016), Q-Fuzzy Version of (λ, μ) –Fuzzy Ideals Via Near Ring, *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, Volume 30 Number 1.
- [11] Shabir, M. and Khan, A., (2011), Fuzzy Quasi-Ideal of Ordered Semigroups, *Bulletin of Malaysian Mathematical Sciences Society* (2) 34(1), pp. 87 – 102.
- [12] Solairaju, A. and Nagarayan, R., (2009), A New Structure and Construction of Q-Fuzzy Groups, *Advances in Fuzzy Mathematics*, Volume 4, Number 1, pp 23 – 29.
- [13] Tang, J. and Xie, X., (2012), On Fuzzy Quasi-Ideals of Ordered Semigroup, *Journal of Mathematical Research with Applications*, Vol. 32 No.5, 589 – 598.
- [14] Zadeh, L.A., (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338 – 353.

KONSTRUKSI TOPOLOGI PADA MODUL VALUASI MENGUNAKAN FUNGSI VALUASI DI MODUL

Sri Efrinita Irwan¹, Hanni Garminia², Pudji Astuti³

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesa No. 10, Bandung 40132, Indonesia

sri.efrinita@students.itb.ac.id, garminia@math.itb.ac.id, pudji@math.itb.ac.id

Abstrak

Artikel ini mengkaji konstruksi topologi pada suatu modul valuasi sebagai generalisasi dari kajian serupa di area gelanggang. Ditunjukkan bahwa topologi tersebut diinduksi oleh fungsi valuasi pada modul hasil baginya.

Kata kunci: Gelanggang Valuasi, Modul Valuasi, Fungsi Valuasi, Topologi

1. Pendahuluan

Konsep modul valuasi muncul sebagai generalisasi dari konsep gelanggang valuasi. Konsep gelanggang valuasi pertama kali diperkenalkan oleh Krull [3] pada tahun 1932 melalui keberadaan unsur tak nol atau balikkannya, dari suatu lapangan hasil bagi dari gelanggang tersebut. Selain konsep gelanggang valuasi, Krull [3] juga telah memperkenalkan konsep valuasi, yaitu suatu fungsi yang memberikan ukuran terhadap unsur-unsur suatu lapangan. Terkait dengan adanya suatu valuasi di lapangan, dapat dikonstruksi suatu subgelanggang dari lapangan tersebut yang membentuk gelanggang valuasi. Sebaliknya, Atiyah dan Macdonald [1] mengemukakan bahwa selalu dapat didefinisikan suatu valuasi pada lapangan hasil bagi dari suatu gelanggang valuasi.

Sejalan dengan perkembangan bidang aljabar, istilah valuasi juga telah diperkenalkan di area ruang vektor. Di lain pihak, terdapat hubungan antara suatu modul bebas torsi dengan modul hasil baginya yang dapat dipandang sebagai suatu ruang vektor. Lebih jauh, Irwan, Garminia, dan Astuti [2] mengemukakan bahwa ada keterkaitan antara konsep modul valuasi dengan konsep valuasi di ruang vektor. Sifat ini merupakan generalisasi dari keterkaitan antara konsep gelanggang valuasi dengan konsep valuasi di lapangan.

Krylov dan Tuganbaev [4] mengemukakan bahwa dapat didefinisikan suatu topologi pada suatu gelanggang valuasi terkait dengan adanya valuasi pada lapangan hasil bagi dari gelanggang tersebut. Artikel ini bertujuan untuk mengkaji generalisasi sifat tersebut ke area modul. Khususnya akan ditunjukkan bahwa pada modul valuasi dapat dikonstruksi suatu topologi yang diinduksi oleh valuasi pada modul hasil baginya. Lebih jauh, akan ditunjukkan bahwa setiap modul valuasi merupakan suatu modul topologi.

2. Ruang Topologi dan Fungsi Kontinu

Pada bagian ini akan diulas beberapa istilah dan hasil yang berkaitan dengan ruang topologi dan fungsi kontinu yang diperkenalkan oleh Munkres [6].

Definisi 2.1 Suatu topologi pada himpunan X adalah suatu koleksi \mathcal{T} dari subhimpunan-subhimpunan X yang memenuhi:

1. \emptyset dan X ada di \mathcal{T} .
2. Gabungan dari unsur-unsur dari sebarang subkoleksi dari \mathcal{T} ada di \mathcal{T} .
3. Irisan dari unsur-unsur dari sebarang subkoleksi hingga dari \mathcal{T} ada di \mathcal{T} .

Suatu himpunan X bersama dengan topologi \mathcal{T} yang dinotasikan (X, \mathcal{T}) disebut ruang topologi. Lebih jauh, $U \subseteq X$ dikatakan himpunan terbuka di X jika $U \in \mathcal{T}$.

Definisi 2.2 Suatu basis bagi suatu topologi pada himpunan X adalah suatu koleksi \mathcal{B} dari subhimpunan-subhimpunan dari X yang memenuhi:

1. Untuk setiap $x \in X$, terdapat paling sedikit satu $B \in \mathcal{B}$ sehingga $x \in B$.
2. Misalkan $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Jika $x \in B_1 \cap B_2$ maka terdapat $B_3 \in \mathcal{B}$ sehingga $x \in B_3$ dan $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Lema 2.3 Jika \mathcal{B} adalah basis bagi suatu topologi \mathcal{T} pada himpunan X , maka $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$.

Teorema 2.4 Jika \mathcal{B} adalah basis bagi topologi pada himpunan X dan \mathcal{C} adalah basis bagi topologi pada himpunan Y , maka koleksi

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ dan } C \in \mathcal{C}\}$$

adalah basis bagi topologi pada $X \times Y$.

Definisi 2.5 Misalkan (X, \mathcal{T}_1) dan (Y, \mathcal{T}_2) adalah ruang topologi. Suatu fungsi $f: X \rightarrow Y$ dikatakan kontinu jika untuk setiap subhimpunan terbuka U dari Y , himpunan $f^{-1}(U)$ merupakan subhimpunan terbuka dari X .

Terkait dengan konsep kekontinuan fungsi di atas, Zariski dan Samuel [8] mengemukakan konsep gelanggang topologi dan modul topologi sebagai berikut.

Definisi 2.6 Misalkan R suatu gelanggang dan (R, \mathcal{S}) suatu ruang topologi. Gelanggang R dikatakan gelanggang topologi jika operasi penjumlahan dan perkalian di R kontinu.

Definisi 2.7 Misalkan R suatu gelanggang topologi dan M suatu R -modul dengan (M, \mathcal{T}) suatu ruang topologi. Modul M dikatakan modul topologi jika pemetaan $(m, n) \mapsto m + n$ dari $M \times M$ ke M dan pemetaan $(r, m) \mapsto rm$ dari $R \times M$ ke M kontinu.

3. Gelanggang dan Modul Valuasi

Suatu subgelanggang R dari lapangan K disebut gelanggang valuasi dari K jika untuk setiap $\alpha \in K$ dengan $\alpha \neq 0$ berlaku α atau α^{-1} anggota R . Konsep gelanggang valuasi terkait dengan konsep fungsi valuasi di lapangan. Misalkan K suatu lapangan dan Γ suatu grup komutatif terhadap operasi penjumlahan dengan unsur-unsur yang terurut total. Misalkan pula Γ diperluas menjadi $\Gamma \cup \{\infty\}$ dengan aturan $\gamma \leq \infty$ dan $\gamma + \infty = \infty = \infty + \gamma$ untuk setiap $\gamma \in \Gamma$. Suatu valuasi di K adalah suatu pemetaan $v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ yang memenuhi aturan bahwa:

$$\begin{aligned} v(a) &= \infty \text{ jika dan hanya jika } a = 0, \\ v(ab) &= v(a) + v(b) \text{ untuk setiap } a, b \in K, \text{ dan} \\ v(a + b) &\geq \min\{v(a), v(b)\} \text{ untuk setiap } a, b \in K. \end{aligned}$$

Terkait dengan adanya suatu valuasi v di lapangan K , dapat dikonstruksi suatu subgelanggang $R_v = \{a \in K \mid v(a) \geq 0\}$ dari K yang membentuk gelanggang valuasi dan disebut gelanggang valuasi yang diinduksi oleh v . Sebaliknya, Atiyah dan Macdonald [1] mengemukakan bahwa jika diberikan suatu gelanggang valuasi R dari lapangan K , maka terdapat suatu valuasi v di K sehingga $R = R_v$ adalah gelanggang valuasi dari K yang diinduksi oleh v .

Konsep gelanggang valuasi telah digeneralisasi ke area modul. Konsep modul valuasi dikemukakan oleh Moghaderi dan Nekooei [5] pada tahun 2010. Misalkan R suatu daerah integral dengan lapangan hasil bagi K dan M suatu R -modul bebas torsi. Modul M disebut modul valuasi jika untuk setiap $a \in K$ dengan $a \neq 0$ berlaku $aM \subseteq M$ atau $a^{-1}M \subseteq M$.

Konsep valuasi di lapangan juga telah di generalisasi ke ruang vektor. Irwan, Garminia, dan Astuti [2] memperkenalkan konsep valuasi di ruang vektor sebagai berikut. Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan K dan $v: K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ suatu valuasi di K . Suatu pemetaan $\mu: V \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ disebut valuasi di V jika berlaku:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \infty \text{ jika dan hanya jika } x = 0, \\ \mu(ax) &= v(a) + \mu(x) \text{ untuk setiap } a \in K, x \in V, \text{ dan} \\ \mu(x + y) &\geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \text{ untuk setiap } x, y \in V. \end{aligned}$$

Di lain pihak, terdapat hubungan antara suatu R -modul bebas torsi M dengan modul hasil bagi ${}_T M$ yang dapat dipandang sebagai ruang vektor atas lapangan hasil bagi K , dengan R suatu daerah integral dan $T = R \setminus \{0\}$. Lebih jauh, Irwan, Garminia, dan Astuti [2] mengemukakan bahwa ada keterkaitan antara konsep modul valuasi dengan konsep valuasi di ruang vektor. Misalkan μ suatu valuasi di ruang vektor V atas lapangan K , maka dapat dikonstruksi suatu subhimpunan $M_\mu = \{x \in V \mid \mu(x) \geq 0\}$ dari V yang membentuk modul valuasi dan disebut modul valuasi yang diinduksi oleh μ . Sebaliknya, misalkan M adalah suatu R -modul valuasi dan K adalah lapangan hasil bagi dari R . Misalkan pula ν adalah suatu valuasi di K dengan R_ν adalah subgelanggang terbesar dari K sehingga M merupakan suatu R_ν -modul. Jika Γ diperluas menjadi completion-nya dan $\bigcap_{a \in R_\nu \setminus \{0\}} aM = \{0\}$, maka terdapat suatu valuasi μ di ${}_T M$ sehingga $M = M_\mu$ adalah modul valuasi yang diinduksi oleh μ . Eksistensi completion dari Γ dijamin oleh Steinberg [7].

4. Konstruksi Topologi Pada Modul Valuasi

Pada bagian ini, R menyatakan daerah valuasi yang diinduksi oleh valuasi $\nu : K \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ dan M suatu R -modul valuasi. Modul M diasumsikan memenuhi $\bigcap_{a \in R \setminus \{0\}} aM = \{0\}$ dan merupakan modul valuasi yang diinduksi oleh valuasi $\mu : {}_T M \rightarrow \bar{\Gamma} \cup \{\infty\}$ dengan $T = R \setminus \{0\}$ dan $\bar{\Gamma}$ adalah completion dari Γ .

Teorema 4.1 Dapat dikonstruksi suatu topologi pada suatu modul valuasi yang diinduksi oleh valuasi pada modul hasil baginya.

Bukti: Untuk setiap $\gamma \in \bar{\Gamma}$ dengan $\gamma \geq 0$, definisikan $M_\gamma = \{m \in M \mid \mu(m) \geq \gamma\}$. Dapat ditunjukkan bahwa M_γ merupakan submodul dari M . Selanjutnya, definisikan $\mathcal{B} = \{x + M_\gamma \mid x \in M, \gamma \in \bar{\Gamma}, \gamma \geq 0\}$. Akan ditunjukkan bahwa \mathcal{B} merupakan basis bagi suatu topologi \mathcal{T} di M .

Karena M_γ merupakan submodul dari M maka jelas bahwa untuk setiap $m \in M$ terdapat $B = m + M_\gamma$ sehingga $m \in B$. Selanjutnya, misalkan $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ dan $m \in B_1 \cap B_2$. Akan ditunjukkan terdapat $B_3 \in \mathcal{B}$ sehingga $m \in B_3$ dan $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Tulis $B_1 = m_1 + M_{\gamma_1}$ dan $B_2 = m_2 + M_{\gamma_2}$ untuk suatu $m_1, m_2 \in M$ dan $\gamma_1, \gamma_2 \in \bar{\Gamma}$ dengan $\gamma_1 \geq 0$ dan $\gamma_2 \geq 0$. Karena $m \in B_1 \cap B_2$ diperoleh $m - m_1 \in M_{\gamma_1}$ dan $m - m_2 \in M_{\gamma_2}$ sehingga $\mu(m - m_1) \geq \gamma_1$ dan $\mu(m - m_2) \geq \gamma_2$. Karena $\bar{\Gamma}$ merupakan grup yang terurut total, tanpa mengurangi keumuman, asumsikan $\gamma_1 \leq \gamma_2$.

Selanjutnya, pilih $B_3 = m + M_{\gamma_2}$. Jelas bahwa $m \in B_3$. Untuk sebarang $n \in B_3$ diperoleh $n - m \in M_{\gamma_2}$ sehingga $\mu(n - m) \geq \gamma_2$. Akibatnya

$$\mu(n - m_1) = \mu((n - m) + (m - m_1)) \geq \min\{\mu(n - m), \mu(m - m_1)\} \geq \gamma_1$$

dan

$$\mu(n - m_2) = \mu((n - m) + (m - m_2)) \geq \min\{\mu(n - m), \mu(m - m_2)\} \geq \gamma_2.$$

Dengan demikian, diperoleh $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Berdasarkan Definisi 2.2. dapat disimpulkan bahwa \mathcal{B} merupakan basis bagi suatu topologi \mathcal{T} di M . Lebih jauh, berdasarkan Lema 2.3. diperoleh bahwa $\mathcal{T} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$ merupakan suatu topologi di M . ■

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa setiap modul valuasi merupakan modul topologi.

Teorema 4.2 Setiap modul valuasi merupakan modul topologi.

Bukti: Misalkan $R_\gamma = \{r \in R \mid \nu(r) \geq \gamma\}$. Dapat ditunjukkan bahwa (R, \mathcal{S}) merupakan suatu ruang topologi dengan $\mathcal{A} = \{a + R_\gamma \mid a \in R, \gamma \in \Gamma, \gamma \geq 0\}$ sebagai basis bagi topologi \mathcal{S} di R . Lebih jauh, R merupakan suatu gelanggang topologi. Berdasarkan Teorema 4.1, dapat dikonstruksi suatu topologi \mathcal{T} pada M sehingga (M, \mathcal{T}) merupakan suatu ruang topologi dengan $\mathcal{B} = \{x + M_\gamma \mid x \in M, \gamma \in \bar{\Gamma}, \gamma \geq 0\}$ sebagai basis bagi \mathcal{T} di M .

Selanjutnya, definisikan pemetaan $f : M \times M \rightarrow M$ sebagai $f((m, n)) = m + n$ dan $g : R \times M \rightarrow M$ sebagai $g((r, m)) = rm$. Akan ditunjukkan bahwa fungsi f dan g kontinu.

Berdasarkan Teorema 2.4, $(M \times M, \mathcal{T}_1)$ merupakan ruang topologi dengan koleksi himpunan $\mathcal{C} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1, B_2 \in \mathcal{B}\}$ sebagai basis bagi topologi \mathcal{T}_1 di $M \times M$. Ambil $B \in \mathcal{B}$ sebarang. Tulis $B = x + M_\gamma$ untuk suatu $x \in M, \gamma \in \bar{\Gamma}, \gamma \geq 0$. Akan ditunjukkan $f^{-1}(B)$ merupakan subhimpunan terbuka dari $M \times M$.

Ambil $(m, n) \in f^{-1}(B) \subseteq M \times M$. Artinya $f((m, n)) = m + n \in B$ sehingga $m + n - x \in M_\gamma$. Pilih $C = (m + M_\gamma) \times (n + M_\gamma) \in \mathcal{C}$. Jelas bahwa $(m, n) \in C$. Ambil $(p, q) \in C$. Tulis $p = m + m_1$ untuk suatu $m_1 \in M_\gamma$ dan $q = n + m_2$ untuk suatu $m_2 \in M_\gamma$ sehingga $f((p, q)) = p + q = x + (m + n - x) + (m_1 + m_2) \in x + M_\gamma = B$. Diperoleh $(p, q) \in f^{-1}(B)$ sehingga $C \subseteq f^{-1}(B)$. Akibatnya $f^{-1}(B)$ merupakan subhimpunan terbuka dari $M \times M$. Jadi, f adalah fungsi kontinu.

Berdasarkan Teorema 2.4, $(R \times M, \mathcal{T}_2)$ merupakan ruang topologi dengan koleksi himpunan

$$\mathcal{D} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

sebagai basis bagi topologi \mathcal{T}_2 di $R \times M$. Ambil $B \in \mathcal{B}$ sebarang. Tulis $B = x + M_\gamma$ untuk suatu $x \in M, \gamma \in \bar{\Gamma}, \gamma \geq 0$. Akan ditunjukkan $g^{-1}(B)$ merupakan subhimpunan terbuka dari $R \times M$.

Ambil $(r, m) \in g^{-1}(B) \subseteq R \times M$. Artinya $g((r, m)) = rm \in B$ sehingga $rm - x \in M_\gamma$. Pilih $D = (r + R_\gamma) \times (m + M_\gamma) \in \mathcal{D}$. Jelas bahwa $(r, m) \in D$. Ambil $(s, n) \in D$. Tulis $s = r + r_1$ untuk suatu $r_1 \in R_\gamma$ dan $n = m + m_1$ untuk suatu $m_1 \in M_\gamma$. Karena $r \in R, r_1 \in R_\gamma, m \in M$, dan $m_1 \in M_\gamma$ diperoleh $\mu(r_1 m) = v(r_1) + \mu(m) \geq \gamma + 0 = \gamma$, $\mu(r m_1) = v(r) + \mu(m_1) \geq 0 + \gamma = \gamma$, dan $\mu(r_1 m_1) = v(r_1) + \mu(m_1) \geq \gamma + \gamma \geq \gamma$ sehingga $r_1 m, r m_1, r_1 m_1 \in M_\gamma$. Akibatnya $g((s, n)) = sn = x + (rm - x) + (r_1 m + r m_1 + r_1 m_1) \in x + M_\gamma = B$. Diperoleh $(s, n) \in g^{-1}(B)$ sehingga $D \subseteq g^{-1}(B)$. Akibatnya $g^{-1}(B)$ merupakan subhimpunan terbuka dari $R \times M$. Jadi, g adalah fungsi kontinu. Dengan demikian, M merupakan suatu modul topologi. ■

Daftar Pustaka

- [1] Atiyah, M. F. and Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1969.
- [2] Irwan, S. E., Garminia, H. and Astuti, P., On Valuations of Vector Spaces, *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 38 (2016), 633-646.
- [3] Krull, W., Allgemeine Bewertungstheorie, *J. Reine Angew Math.*, 167 (1932), 160-196.
- [4] Krylov, P. A. and Tuganbaev, A. A., Modules over Discrete Valuation Domains II, *J. Math. Sci.*, 151 (2008), 3255-3371.
- [5] Moghaderi, J. and Nekooei, R., Valuation, Discrete Valuation and Dedekind Modules, *Int. Electronic J. Algebra*, 8 (2010), 18-29.
- [6] Munkres, J. R., *Topology*, Second Edition, Prentice Hall, USA, 2000.
- [7] Steinberg, S. A., *Lattice-ordered Rings and Modules*, Springer, New York, 2010.
- [8] Zariski, O. and Samuel, P., *Commutative Algebra II*, Van Nostrand, New Jersey, 1960.

KENDALI OPTIMAL PENYEBARAN PENYAKIT BUSUK BUAH TANAMAN KAKAO AKIBAT JAMUR *PHYTOPHTHORA PALMIVORA*

R. Ratianingsih, G. Triwidodo, R.A. Yahya, Hajar, A.I. Jaya

Program Studi Matematika FMIPA UNTAD,
ratianingsih@yahoo.com, gatotriwidodo12@gmail.com, obyyahya@gmail.com,
hajar200490@yahoo.com, jayaindraagus@gmail.com

Abstrak

Pengendalian terhadap model penyebaran penyakit busuk buah pada tanaman kakao akibat infeksi jamur *Phytophthora Palmivora* dibahas dalam penelitian ini. Model mendeskripsikan terbawanya jamur oleh semut sebagai vektor dan kontak antara semut pembawa jamur dengan buah kakao yang rentan. Dua titik kritis, yaitu dan titik kritis yang menggambarkan kondisi bebas penyakit dan kondisi endemik secara berturut – turut merupakan titik kritis tidak stabil dan stabil. Hal ini menunjukkan bahwa kondisi bebas penyakit bersifat sementara, sedangkan kondisi endemik bersifat menetap. Upaya pengendalian kondisi endemik dilakukan dengan menjaga kebersihan area sekitar pohon kakao agar kelembaban daerah di sekitar tanaman coklat terjaga. Hal tersebut dilakukan untuk membatasi habitat populasi semut sedemikian hingga pathogen tidak berkembang biak. Pengendalian model penyebaran tersebut secara matematis dilakukan dengan metoda minimum Pontryagin. Simulasi model memperlihatkan keberhasilan pengendalian tersebut yang ditunjukkan dari peningkatan populasi buah kakao rentan dan penurunan populasi buah kakao exposed dan terinfeksi.

Kata Kunci : metoda minimum Pontryagin, model penyebaran penyakit, *Phytophthora Palmivora*

1. Pendahuluan

Penyakit busuk buah pada tanaman kakao yang disebabkan oleh jamur *Phytophthora palmivora* sangat berbahaya karena *Phytophthora palmivora* sebagai salah satu patogen yang menyerangnya berkembang didalam tanah dan mampu hidup selama berbulan-bulan dalam tanah (Semangun, 1996). Penyakit ini disebarkan oleh semut, *Iridomyrmex cordatus*, sebagai vektor, yang mulanya diakibatkan kontak langsung antara buah yang sehat dengan buah yang terinfeksi. Kelompok buah *exposed* dalam satu pohon akan menjadi buah *infected* ketika ketahanan buah kakao menurun. Buah kakao yang sudah terinfeksi pathogen tidak dapat kembali sehat karena langsung membusuk. Semut mampu mempercepat menyebarkan penyakit busuk buah pada buah kakao dalam waktu beberapa hari (Rosmana, dkk. 2010).

Yahya (2016) mengkaji penyebaran penyakit busuk buah pada tanaman kakao dengan membangun model penyebaran penyakit tersebut yang diadaptasi dari model epidemik SEI. Populasi buah kakao dibagi menjadi 3 kelompok yaitu kelompok buah kakao yang rentan (*Susceptible*), terinfeksi penyakit namun belum bisa menginfeksi (*Exposed*), dan kelompok terinfeksi dan tidak dapat sembuh dari penyakit (*Infected*). Adapun populasi semut dibagi atas sub populasi semut yang tidak membawa patogen dan populasi semut yang membawa patogen. Pertumbuhan patogen yang berkurang karena terbawa oleh semut dan pengaruh daya dukung lingkungan mengikuti model pertumbuhan logistik. Model yang telah dibangun selanjutnya diuji kestabilannya dititik kritis yang menggambarkan kondisi bebas penyakit dan titik kritis yang menggambarkan kondisi endemik dengan menggunakan metode Linearisasi (Campbell, 2008, Olsder, 2003).

Titik kritis yang menggambarkan kondisi endemik yang stabil yang menginterpretasikan menetapnya penyakit busuk buah, dalam penelitian ini, diupayakan untuk dikendalikan. Pengendalian melalui pemilihan varietas unggul yang tahan terhadap serangan penyakit busuk, contohnya : ICS 6, DRC 16 dan DRC 16 x Sca 6. Secara teknis pengendalian dilakukan dengan menanam tanaman kakao dengan jarak yang tidak terlalu dempet atau renggang agar sinar matahari dapat menyinari kebun dan juga area sekitar pohon kakao tidak memiliki kelembaban yang tinggi, memangkas cabang-cabang tanaman kakao

dan juga pohon yang menaunginya secara rutin untuk menjaga kelembaban pada area tanaman kakao anda. Dilakukan pula sanitasi pada buah kakao yang mengalami penyakit busuk buah agar tidak menyebar ke buah kakao yang sehat dengan cara dikubur sedalam 1 meter. Sanitasi kebun juga dimaksudkan untuk mematikan atau mengurangi kepompong PBK. Mengurangi naungan yang terlalu rimbun dan memangkas cabang-cabang horizontal merupakan upaya penyederhanaan lingkungan kebun, agar tidak disenangi ngengat untuk berlindung. Menurut Roepke dalam Wessel (1983), ngengat PBK juga menyenangi embun madu yang dihasilkan kutu putih, *Aphis* sp. dan kutu hijau.

Secara preventif dapat dilakukan pula penyemprotan pada buah yang sehat menggunakan agen hayati seperti *Trichoderma* dengan dosis 200 gram perifer untuk upaya preventif, namun ketika serangan sudah sangat tinggi, maka lakukan penyemprotan dengan fungisida kontak dengan bahan aktif tembaga sebesar 0.3%. Adapun pengendalian secara biologis dapat dilakukan terhadap serangan hama coklat yang pada umumnya dilakukan oleh serangga (Ooi, 1987, 1992).

Pengendalian secara matematis dilakukan dengan metoda minimum Pontryagin (Naidu, 2002) yakni dengan membangun suatu fungsi tujuan yang meminimumkan banyaknya coklat yang terinfeksi. Prinsip minimum digunakan untuk memperoleh kendali optimal yang terbaik pada sistem dinamik dari state awal sampai state akhir, yaitu dengan memaksimumkan fungsi tujuan dimana kendali optimal $u(t)$ terbatas pada persamaan pembangun model.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Penyakit Busuk Buah Kakao

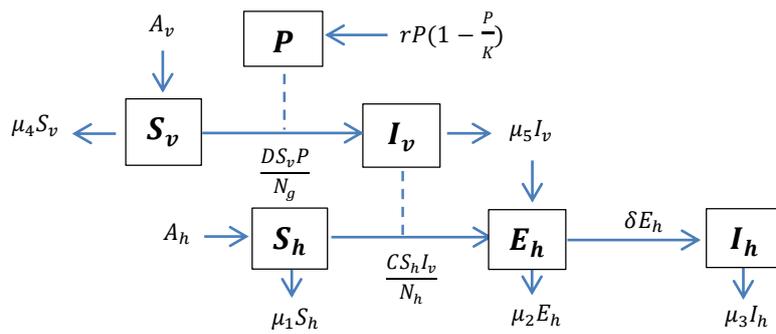
Penyakit busuk buah akibat infeksi jamur *Phytophthora palmivora* sering menyerang tanaman kakao pada bagian buah dan tanaman kakao lainnya seperti batang, daun, tunas, bahkan bunga. Namun demikian, dampak negatif serangan pada bagian tanaman lainnya tersebut tidak sebesar jika patogen ini menginfeksi buah (Team Redaksi Gampong Cot Baroh, 2014). Serangan terjadi pada tanaman kakao dengan sistem kekebalan rentan serta ditunjang oleh keadaan kebun yang lembab dan gelap. Penyakit ini memiliki masa inkubasi, yaitu waktu yang diperlukan dari saat terpapar penyakit hingga muncul gejala pertama, antara 7-14 hari. Sedangkan patogennya dapat bertahan dalam berbulan-bulan di dalam tanah.

Sumber patogen berada di tanah, batang yang sakit kanker batang, buah yang sakit, dan tumbuhan inang lainnya. Setelah mengadakan infeksi, dalam waktu beberapa hari, patogen menghasilkan sporangium yang dapat terbawa oleh percikan air atau oleh angin hingga mencapai buah-buah yang lebih tinggi dan melalui air dapat pula mencapai buah-buah dibawahnya. Kerusakan oleh pathogen bervariasi mulai dari kerusakan ringan, sedang sampai buah tidak dapat dipanen. Kerusakan berat bila cendawan ini masuk kedalam buah dan menyebabkan pembusukan pada biji. Bila menyerang buah pentil, buah akan termumifikasi sedangkan serangan pada buah muda menyebabkan pertumbuhan biji terganggu yaitu menjadi lunak dan berwarna coklat kehijau-hijauan dan akibatnya mempengaruhi penurunan kualitas biji. Serangan pada buah yang hampir masak tidak begitu berpengaruh pada pertumbuhan biji namun terjadi biji lembek dan akhirnya penurunan aroma biji yang kurang baik (Semangun, 1996).

Berkaitan dengan semut sebagai pembawa patogen, Rosmana et al.(2010) mengatakan bahwa semakin tinggi populasi semut, semakin tinggi intensitas penyakit busuk buah. Laju intensitas penyakit berkisar antara 3,8-9,3% per minggu. Intensitas penyakit optimum berkisar antara 20-60%. Kemunculan penyakit pada buah kakao terjadi 1-3 minggu setelah mulainya pengujian. Sporangium patogen dapat terbawa sampai dengan jarak tertentu dari sumber inokulum. Hal tersebut disebabkan sporangiumnya yang mudah terbawa oleh tungkai semut dan mudah terlepas saat semut bergerak. Peran semut sebagai vektor dipengaruhi oleh adanya sumber inokulum dan mobilitasnya melewati sumber inokulum tersebut. Semut lebih berpotensi membawa patogen bila pada bagian permukaan busuk buah telah terbentuk sporangium. Inilah yang membuka peluang penyebaran patogen oleh serangga-serangga yang menjadi vektor dari jamur. (Rosmana, dkk. 2010).

2.2. Model Matematika Penyebaran Penyakit Busuk Buah Kakao

Dalam penelitian ini penyebaran penyakit busuk buah pada tanaman kakao dibangun berdasarkan asumsi - asumsi dan mengadaptasi model SEI, sehingga gambaran perpindahan kelompok populasi buah kakao dan interaksinya dengan semut dan patogen dinyatakan dalam diagram transfer pada Gambar 1.



Gambar 1. Alur Penyebaran Penyakit Busuk Huah Pada Tanaman Kakao

Model penyebaran penyakit busuk buah dibangun dengan memperhatikan perubahan di setiap kelompok populasi relatif terhadap waktu. Pada kelompok populasi buah rentan S_h dan dan semut rentan S_v terdapat tingkat rekrutmen awal A_h dan A_v yang akan berkurang karena kelompok populasi ini berinteraksi dengan buah terinfeksi patogen I_h dan kelompok populasi semut pembawa patogen I_v . Tingkat kematian alami buah pada tahap rentan, ekspose dan terinfeksi patogen, secara berturut – turut, μ_1 , μ_3 , μ_3 dan tingkat kematian alami semut, baik membawa patogen maupun tidak, μ_5 dan μ_4 juga diperhitungkan sebagai faktor yang mempengaruhi laju perubahan banyaknya populasi rentan terhadap waktu. Peluang keberhasilan transmisi dari semut yang membawa patogen ke buah sehat dinyatakan oleh parameter C .

Pada kelompok buah ekspose E_h , sejumlah populasi kelompok rentan yang berinteraksi dengan populasi kelompok buah terinfeksi akan masuk ke dalam kelompok populasi buah ekspose. Laju perubahan kelompok tersebut terhadap waktu akan menurun akibat faktor kematian alami dan berpindahnya sejumlah populasi buah ekspose menjadi populasi buah terinfeksi. Pada kelompok buah terinfeksi I_h , sejumlah populasi kelompok buah ekspose yang telah siap untuk menginfeksi akan masuk ke dalam kelompok populasi buah terinfeksi. Laju perubahan kelompok tersebut terhadap waktu akan menurun akibat faktor kematian alami dan tidak dapat kembali sembuh. Sedangkan laju perubahan pada kelompok semut pembawa patogen I_v akan menurun akibat faktor kematian alami. Kelompok populasi patogen P akan berkurang karena terbawa oleh semut dan pengaruh daya dukung lingkungan mengikuti hukum logistik. Peluang keberhasilan transmisi dari patogen terinfeksi ke semut dinyatakan oleh parameter D .

3. Hasil Penelitian

3.1 Persamaan Pembangun

Alur penyebaran penyakit busuk buah pada Gambar 1 dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{dI_h}{dt} = \delta E_h - \mu_3 I_h \quad (3.1.a)$$

$$\frac{dE_h}{dt} = \frac{CS_h I_v}{N_h} - \mu_2 E_h - \delta E_h \quad (3.1.b)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \delta E_h - \mu_3 I_h \quad (3.1.c)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (3.1.d)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = A_v - \frac{DS_v P}{N_g} - \mu_4 S_v \quad (3.1.e)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{DS_v P}{N_g} - \mu_5 I_v \quad (3.1.f)$$

Dalam keadaan stagnan, sistem persamaan diferensial (3.1.a)-(3.1.f) memiliki titik kritis yang menggambarkan kondisi bebas penyakit $T_1 = \left(\frac{A_h}{\mu_1}, 0, 0, 0, 0, \frac{A_v}{\mu_4}, 0 \right)$ dan titik kritis yang menggambarkan kondisi endemik $T_2 = (S_h^*, E_h^*, I_h^*, P^*, S_v^*, I_v^*)$

dengan

$$\begin{aligned}
S_h^* &= \frac{A_h N_h \mu_5 (DK + \mu_4 N_g)}{(\mu_1 N_h \mu_5 DK + \mu_1 N_h \mu_4 \mu_5 N_g + CDA_v K)}, \\
E_h^* &= \frac{CA_h DA_v K}{(\mu_1 N_h \mu_5 DK + \mu_1 N_h \mu_4 \mu_5 N_g + CDA_v K)(\mu_2 + \delta)}, \\
I_h^* &= \frac{\delta CA_h DA_v K}{(\mu_1 N_h \mu_5 DK + \mu_1 N_h \mu_4 \mu_5 N_g + CDA_v K)(\mu_2 + \delta)\mu_3}, \\
S_v^* &= \frac{A_v N_g}{DKr + \mu_4 N_g}, \\
I_v^* &= \frac{DA_v K}{(DKr + \mu_4 N_g)\mu_5}
\end{aligned}$$

dan $P^* = K$.

Analisis kestabilan di titik kritis yang menggambarkan kondisi bebas penyakit ditentukan dari persamaan karakteristik dalam λ sebagai berikut :

$$(r - \lambda)(-\mu_5 - \lambda)(-\mu_1 - \lambda)(-\mu_2 - \delta - \lambda)(-\mu_3 - \lambda)(-\mu_4 - \lambda) \quad (3.2)$$

Persamaan (3.2) memberikan lima nilai eigen bernilai negatif dan satu nilai eigen positif, hal ini menunjukkan bahwa titik kritis yang menggambarkan kondisi bebas penyakit tidak stabil. Adapun pada titik kritis yang menggambarkan kondisi endemik diperoleh persamaan karakteristik dalam λ sebagai berikut :

$$\frac{1}{N_g(DK + \mu_4 N_g)\mu_5 N_h} \left((-r - \lambda)(DK + \mu_4 N_g + \lambda N_g)(-\mu_5 - \lambda)(\mu_1 N_h \mu_5 DK + \mu_1 N_h \mu_5 \mu_4 N_g + CA_v DK + \lambda \mu_5 N_h DK + \lambda \mu_5 N_h \mu_4 N_g)(-\mu_2 - \delta - \lambda)(-\mu_3 - \lambda) \right) = 0$$

yang memberikan enam nilai eigen bernilai negatif sehingga titik kritis yang menggambarkan kondisi endemik adalah stabil.

3.2 Kendali Optimal

Tingkat pengendalian optimal yang dirancang dengan tujuan untuk mendapatkan tingkat kendali optimal $u(t)$ yang meminimumkan banyaknya coklat yang terinfeksi dengan pengkondisian kelembaban tanah di sekitar pohon kakao untuk meminimumkan banyaknya semut pembawa pathogen. kendala sistem dinamik yang merupakan persamaan pembangun model. Nilai minimum yang sesuai dengan kriteria fungsi tujuan dipenuhi pada tingkat kendali tersebut untuk keadaan dan waktu yang sama dengan komponen – komponen kendali yang dapat diberikan pada masalah kendali optimal (Naidu, 2002).

Untuk model dinamik sitem yang disebut sebagai persamaan plant $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ berikut

$$\begin{aligned}
\dot{S}_h &= A_h - \mu_1 S_h - \frac{CS_h I_v}{N_h} \\
\dot{E}_h &= \frac{CS_h I_v}{N_h} - \mu_2 E_h - \delta E_h \\
\dot{I}_h &= u \delta E_h - \mu_3 I_h \\
\dot{P} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\
\dot{S}_v &= A_v - \mu_4 S_v - \frac{DS_v P}{N_h} \\
\dot{I}_v &= u \frac{DS_v P}{N_h} - \mu_5 I_h
\end{aligned}$$

dirancang *Indeks Performansi*

$$J = I_h(t) + I_v(t) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} u(t)^2 dt$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned}
x(t_0) &= x_0 \\
x(t_f) &= x_f
\end{aligned}$$

3.3 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip minimum digunakan untuk memperoleh kendali optimal terbaik pada sistem dinamik dari state

awal sampai state akhir, yaitu dengan memaksimalkan fungsi tujuan dimana kendali $u(t)$ terbatas pada ($u(t) \in U$). Persamaan Hamiltonian akan diminimalkan sepanjang U yang merupakan himpunan kendali yang mungkin sebagai berikut:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = -I_v(t) + \frac{1}{2}u(t)^2 + \sum_{i=1}^6 \lambda_i f_i(x(t), u(t), t)$$

Meminimalkan H terhadap vektor kendali $u(t)$ diperoleh dari persamaan state, co-state dan masalah syarat batas berikut :

3.1.1. Persamaan state :

$$\begin{aligned} \dot{S}_h &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = A_h - \mu_1 S_h - \frac{CS_h I_v}{N_h} \\ \dot{E}_h &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{CS_h I_v}{N_h} - \mu_2 E_h - \delta E_h \\ \dot{I}_h &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \delta E_h - u \mu_3 I_h \\ \dot{P} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ \dot{S}_v &= A_v - \mu_4 S_v - \frac{DS_v P}{N_h} \\ \dot{I}_v &= u \frac{DS_v P}{N_h} - \mu_5 I_v \end{aligned}$$

3.1.2. Persamaan co-state :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \frac{\partial H}{\partial S_h} = -\mu_1 - \frac{CS_h I_v}{N_h} \\ \dot{\lambda}_2 &= \frac{\partial H}{\partial E_h} = -\mu_2 - \delta \\ \dot{\lambda}_3 &= \frac{\partial H}{\partial I_h} = 1 - u \mu_3 \\ \dot{\lambda}_4 &= \frac{\partial H}{\partial P} = r \left(1 - \frac{2P}{K}\right) \\ \dot{\lambda}_5 &= \frac{\partial H}{\partial S_v} = -\mu_4 - \frac{DP}{N_h} \\ \dot{\lambda}_6 &= \frac{\partial H}{\partial I_v} = -1 - \mu_5 \end{aligned}$$

3.1.3. Masalah syarat batas :

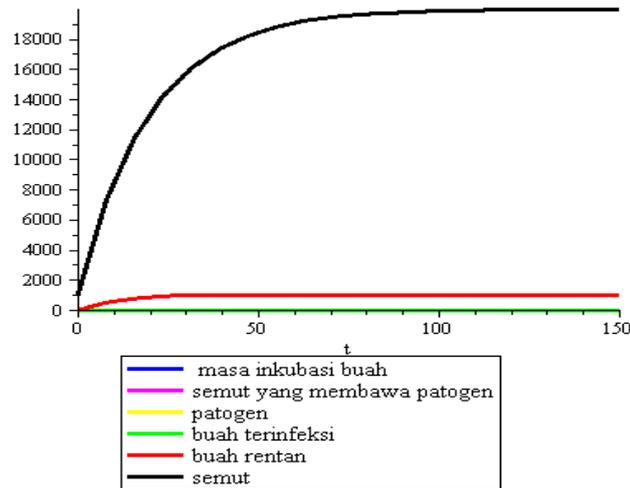
$$\begin{aligned} \frac{dH}{du} &= 0 \\ u(t) &= \lambda_3 \mu_3 - \lambda_6 \frac{DS_v P}{N_h} \end{aligned}$$

4. Simulasi

Simulasi penyebaran penyakit busuk buah pada tanaman kakao dilakukan dengan menggunakan nilai - nilai parameter pada Tabel 1. Dinamika kondisi **bebas penyakit** dilakukan dengan menggunakan nilai awal $S_h(0) = 0$, $E_h(0) = 0$, $I_h(0) = 0$, $P(0) = 0$, $S_v(0) = 1000$, dan $I_v(0) = 0$ dengan interval waktu selama 150 hari. Gambar 2 memperlihatkan bahwa sub populasi buah rentan dan semut rentan akan terus mengalami peningkatan hingga konvergen ke nilai maksimumnya. Keadaan kondisi bebas penyakit tergambar dari ketidakberadaan sub populasi lain seiring dengan pertambahan waktu.

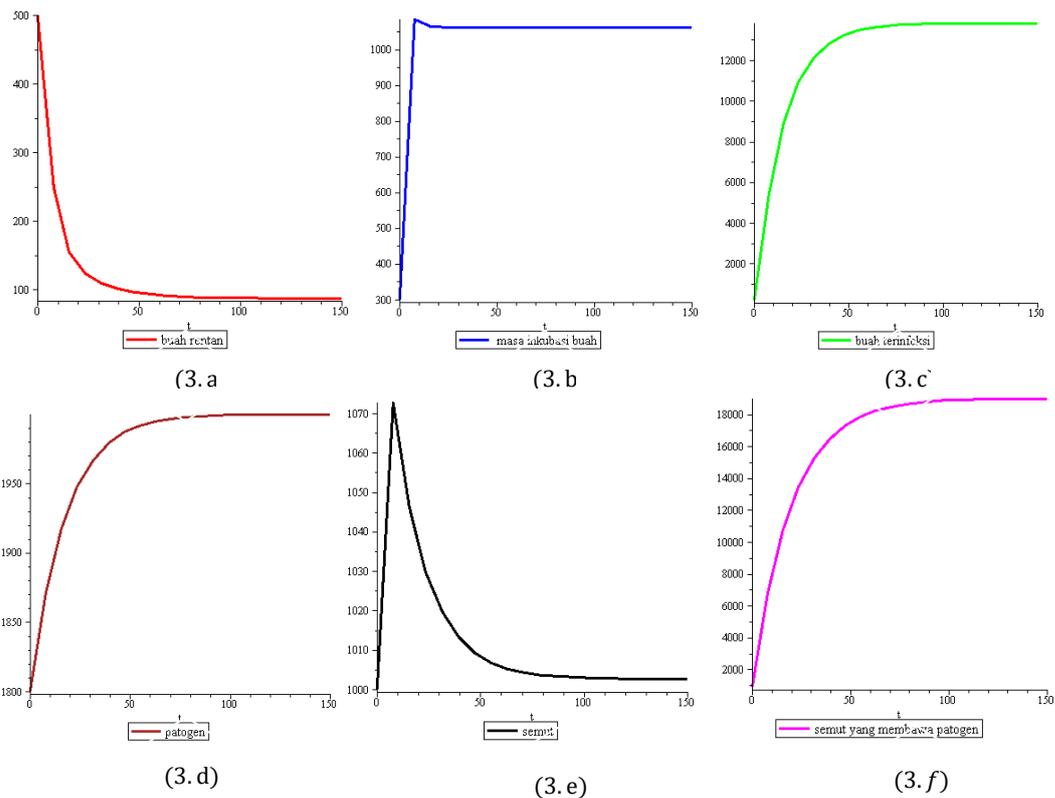
Tabel 1. Deskripsi dan Nilai Parameter

Parameter	Deskripsi	Nilai	Sumber (Referensi)
A_h	Tingkat Rekrutmen Konstan	1000	Asumsi
A_v	Tingkat Kelahiran Konstan	1000	Asumsi
μ_h	Laju kematian alami buah kakao	0,067	1/life time
δ	Laju Transisi buah ekspose ke infeksi	0,83	Asumsi
μ_v	Laju kematian alami pada semut	0,05	Asumsi
C	Peluang transmisi pathogen dari semut patogen ke buah sehat	0,6	Asumsi
D	Peluang patogen membawa semut	0,9	Asumsi
r	Tingkat Kelahiran Konstan	0,006	Asumsi
K	Carryng capacity	2000	Asumsi



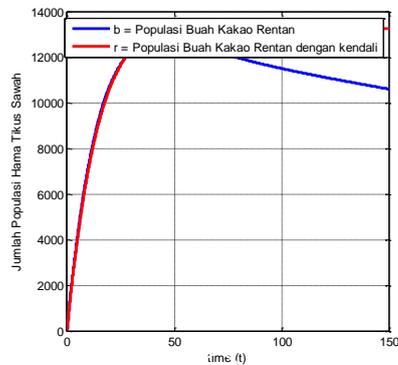
Gambar 2. Simulasi Kondisi Bebas Penyakit

Simulasi kondisi **endemik** diperoleh dengan menggunakan nilai awal $S_h(0) = 500$, $E_h(0) = 300$, $I_h(0) = 200$, $P(0) = 1800$, $S_v(0) = 1000$, dan $I_v(0) = 900$ dengan interval waktu selama 150 hari. Gambar (3.a) memperlihatkan penurunan populasi rentan hingga akhirnya konvergen setelah waktu tertentu. Gambar (3.b) menunjukkan peningkatan populasi buah yg memasuki masa inkubasi sampai nilai maksimum 1050 buah. Setelah itu jumlah tersebut menurun hingga konvergen setelah waktu tertentu. Gambar (3.c) menunjukkan tingkai infeksi buah terus mengalami kenaikan dan pada akhirnya konvergen setelah waktu tertentu. Pada Gambar (3.d) ditunjukkan kenaikan populasi patogen mengikuti pertumbuhan logistik, adapun pada Gambar (3.e) kenaikan populasi semut hingga nilai maksimum 1070 ekor. Setelah hari ke 10 terjadi penurunan populasi akibat kontak antara semut dan patogen dan kematian alami yang pada akhirnya konvergen setelah waktu tertentu. Gambar (3.f) memperlihatkan kenaikan populasi semut pembawa pathogen yang konvergen setelah waktu tertentu.

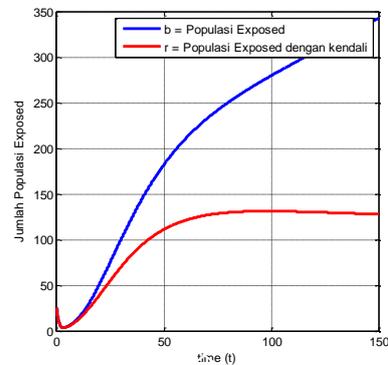


Gambar 3. Simulasi Kondisi Endemik

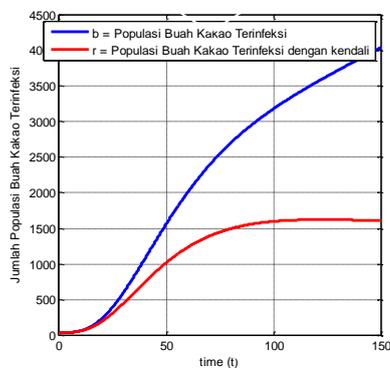
Simulasi pengendalian penyebaran penyakit busuk buah pada tanaman kakao dilakukan untuk mengkaji perubahan yang terjadi pada kondisi endemik dengan tingkat kendali optimal $u(t)$. Pengendalian untuk meminimumkan banyaknya coklat yang terinfeksi dilakukan dengan pengkondisian kelembaban tanah di sekitar pohon kakao untuk meminimumkan banyaknya semut pembawa pathogen. Gambar 4 memperlihatkan perubahan tersebut pada kurva pertumbuhan populasi buah kakao rentan, expose dan terinfeksi serta pertumbuhan populasi semut pembawa pathogen. Keberhasilan pengendalian nampak dalam meningkatkan populasi buah kakao rentan (Gambar 4.a) dan menurunkan populasi buah kakao expose dan terinfeksi serta pertumbuhan populasi semut pembawa pathogen (Gambar 4.b, Gambar 4.c dan Gambar 4.d).



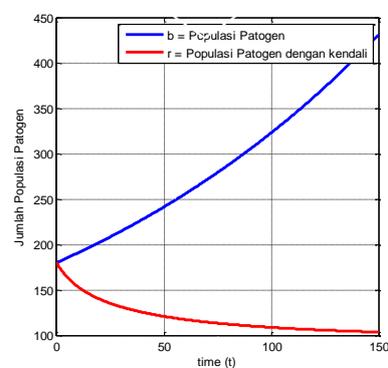
(4. a)



(4. b)



(4. c)



(4. d)

Gambar 4. Pengendalian untuk meminimumkan banyaknya coklat yang terinfeksi dengan pengkondisian kelembaban tanah di sekitar pohon kakao untuk meminimumkan banyaknya semut pembawa pathogen.

5. Kesimpulan

- Telah dibangun model matematika yang merepresentasikan penyebaran kondisi bebas penyakit dan kondisi endemik penyebaran penyakit busuk buah pada tanaman kakao.
- Kondisi bebas penyakit bersifat sementara, sedangkan kondisi endemik bersifat menetap.
- Telah diperoleh kendali optimal penyebaran penyakit busuk buah pada tanaman kakao dengan metoda minimum Pontryagin.

Daftar Pustaka

- [1] Campbell, S.L., & Haberman, R. (2008). *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. New Jersey: Princeton University Pree.
- [2] Naidu, D.S., (2002), *Optimal Control Systems*, CRC PRESS, New York.
- [3] Olsder, G.J. (2003). *Mathematical System Theory*. Delft, The Netherlands.
- [4] Ooi, P.A.C. 1987. Advances in the biological control of cocoa podborer In Ooi, P.A.C (Ed) Management of cocoa podborer. The Malaysian Plant Protection Society (MAPPS), Kuala Lumpur. p. 103–117.

- [5] Ooi, P.A.C. (1992). Prospects for biological control of cocoa insect pests In *Cocoa Pest and Disease Management in Southeast Asia and Australia*. FAO Plant Prod. and Protection 12: 101–107.
- [6] Roepke, W. 1917. Cacao (translated from onze koloniale Landbouw by P.C. Wessel, H.D. Tjeenk Willink & Zoon, N: In *Cocoa Research in Indonesia 1900–1950*. Vol. II eds Hille Toxopeus & P.C. Wessel. American Cocoa Research Institute. p. 69–74.
- [7] Rosmana, dkk., (2010), Peranan Semut *Iridomirmex Cordatus* (Hymenoptera: Formicidae) dalam Menularkan Patogen Busuk Buah *Phytoptora Palmivora*, *Pelita Perkebunan*.
- [8] Semangun, H., (1996), *Ilmu Penyakit Tumbuhan*, Gadjah Mada University Press, Yogyakarta.
- [9] Team Redaksi Gampong Cot Baroh, (2014), Mengenal hama dan Penyakit pada Tanaman Kakao, <http://gampongcotbaroh.desa.id/info-warga-mengenal-hama-dan-penyakit-pada-tanaman-kakao/>, diakses 4 Maret 2015.
- [10] Yahya, R.A., (2016), Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit Busuk Buah Tanaman Kakao Akibat Jamur *Phytoptora Palmivora* pada Kondisi Bebas Penyakit dan Endemik. Universitas Tadulako.
- [11] Wessel, P.C., (1983), The Cocoa Podborer Moth *Acrocercops cramerella* Sn. Review of Research Institute, 39 – 65.

KLASIFIKASI KANKER PARU-PARU MENGGUNAKAN SVM DENGAN PEMILIHAN FITUR BERDASARKAN FUNGSI KERNEL

Melati Vidi Jannati, Zuherman Rustam

*Departement Mathematics, University of Indonesia,
melati.vidi@sci.ui.ac.id, rustam@ui.ac.id*

Abstrak

Kanker merupakan salah satu penyakit yang membutuhkan pengobatan yang tepat. Efek samping dari pengobatan yang kurang tepat akan muncul, sehingga perlu ketelitian dalam pengklasifikasian kanker. Saat ini penelitian tentang metode pengklasifikasian kanker sudah banyak berkembang. Masalah pemilihan gen dalam pengklasifikasian kanker menjadi hal yang penting, karena dapat mengurangi dimensionalitas yang tinggi dari data kanker yang berupa *microarray*. Pada penelitian ini, akan digunakan metode pemilihan gen berdasarkan clustering dengan kernel function untuk mendapatkan ukursn similaritas. *Microarray* yang sudah terseleksi selanjutnya akan diklasifikasi menggunakan *Support Vector Machine*.

Keywords: Classification, Cross Validation, Lung cancer, Machine learning, Microarray

1. Pendahuluan

Kanker merupakan suatu penyakit yang ditandai dengan munculnya pertumbuhan sel yang tidak normal kemudian nantinya akan merusak sel-sel jaringan yang normal. Penyebab utama kematian urutan kedua ditempati oleh kanker menurut World Health Organization 1997 dan ada lebih dari 150 tipe kanker[1]. Salah satu tipe kanker yang mematikan adalah kanker paru – paru. Kanker paru – paru termasuk kedalam golongan tumor solid atau jaringan tubuh tidak normal yang berbentuk padat[2].

Paru – paru adalah organ vital manusia karena merupakan alat pernapasan utama didalam tubuh manusia. Melalui pernapasan terjadi adanya pertukaran oksigen dengan karbondioksida dan karena bernapas merupakan salah satu ciri – ciri mahluk hidup maka sangatlah penting peran paru-paru di dalam tubuh manusia. Sama dengan halnya kanker, kanker paru juga muncul ketika pertumbuhan sel tidak normal. Pertumbuhan sel tersebut terjadi pada saluran napas atau epitel bronkus untuk kanker paru-paru[3].

International Agency Research on Cancer (IARC), memperkirakan pada tahun 2012 terjadi 1,8 juta kasus baru[4]. Penderita kanker paru-paru banyak diderita oleh pria, ini disebabkan karena mayoritas pria merokok. Prevalensi penyakit kanker pada tahun 2013 di Indonesia memperkirakan sekitar 347.792 orang menderita kanker[5]. Menurut RS Kanker Dharmais, kanker paru-paru merupakan salah satu dari tiga kasus terbanyak yang terjadi selama 2010-2013[5]. Kanker paru-paru merupakan masalah kesehatan global utama sehingga perlu adanya semacam penanganan untuk mendeteksi kanker dengan cepat dan tepat.

Pada umumnya klasifikasi kanker paru-paru dilakukan dengan menggunakan penampilan kanker, seperti x-ray scan, computed tomography (CT) scan, magnetic resonance imaging (MRI) scans, Positron emission tomography (PET) scans, dan bone scan [6]. Penelitian mengenai klasifikasi kanker paru-paru menggunakan tampilan gambar sudah pernah dilakukan dengan berbagai metode seperti Fuzzy C Mean Possibilistic[7]; Fuzzy Clustering dan Support Vector Machine[8]; dan Clustering K-Nearest Neighbor[9]. Dengan seiring berjalannya waktu saat ini pendektasian kanker paru-paru dapat dilakukan dengan struktur DNA yang ada dalam tubuh manusia. Sehingga, pada masa ini penelitian tentang metode pengklasifikasian kanker paru-paru dapat dilakukan dengan analisis data DNA yang dibentuk dalam suatu matriks atau yang sering disebut *microarray* data. Penanganan spesifik terhadap beberapa tipe kanker akan didapat melalui analisa dari *microarray* data [10]. Berdasarkan penelitian, keakuratan klasifikasi lebih akurat menggunakan *microarray* data karena penampilan kanker yang hampir sama bisa saja memiliki penanganan yang berbeda. Penelitian kanker menggunakan *microarray* data juga pernah dilakukan menggunakan metode Fuzzy C-Means [11] dan Possibilistic C-Means[12] dengan spesifik kanker otak.

Microarray merupakan matriks data dengan dimensionalitas tinggi yang terdiri dari nilai ekspresi tiap gen yang disebut dengan fitur. Sebagian dari fitur – fitur tersebut bisa menjadi data yang tidak relevan, sehingga menurunkan keakuratan classification. Pemilihan Fitur merupakan salah satu cara untuk mengurangi data yang tidak relevan tersebut. Metode pemilihan fitur yang akan digunakan untuk klasifikasi kanker paru – paru adalah metode pemilihan fitur berbasis Kernel (KBCGS)[13]. Metode ini merupakan pengembangan dari simultaneous clustering and attribute discrimination(SCAD) algorithm, berdasarkan Fuzzy c-means algorithm[14]. Perbedaan terletak pada pemberian bobot untuk masing-masing fitur. Bobot optimal didapatkan dengan meminimumkan fungsi objektif dari clustering. Fungsi kernel digunakan untuk menghitung disimilaritas pada proses clustering.

Fungsi kernel yang ditemukan oleh Vapnik membantu proses classification untuk memanipulasi data ke ruang dimensi yang lebih tinggi[15]. Berbeda dengan penelitian yang dilakukan oleh Huihui Chen, Yusen Zhang dan Ivan Gutman yang menggunakan σ pada kernel Gaussian, pada makalah ini akan digunakan $\|X_{jk}\|$ data pada sample ke j dan fitur ke k multiply by $\|v_{ik}\|$ pusat masing - masing cluster. Klasifikasi yang digunakan pada makalah ini adalah *Support Vector Machine* (SVM) [11]. Metode ini merupakan salah satu metode klasifikasi terbaru dan memiliki performa yang cukup baik. Banyak Teori yang membangun SVM diperkenalkan pada tahun sekitar 1960-an, tetapi baru SVM sendiri baru diperkenalkan oleh Vapnik, Boser dan Guyon pada tahun 1992. Dalam penulisan makalah ini SVM akan mengklasifikasi microarray data kanker paru-paru dan non-kanker dengan penyeleksian fitur maupun tanpa penyeleksian fitur.

2. Bahan dan Metode

2.1. Microarray data

DNA yang diambil dari dalam tubuh pasien akan diperiksa dan dianalisis. Setelah dianalisis, DNA tersebut akan diberi nilai dari ekspresi gen tersebut dan kemudian akan dibentuk suatu matriks data dari nilai ekspresi gen. Matriks data tersebut biasa dikenal dengan Microarray data. Pada paper ini akan digunakan data kanker paru – paru berbentuk microarray data. Data tersebut didapat dari Kent Ridge Bio-medical Dataset (<http://datam.i2r.a-star.edu.sg/datasets/krbd/>)[11]. Data kanker paru – paru yang akan diuji memiliki 7129 fitur dan terbagi menjadi 2 kelas yaitu kanker dengan sampel sebanyak 86 sampel kanker dan 10 sampel non-kanker. Pemilihan Fitur sangat perlu dilakukan pada data yang memiliki banyak fitur. Hal tersebut dilakukan untuk mengoptimalkan proses pengklasifikasian dengan fitur-fitur yang informatif dan menghemat waktu serta biaya dalam pengolahan data.

2.2. Fungsi Kernel

Sebelum menjelaskan tentang Pemilihan Fitur berbasis Fungsi Kernel, akan dijelaskan pengertian Fungsi kernel. Fungsi kernel diajukan oleh Vapnik [15] pada tahun 1997 dan dikembangkan oleh Scholkopf [16] dan Christianini [17]. Keuntungan yang diperoleh dari penggunaan fungsi kernel adalah penghematan penyimpanan memori di ruang fitur yang baru, dikarenakan pemetaan vector tersebut dipetakan ke dimensi yang lebih tinggi.

Misalkan $\phi : X \rightarrow F$ merupakan pemetaan non-linear dari ruang input X ke ruang fitur baru dimensi tinggi F. Sehingga Dot product $x_k^T x_i$ di ruang input asli dipetakan ke $\Phi(x_k)^T \Phi(x_i)$, ruang fitur baru. Dari Mercer's Theorem, didefinisikan Fungsi Kernel Mercer sebagai berikut:

$$K(x_k^T x_i) = \Phi(x_k)^T \Phi(x_i). \quad (1)$$

Terdapat beberapa tipe dari kernel function, diantaranya adalah:

- Polynomial Kernel :
 $K(x_k^T x_i) = (x_k^T x_i + \theta)^d$,
 θ konstanta dan d degree
- Gaussian Kernel:
 $K(x_k^T x_i) = \exp(-\frac{\|x_k^T - x_i\|^2}{2\sigma^2})$,
 σ konstanta
- Kernel for sets:
 $K(x_k^T x_i) = \sum_{i=1}^{N_{x_k}} \sum_{j=1}^{N_{x_i}} k(x_k^T x_i)$,
 $k(x_k^T x_i)$ adalah kernel pada masing – masing himpunan
- Sigmoid Kernel:
 $K(x_k^T x_i) = \tanh(\eta x_k^T x_i + \theta)$,
 η dan θ konstanta
- dll

Jarak Euclidean didalam ruang F dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \|\phi(x_k) - \phi(x_i)\|^2 &= (\phi(x_k) - \phi(x_i))^T (\phi(x_k) - \phi(x_i)) \\ &= 2(1 - K(x_k, x_i)). \end{aligned} \quad (2)$$

Persamaan diatas akan digunakan untuk mengukur fungsi similaritas pada pemilihan fitur dengan menggunakan modifikasi Gaussian Kernel dibawah ini:

$$K(x_k^T x_i) = \exp\left(-\frac{\|x_k^T - x_i\|^2}{\|x_k^T\|^2 \|x_i\|^2}\right). \quad (3)$$

2.3. Pemilihan Fitur berbasis kernel

Ide dari KBCGS adalah melakukan perhitungan bobot pada masing-masing fitur dengan mengoptimalkan fungsi objektif klustering. Fungsi kernel digunakan untuk menghitung ukuran similaritas seperti yang sudah dijelaskan pada subbab sebelumnya. Konsep pada clustering adalah mencari kemiripan antar *cluster*, sehingga pada metode ini akan dicari fitur yang mirip atau dapat dikatakan sama. Menghitung kemiripan dapat dilakukan dengan menggunakan jarak, semakin kecil jarak antar *cluster* semakin mirip juga *cluster* tersebut. Dataset $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, dengan n banyaknya sampel dan p banyaknya gen atau yang disebut dengan fitur akan dihitung bobotnya terlebih dahulu menggunakan $w_k = 1/p$, dimana $k = 1, 2, \dots, p$. Dataset yang akan dipakai tentunya harus terlabel agar dapat terklasifikasi, $y_j \in Y$ dimana $Y=1, 2, \dots, C$. Setelah mempersiapkan dataset dan bobot awal, hal yang perlu dipersiapkan selanjutnya adalah pusat cluster dan jarak antara pusat cluster dan sample. Dalam hal ini C class akan diperlakukan sebagai cluster, jadi pusat cluster $v_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ip}]$ dapat dihitung dengan persamaan dibawah ini:

$$v_{ik} = \frac{\sum_{x_j \in C_i} c_i x_{jk}}{|C_i|}, \text{ dimana } i = 1, 2, \dots, C, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

$|C_i|$ merupakan banyaknya sampel yang terdapat pada class C_i . Pada pemilihan Fitur berbasis fungsi kernel akan dihitung fungsi dissimilarity. Hal ini merupakan hal dasar yang dilakukan pada metode clustering. Fungsi dissimilarity antara sampel dan pusat cluster diperoleh dengan menggunakan kernel ditulis pada persamaan dibawah ini:

$$\begin{aligned} \varphi^2(x_j, v_i) &= \sum_{k=1}^p \|\phi(x_{jk}) - \phi(v_{ik})\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^p \{K(x_{jk}, x_{jk}) - 2K(x_{jk}, v_{ik}) + K(v_{ik}, v_{ik})\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan menggunakan modifikasi kernel Gaussian pada persamaan (3), maka jarak pada persamaan (2) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \|\phi(x_k) - \phi(v_i)\|^2 &= 2(1 - K(x_k, v_i)) \\ &= 2\left(1 - \exp\left(-\frac{\|x_k^T - x_i\|^2}{\|x_k^T\|^2 \|x_i\|^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Fungsi objektif pada pemilihan fitur ini hampir sama dengan fungsi objektif pada clustering dengan pembobotan. Perbedaannya metode ini terletak pada data yang dipetakan ke ruang fitur atau dengan kata lain data yang menggunakan fungsi kernel, sehingga persamaan fungsi objektifnya didefinisikan sebagai berikut[13]:

$$\begin{aligned} \min J &= \sum_{i=1}^C \sum_{x_j \in C_i} \varphi^2(x_j, v_i) + \delta \sum_{k=1}^p w_k^2 \\ &= \sum_{i=1}^C \sum_{x_j \in C_i} \sum_{k=1}^p w_k \|\phi(x_{jk}) - \phi(v_{ik})\|^2 + \delta \sum_{k=1}^p w_k^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Dimana $w = (w_1, \dots, w_p)$, dan dengan syarat $\begin{cases} w_k \in [0, 1], k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p w_k = 1 \end{cases}$. (8)

Fungsi objektif akan minimal ketika nilai δ dan w_k rendah, maka δ dan w_k perlu diupdate. Persamaan untuk mengupdate fungsi objektif ditulis pada persamaan (9) dan (10):

$$w_k = \frac{1}{p} + \frac{1}{2\delta} \sum_{i=1}^C \sum_{x_j \in C_i} \left(\frac{\sum_{k=1}^p \|\phi(x_{jk}) - \phi(v_{ik})\|^2}{p} - \|\phi(x_{jk}) - \phi(v_{ik})\|^2 \right). \quad (9)$$

$$\delta^{(t)} = \frac{\alpha \sum_{i=1}^C \sum_{x_j \in C_i} \sum_{k=1}^p w_k^{(t-1)} \|\phi(x_{jk}) - \phi(v_{ik})\|^2}{\sum_{k=1}^p (w_k^{(t-1)})^2}, \quad \alpha \text{ constant.} \quad (10)$$

Dengan menggunakan konsep kemiripan pada *clustering*, bobot yang paling memberikan informasi merupakan bobot dengan nilai sekecil mungkin. Sehingga pada iterasi terakhir, nilai bobot yang sudah optimal akan diurutkan dari yang terkecil hingga terbesar dan dipilih beberapa nilai bobot yang terkecil. Berikut merupakan algoritma Pemilihan fitur berbasis kernel,

Algorithm 1. Pemilihan fitur menggunakan kernel berdasarkan clusteringInput: Dataset X, Label y, $\alpha=0.5$

Output : w: bobot dari setiap fitur

Step 1. Inisialisasi

- Hitung bobot masing-masing fitur(gen), menggunakan : $w_k^{(0)} = \frac{1}{p}$.
- Hitung pusat dari masing-masing kelas (v_i), menggunakan persamaan (4).
- Hitung jarak, menggunakan persamaan (5).

Step 2. Hitung nilai δ , menggunakan persamaan (10)

Step 3. Update bobot masing-masing fitur(gen), menggunakan persamaan (9)

Step 4. Hitung nilai J , menggunakan persamaan (7)

Step 5. Menentukan kriteria pemberhentian iterasi dapat dilakukan dengan persamaan dibawah ini:

$$\Delta = \|J^t - J^{t-1}\|$$

Dimana J^t merupakan nilai J pada iterasi ke-(t) dan J^{t-1} nilai J pada iterasi ke-($t-1$) atau iterasi sebelumnya. Jika $\Delta < \theta$, maka iterasi berhenti dan bobot terakhir diupdate merupakan bobot optimalnya. Untuk lainnya, ulangi step 2.

2.4. Support Vector Machine (SVM)

Support Vector Machine merupakan salah satu Machine Learning yang supervised atau data yang disertai nilai target, $\{x_i, t_i\}$ dimana $i=1, \dots, n$. Machine Learning adalah bidang ilmu yang menggunakan algoritma atau model untuk menggali informasi yang ada pada data. Data tersebut akan dibagi menjadi data pelatihan dan data uji. Data pelatihan tersebut akan dilatih untuk membentuk suatu model klasifikasi yang nantinya diuji keakuratannya. Diberikan himpunan pasangan data pelatihan sebanyak N , $\{x_i, y_i\}$ Dimana $i = 1, \dots, N$; $x_i \in \mathbb{R}^n$; dan $y_i \in \{-1, 1\}$. Pada penelitian ini target kanker akan dinotasikan dengan angka 1, sementara nonkanker dengan -1. Langkah dasar metode ini adalah membentuk bidang pemisah linear (*Hyperplane*) yang akan membagi data menjadi dua kelas. Bidang pemisah atau fungsi keputusan didefinisikan sebagai berikut:

$$y(x_i) = \mathbf{w}^T \phi(x_i) + b.$$

Dimana w merupakan bobot vektor, yaitu $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$; k adalah jumlah atribut dan b merupakan suatu skalar yang disebut dengan bias. Dengan bidang pembatas untuk setiap kelas memenuhi persamaan:

$$y_i(\mathbf{w}^T \phi(x_i) + b) \geq 1, \quad i = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Masalah SVM adalah masalah memaksimalkan jarak terdekat antara data pelatihan dengan hyperplane atau yang biasa dikenal dengan margin. Gunn (1998) [18] mengatakan bahwa margin akan dimaksimalkan tetapi harus memperhatikan juga persamaan (11), sehingga masalah tersebut dapat ditulis menjadi masalah optimisasi dengan fungsi objektif berikut:

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2. \quad (12)$$

dengan syarat $y_i(\mathbf{w}^T \phi(x_i) + b) \geq 1, \forall i=1, \dots, N$.

Seringkali data yang ada tidak dapat dipisahkan secara linear, maka perlu adanya bantuan dari fungsi kernel yang akan memetakan data ke ruang fitur baru yang berdimensi lebih besar. Dalam pengklasifikasian ini akan digunakan fungsi kernel *Gaussian*(RBF). Selain dengan fungsi kernel, penambahan variable *slack* ($\xi_i \geq 0$) juga membantu permasalahan tersebut. Variabel *slack* akan mengukur kesalahan dari beberapa klasifikasi yang dibuat. Persamaan (12) yang diberikan variable *slack* dapat ditulis:

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N \xi_i. \quad (13)$$

dengan syarat $y_i(\mathbf{w}^T \phi(x_i) + b) \geq 1 - \xi_i, \forall i=1, \dots, N$ dan C merupakan suatu parameter biaya untuk mengontrol keseimbangan antara margin dan kesalahan klasifikasi [19].

Persamaan (12) akan diselesaikan menggunakan bantuan fungsi *Lagrange* dan kemudian akan ditulis dalam bentuk dual-nya, sehingga fungsi objektif SVM didefinisikan sebagai persamaan berikut:

$$\max_{\alpha} L = \sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i y_i \alpha_j y_j K(x_i, x_j). \quad (14)$$

dengan syarat $\begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i = 0 \end{cases}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, y_i \in \{-1, 1\}.$

Melalui bantuan fungsi *lagrange* didapatkan bahwa[22]:

$$w^* = \sum_{i=1}^N \alpha_i^* y_i \phi(x_i) . \quad (15)$$

$$b^* = \frac{1}{N_s} \sum_{s \in N_s} (y_s - \sum_{m \in N_s} \alpha_m y_m \phi(x_m) \cdot \phi(x_s)) . \quad (16)$$

dimana : N_s = banyak data support vector dan α_m merupakan *support vector* yang berarti data pelatihan terletak pada hyperplane, $\alpha_m > 0$. Sementara untuk $\alpha=0$, data uji tidak terletak pada hyperplane. Permasalahan SVM merupakan permasalahan *quadratic programming* yang akan mencari solusi dari nilai α_i . Setelah nilai α_i didapat, maka data uji akan ditentukan klasifikasinya menggunakan persamaan:

$$f(x_t) = \sum_{s=1}^{N_s} \alpha_s y_s x_s \cdot x_t + b$$

dimana:

x_t = data yang akan diprediksi kelasnya (data testing)

x_s = data *support vector*, $s = 1, 2, \dots, ns$

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil uji coba klasifikasi microarray data menggunakan SVM serta pemilihan fitur akan dibandingkan dengan SVM tanpa pemilihan fitur. Uji coba dilakukan menggunakan MATLAB R2010a. Kernel yang digunakan pada penelitian ini adalah kernel *Gaussian*(RBF) dengan $\gamma = 1$ dan $\gamma = 0.5$. Pada penelitian ini juga dilakukan *Cross validation* agar ditemukannya nilai akurasi terbaik. *Cross Validation* akan membagi menjadi k bagian data dengan rata yang kemudian akan diuji dan k-1 akan dilatih untuk mendapatkan model SVM.

Tabel 1: Akurasi Klasifikasi Kanker paru-paru menggunakan SVM dan Kernel *Gaussian* RBF $\sigma = 1$, serta berbagai fitur dan k bagian data

SVM dengan kernel Gaussian, $\sigma = 1$					
Fitur	k=3	k=4	k=6	k=8	k=10
all	89.65	90.185	88.753	91.001	89.793
50	90.23	89.8375	89.52	89.91125	89.615
100	88.713	89.93	89.92	90.98375	89.527
150	89.653	89.05	89.602	89.58	89.772
200	88.8967	88.925	88.87	87.93	89.68
300	89.653	88.47	90.25	89.28	89.503
500	88.896	90.3325	90.498	89.8325	89.699

Tabel 2: Akurasi Klasifikasi Kanker paru-paru menggunakan SVM dan Kernel *Gaussian* RBF $\sigma = 0.5$, serta berbagai fitur dan k bagian data

SVM dengan kernel Gaussian, $\sigma = 0.5$					
fitur	k=3	k=4	k=6	k=8	k=10
all	90.28	90.095	91.043	89.59	89.421
50	90.28	90.755	90.897	90.875	89.575
100	89.813	89.36	88.382	87.621	89.72
150	89.756	88.8325	90.648	90.155	89.72
200	89.756	90.72	88.24	89.038	89.755
300	90.23	90.58	91.3367	90.897	89.593
500	88.897	89.7825	89.925	91.1025	89.479

4. Kesimpulan

Dari Hasil dan pengujian, dapat dilihat bahwa pada parameter $\sigma = 1$ akurasi tertinggi yaitu sebesar 90.98375% didapat pada k=8 dengan fitur terpilih sebanyak 100 fitur sementara pada parameter $\sigma = 0.5$ akurasi tertinggi yaitu sebesar 91.3367% didapat pada k=6 dengan fitur terpilih sebanyak 300 fitur. Secara

keseluruhan akurasi klasifikasi menggunakan SVM rata-rata berkisar antara 88%-91%. Untuk pengembangan lebih lanjut dapat didiskusikan mengenai klasifikasi lainnya atau tipe kernel lainnya.

Daftar Pustaka

- [1] Tina M. St. John. (2003). *With Every Breath: A Lung Cancer Guidebook*. Vancouver.
- [2] Lung Cancer, [Online], Diakses di: <http://www.cancer.gov/publications/dictionaries/cancer-terms?cdrid=45301> [15 Oktober 2016].
- [3] Matthias Rath, M.D.(2001). *Cellular Health Series: Cancer*. Santa Clara.
- [4] American Cancer Society.(2016). *Global Cancer Facts & Figures 3rd Edition*. Atlanta: American Cancer Society.
- [5] Pusdatin Kementerian Kesehatan RI.(2015). *Info DATIN*. Badan Litbangkes Kementerian Kesehatan RI dan Data Penduduk Sasaran.
- [6] Lam, Michael.(2003). *Beating Cancer with Natural Medical*. Bloomington
- [7] Gomathi M., Dr. P. Thangaraj.(2010). A Computer Aided Diagnosis System for Detection of Lung Cancer Nodules Using Extreme Learning Machine. *IJEST* Vol. 2(10). 5770-5779.
- [8] S. Sivakumar and C. Chandrasekar.(2013). Lung nodule detection using fuzzy clustering and support vector machines. *IJEST* Vol. 5(1). 179–185.
- [9] Al-Absi H. R. H., B. B. Samir, K. B. Shaban, and S. Sulaiman.(2012). Computer aided diagnosis system based on machine learning techniques for lung cancer. *ICCIS*. Vol. 1. 295–300.
- [10] Golub T.R., et al. (1999). Molecular classification of cancer: class discovery and class prediction by gene expression monitoring. *Science* 286. 531–538.
- [11] Fikri. A., Rustam. Z. & Pandelaki. J. (2009). *Brain Cancer (Astrocytoma) Clustering Menggunakan Metode Fuzzy C-Means*. Proc. Seminar Nasional Matematika FMIPA UI. 271-277. Depok.
- [12] Wibowo, P.A., Rustam. Z. & Pandelaki. J. (2010). *Klasifikasi Kanker Otak (astrocytoma) Menggunakan Independent Component Analysis dan Possibilistic c-Means*. Skripsi. Universitas Indonesia.
- [13] Huihui, C. et al. (2016). A kernel-based clustering method for gene selection with gene expression data. *Journal of Biomedical Informatics* Vol. 62. 12–20.
- [14] Frigui H., Nasraoui O.. (2000). Simultaneous clustering and attribute discrimination. *Proc. Fuzzieee* 1. 158–163.
- [15] V.N. Vapnik. 1998. *Statistical Learning Theory*. New York, Wiley.
- [16] Scholkopf B. et al. (1998). An Nonlinear Component Analysis as a Kernel Eigen value Problem. *Neural Computation*. Vol. 10(3). 1299-1319.
- [17] Cristianini N., Taylor J.S.. (2000). *An Introduction to SVMs and Other kernel-based Learning methods*. Cambridge University Press.
- [18] Gunn, S.(1998). *Support Vector Machines for Classification and Regression*. Southampton: University of Southampton
- [19] Yan Li-mei.(2009). *Parameter Selection Problems in Support Vector Machine*. World Congress on Computer Science and Information Engineering.

MODEL ENDEMIK UNTUK TRANSMISI PENYAKIT SCHISTOSOMIASIS PADA POPULASI MANUSIA-SIPUT-CACING

Juni Wjayanti Puspita¹, Rina Ratianingsih², Resnawati³

^{1,2,3}Program Studi Matematika FMIPA, Universitas Tadulako

¹juni.wpuspita@yahoo.com

²ratianingsih@yahoo.com

³r35n4w4t1@yahoo.com

Abstrak

Schistosomiasis adalah penyakit endemik yang disebabkan oleh cacing trematoda dari genus *Schistosoma*. Cacing ini hidup di dalam pembuluh darah vena manusia dan hewan mamalia. Manusia mengalami infeksi *Schistosomiasis* ketika *Cercariae*, suatu tahap infeksi dari *Schistosoma*, dilepaskan oleh siput dan selanjutnya menembus kulit pada waktu manusia masuk ke dalam air yang mengandung *Cercariae*. Setiap spesies dari *Schistosoma* memiliki spesies siput perantara yang berbeda. Di Indonesia, *Schistosomiasis* hanya dapat ditemukan pada 3 daerah di Sulawesi Tengah, yaitu di dataran tinggi Lindu dan lembah Napu dan Besoa. Hal ini disebabkan oleh keberadaan siput *Oncomelania hupensis lindoensis* yang merupakan salah satu jenis siput endemik pada daerah tersebut. Siput ini menjadi hospes perantara bagi cacing *Schistosoma Japonicum*. Model matematika endemik yang merepresentasikan transmisi penyakit *Schistosomiasis* pada populasi manusia, siput dan cacing dikonstruksi dalam penelitian ini. Populasi manusia dikelompokkan ke dalam sub populasi *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* dan *Cronic*, dan populasi cacing *Schistosoma Japonicum* dikelompokkan berdasarkan siklus hidupnya. Sedangkan populasi siput *O.h. lindoensis* mengikuti pertumbuhan logistik. Model tersebut menghasilkan sebuah titik ekuilibrium endemik yang disajikan secara implisit. Kestabilan-koeksistensi dari titik ekuilibrium endemik tersebut dapat ditunjukkan dalam penelitian ini. Simulasi numerik dari model endemik menunjukkan bahwa penyakit *Schistosomiasis* akan menetap dalam populasi.

Kata Kunci: Cacing *Schistosoma Japonicum*, Model Endemik, *Schistosomiasis*, Siput *Oncomelania hupensis lindoensis*, Titik Ekuilibrium Endemik.

1. Pendahuluan

Penyakit *Schistosomiasis* merupakan penyakit kronis yang menjadi masalah di berbagai negara, khususnya di daerah endemik. Penyakit ini dilaporkan menginfeksi 200 juta orang di 74 negara dan mengakibatkan kematian sekitar 20.000 orang per tahun [1]. Kunci dari transmisi penyakit *Schistosomiasis* terletak pada eksistensi *host* perantara bagi cacing dari genus *Schistosoma*, yakni siput air tertentu yang spesifik. Masing-masing spesies cacing memiliki *host* perantara yang berbeda-beda dan hanya dapat ditemukan di beberapa daerah endemik di Afrika, Amerika Selatan, Caribbean, Mediterania Barat, Madagaskar, sebagian negara Timur Tengah, Mauritius, Jepang, Filipina, Cina dan Indonesia. Di Indonesia, penyakit ini hanya dapat ditemukan pada 3 daerah di Sulawesi Tengah, yaitu lembah Napu, Besoa dan dataran tinggi Lindu. Hal ini terkait dengan penyebaran *host* perantara bagi cacing *Schistosoma Japonicum*, yakni siput *Oncomelania hupensis lindoensis*, yang merupakan hewan endemik di daerah tersebut. Daur hidup cacing *S. japonicum* dimulai dari *Cercariae* yang keluar dari tubuh siput dan berenang bebas di air untuk mencari *definitive host*, yakni manusia dan hewan. Selanjutnya menembus kulit dan masuk ke dalam pembuluh darah hingga bertumbuh menjadi cacing dewasa yang disebut *Schistosoma*, kemudian kawin dan menghasilkan telur [2]. Telur dikeluarkan melalui urin dan feses yang selanjutnya menetas menjadi larva mirasidium. Larva ini menembus kulit siput dan berkembang menjadi sporokista I dan II yang akan menghasilkan *Cercariae*.

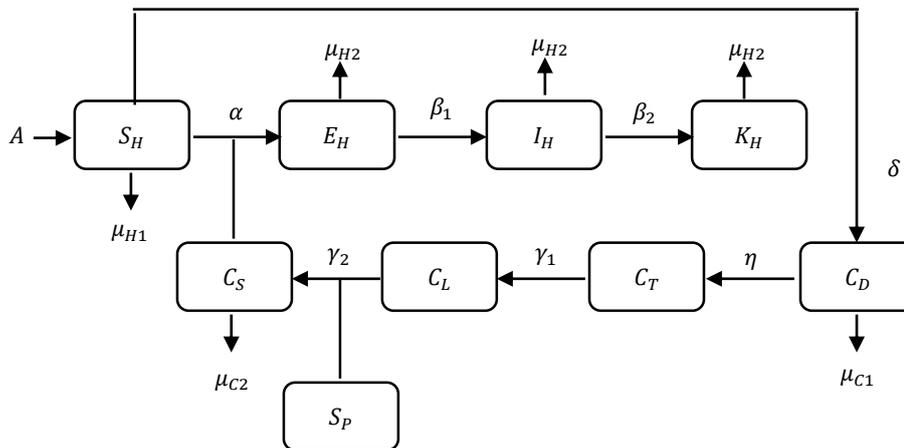
Pemodelan matematika merupakan satu-satunya instrumen yang memungkinkan dilakukannya analisis endemik yang cepat, akurat, murah dan aman. Model transmisi penyakit *Schistosomiasis* di berbagai negara telah jauh berkembang dan mampu menyajikan proses infeksi dan pengendaliannya

secara rinci [3-7]. Model endemik yang melibatkan manusia, siput *O. h. lindoensis* dan cacing *S. Japonicum* untuk transmisi penyakit *Schistosomiasis* akan dibahas disini.

Dalam Penelitian ini, eksistensi dari titik ekuilibrium yang merepresentasikan keendemikan dari penyakit *Schistosomiasis* akan diperoleh. Selanjutnya akan dilakukan analisis dinamik terhadap keendemikan dan kestabilan titik ekuilibrium. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi pada pemahaman penyebaran penyakit *Schistosomiasis* pada daerah endemik.

2. Model Matematika

Model endemik penyebaran penyakit *Schistosomiasis* dalam populasi manusia, siput dan cacing yang dikembangkan dari model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) akan dikaji dalam sesi ini. Populasi manusia dibagi ke dalam 4 buah kompartemen, yaitu individu sehat (S_H), terinfeksi tetapi belum dapat menginfeksi (E_H), terinfeksi dan menginfeksi (I_H) dan individu kronis (K_H). Populasi cacing *Schistosoma Japonicum* akan dikelompokkan berdasarkan siklus hidupnya, yaitu kompartemen cacing dewasa (C_D), telur (C_T), larva mirasidium (C_L) dan *Cercariae* (C_S). Sedangkan populasi Siput *O.h. lindoensis* (S_P) akan mengikuti pertumbuhan logistik, dimana terjadi persaingan antar individu dalam memperebutkan makanan untuk bertahan hidup. Diagram transmisinya dapat dilihat pada Gambar 1. Deskripsi parameter yang terlibat dalam model dapat dilihat dalam Tabel 1, dimana semua parameter bernilai positif. Proses transmisi penyakit *Schistosomiasis* pada penelitian ini mengasumsikan kondisi alami ketika tidak ada penanganan atau pencegahan pada proses transmisi di populasi manusia.



Gambar 1. Diagram Transmisi.

Tabel 1: Parameter dalam model endemik transmisi penyakit *Schistosomiasis*

Parameter	Deskripsi	Nilai
A	Laju kelahiran populasi manusia	1000
α	Laju infeksi oleh <i>Cercariae</i>	$\frac{1}{3 \times 7 \text{ hari}}$
β_1	Laju transisi dari kompartemen E_H ke I_H	$\frac{1}{20 \times 7 \text{ hari}}$
β_2	Laju transisi dari kompartemen I_H ke K_H	$\frac{1}{32 \times 7 \text{ hari}}$
δ	Peluang pertumbuhan <i>Cercariae</i> menjadi cacing dewasa	0.5
η	Laju kelahiran populasi cacing <i>S. Japonicum</i>	$\frac{3000}{2 \text{ hari}}$
γ_1	Peluang bertelur sukses	1
γ_2	Laju infeksi di dalam tubuh siput <i>O.h. lindoensis</i>	0.5
μ_{H1}	Laju kematian natural populasi manusia	$\frac{1}{65 \times 365 \text{ hari}}$

μ_{H2}	Laju kematian akibat infeksi pada populasi manusia	$\frac{1}{50 \times 365 \text{ hari}}$
μ_{C1}	Laju kematian natural populasi cacing <i>S. Japonicum</i>	$\frac{1}{5 \times 365 \text{ hari}}$
μ_{C2}	Laju kematian <i>Cercariae</i> akibat gagal mendapatkan <i>definitive host</i>	$\frac{1}{2 \text{ hari}}$
B	Laju kelahiran populasi Siput <i>O.h. lindoensis</i>	$\frac{1000}{30 \text{ hari}}$
θ	Laju kompetisi pada populasi Siput <i>O.h. lindoensis</i> dalam hal logistic	0.1
μ_S	Laju kematian natural populasi Siput <i>O.h. lindoensis</i>	$\frac{1}{2 \times 365 \text{ hari}}$

Model transmisi penyakit *Schistosomiasis* pada populasi manusia, siput dan cacing yang diperoleh berdasarkan diagram transmisi pada Gambar 1, dapat dituliskan sebagai sistem persamaan diferensial (SPD) berikut ini.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_H}{dt} &= A - \alpha S_H C_S - \mu_{H1} S_H \\
 \frac{dE_H}{dt} &= \alpha S_H C_S - \beta_1 E_H - \mu_{H2} E_H \\
 \frac{dI_H}{dt} &= \beta_1 E_H - \beta_2 I_H - \mu_{H2} I_H \\
 \frac{dK_H}{dt} &= \beta_2 I_H - \mu_{H2} K_H \\
 \frac{dC_D}{dt} &= \delta S_H - \eta C_D - \mu_{C1} C_D \\
 \frac{dC_T}{dt} &= \eta C_D - \gamma_1 C_T \\
 \frac{dC_L}{dt} &= \gamma_1 C_T - \gamma_2 C_L S_p \\
 \frac{dC_S}{dt} &= \gamma_2 C_L S_p - \mu_{C2} C_S \\
 \frac{dS_p}{dt} &= B S_p - \theta S_p^2 - \mu_S S_p
 \end{aligned} \tag{1}$$

dimana $B > \mu_S$. Kestabilan dari titik ekuilibrium dapat diamati melalui nilai eigen yang diperoleh dari linearisasi di sekitar titik ekuilibrium tersebut. Proses linearisasi menghasilkan matriks *Jacobian* yang digunakan untuk menentukan nilai eigen. Titik ekuilibrium yang stabil akan memiliki nilai eigen negatif.

3. Analisis Model

3.1. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium dari SPD (1) dapat diperoleh dengan meninjau pada keadaan stagnan, yaitu dengan menentukan :

$$\frac{dx}{dt} = 0 \tag{2}$$

dimana $\mathbf{x} = (S_H, E_H, I_H, K_H, C_D, C_T, C_L, C_S, S_p)^T$.

Solusi dari sistem (2) sulit untuk disajikan secara eksplisit, sehingga dengan menggunakan bantuan software *Maple* dapat diperoleh titik ekuilibrium yang bergantung pada variabel C_S , sebagai berikut:

$$E = (S_H^*(C_S), E_H^*(C_S), I_H^*(C_S), K_H^*(C_S), C_D^*(C_S), C_T^*(C_S), C_L^*(C_S), S_p^*(C_S))$$

dimana,

$$\begin{aligned}
 S_H^*(C_S) &= \frac{A}{\mu_{H1} + \alpha C_S} > 0 \\
 C_D^*(C_S) &= \frac{A\delta}{\alpha\eta C_S + \alpha C_S \mu_{C1} + \eta\mu_{H1} + \mu_{C1}\mu_{H1}} > 0 \\
 E_H^*(C_S) &= \frac{A\alpha C_S}{\alpha C_S \beta_1 + \alpha C_S \mu_{H2} + \beta_1 \mu_{H1} + \mu_{H1} \mu_{H2}} > 0 \\
 C_T^*(C_S) &= \frac{\alpha\delta\eta}{\gamma_1(\alpha\eta C_S + \alpha C_S \mu_{C1} + \eta\mu_{H1} + \mu_{C1}\mu_{H1})} > 0 \\
 I_H^*(C_S) &= \frac{A\alpha C_S \beta_1}{(\alpha C_S \beta_1 + \alpha C_S \mu_{H2} + \beta_1 \mu_{H1} + \mu_{H1} \mu_{H2})(\beta_2 + \mu_{H2})} > 0
 \end{aligned}$$

$$C_L^*(C_S) = \frac{C_S \mu_{C2} \theta}{\gamma_2 (B - \mu_S)} > 0$$

$$K_H^*(C_S) = \frac{A \alpha C_S \beta_1 \beta_2}{\mu_{H2} (\alpha C_S \beta_1 + \alpha C_S \mu_{H2} + \beta_1 \mu_{H1} + \mu_{H1} \mu_{H2}) (\beta_2 + \mu_{H2})} > 0$$

$$Sp^*(C_S) = \frac{B - \mu_S}{\theta} > 0$$

dengan $C_S^2 + m_1 C_S - m_0 = 0$, dimana $m_0 = \frac{\delta A \eta}{\alpha \eta \mu_{C2} + \alpha \mu_{C1} \mu_{C2}}$, $m_1 = \frac{\eta \mu_{H1} + \mu_{C1} \mu_{H1}}{\alpha \eta + \alpha \mu_{C1}}$. Karena $m_0, m_1 > 0$ dan diskriminan $D = m_1^2 - 4(-m_0) > 0$ maka persamaan dari C_S tersebut pasti mempunyai satu akar positif. Akibatnya titik ekuilibrium E dapat dijamin eksistensinya. Titik E merepresentasikan kehadiran dan mewabahnya penyakit *Schistosomiasis* sehingga titik tersebut disebut titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium lainnya yang menggambarkan kondisi bebas penyakit dapat diperoleh ketika diberikan $C_S = 0$. Akibatnya diperoleh dua buah titik kritis, yaitu $DFE_1 = \left(\frac{A}{\mu_{H1}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)$ dan $DFE_2 = \left(\frac{A}{\mu_{H1}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{B - \mu_S}{\theta}\right)$.

3.2. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan dari titik ekuilibrium ditentukan berdasarkan nilai eigen λ yang diperoleh dari persamaan karakteristik $\det(J - \lambda I) = 0$, dimana J adalah matriks *Jacobian* yang dievaluasi di titik ekuilibrium.

Titik DFE_1 memberikan nilai eigen

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\mu_{H2}, \lambda_3 = -\mu_{H1}, \lambda_4 = -\mu_{C2}, \lambda_5 = -\gamma_1, \lambda_6 = -\beta_1 - \mu_{H2}, \lambda_7 = -\beta_2 - \mu_{H2}, \lambda_8 = -\eta - \mu_{C1} \text{ dan } \lambda_8 = B - \mu_S. \text{ Karena } \lambda_8 > 0 \text{ maka titik } DFE_1 \text{ adalah titik ekuilibrium yang tidak stabil.}$$

Selanjutnya, matriks *Jacobian* yang dievaluasi di titik DFE_2 menghasilkan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$(a_0 \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5)(\lambda + \mu_{H2})(\lambda + \mu_{H2} + \beta_2)(\lambda + \mu_{H2} + \beta_1)(\lambda + B - \mu_S) = 0 \quad (3)$$

dimana

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \frac{(\eta + \gamma_1 + \mu_{C1} + \mu_{C2} + \mu_{H1})\theta + (B - \mu_S)\gamma_2}{\theta} > 0,$$

$$a_2 = \frac{(\eta + \gamma_1 + \mu_{C1} + \mu_{C2} + \mu_{H1})(B - \mu_S)\gamma_2 + \theta((\eta + \mu_{C1} + \mu_{C2} + \mu_{H1})\gamma_1 + (\eta + \mu_{C1} + \mu_{H1})\mu_{C2} + \mu_{H1}(\eta + \mu_{C1}))}{\theta} > 0,$$

$$a_3 = \frac{((\eta + \mu_{C1} + \mu_{C2} + \mu_{H1})\gamma_1 + (\eta + \mu_{C1} + \mu_{H1})\mu_{C2} + \mu_{H1}(\eta + \mu_{C1}))(B - \mu_S)\gamma_2}{\theta} + \left(((\eta + \mu_{C1} + \mu_{H1})\mu_{C2} + \mu_{H1}(\eta + \mu_{C1}))\gamma_1 + \mu_{C2}\mu_{H1}(\eta + \mu_{C1}) \right) > 0,$$

$$a_4 = \frac{(B - \mu_S)((\eta + \mu_{C1} + \mu_{H1})\mu_{C2} + \mu_{H1}(\eta + \mu_{C1}))\gamma_1 + \mu_{C2}\mu_{H1}(\eta + \mu_{C1})\gamma_2 + \theta\mu_{C2}\mu_{H1}\gamma_1(\eta + \mu_{C1})}{\theta} > 0,$$

$$a_5 = \frac{(B - \mu_S)\gamma_1\gamma_2((\eta + \mu_{C1})\mu_{C2} + \mu_{H1}^2 + A\alpha\delta\eta)}{\theta\mu_{H1}} > 0.$$

Persamaan (3) menunjukkan bahwa keempat nilai eigen λ dari model endemik bernilai negatif, yaitu

$$\lambda_1 = -\mu_{H2}$$

$$\lambda_2 = -\mu_{H2} - \beta_2$$

$$\lambda_3 = -\mu_{H2} - \beta_1$$

$$\lambda_4 = -B + \mu_S$$

Titik ekuilibrium DFE_2 akan stabil asimtotik lokal jika kelima nilai eigen λ dari persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = a_0 \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 \quad (4)$$

bernilai negatif. Namun, persamaan (4) sulit untuk diselesaikan. Sehingga kriteria *Routh Hurwitz* diterapkan untuk menentukan kestabilan dari titik ekuilibrium DFE_2 tersebut dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa perlu menghitung akar-akar secara langsung. Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, titik ekuilibrium akan stabil jika syarat perlu dan cukup terpenuhi. Syarat perlu untuk stabil adalah koefisien dari persamaan karakteristik (4) positif dan lengkap, yaitu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$. Sedangkan syarat cukup untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama Tabel 2 bertanda positif [8].

Tabel 2: Tabel *Routh-Hurwitz*

S^5	a_0	a_2	a_4	0
S^4	a_1	a_3	a_5	0
S^3	b_1	b_2	0	0

S^2	c_1	c_2	0	0
S^1	d_1	0	0	0
S^0	e_1	0	0	0

Variabel-variabel pada Tabel 2 didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \quad \mathbf{c}_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}, \quad \mathbf{c}_2 = a_5 > \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}_1 = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{c_1} \quad \text{dan} \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_2 > \mathbf{0}.$$

Variabel-variabel tersebut memiliki bentuk yang kompleks sehingga tidak dapat disajikan secara eksplisit dalam penelitian ini. Namun dengan menggunakan bantuan Software *Maple* diperoleh $\mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1 > \mathbf{0}$ dan $\mathbf{b}_2 < \mathbf{0}$. Akibatnya diperoleh $\mathbf{d}_1 < \mathbf{0}$. Sehingga syarat cukup bagi kriteria *Routh-Hurwitz* tidak terpenuhi. Oleh karena itu, titik ekuilibrium stabil \mathbf{DFE}_2 adalah titik ekuilibrium yang tidak stabil. Ketidakstabilan titik ekuilibrium \mathbf{DFE}_1 dan \mathbf{DFE}_2 mengindikasikan bahwa kondisi bebas penyakit *Schistosomiasis* di daerah endemik tidak akan pernah terjadi.

Jika matriks *Jacobian* dievaluasi dititik ekuilibrium endemik maka akan menghasilkan persamaan karakteristik (3), namun dengan nilai koefisien sebagai berikut:

$$a_0 = \alpha \theta C_S + \theta \mu_{H1} > 0,$$

$$a_1 = (\alpha C_S + \mu_{H1})((\alpha C_S + \eta + \gamma_1 + \mu_{C1} + \mu_{C2} + \mu_{H1})\theta + (B - \mu_S)\gamma_2) > 0,$$

$$a_2 = \left(((B - \mu_S)\gamma_2 + \theta(\eta + \gamma_1 + \mu_{C1} + \mu_{C2}))\mu_{H1} + \alpha((B - \mu_S)\gamma_2 + \theta(\eta + \gamma_1 + \mu_{C1} + \mu_{C2}))C_S + (\eta + \gamma_1 + \mu_{C1} + \mu_{C2})(B - \mu_S)\gamma_2 + \theta((\eta + \mu_{C1} + \mu_{C2})\gamma_1 + \mu_{C2}(\eta + \mu_{C1})) \right) (\alpha C_S + \mu_{H1}) > 0,$$

$$a_3 = \left(((\eta + \gamma_1 + \mu_{C1} + \mu_{C2})\mu_{H1} + \alpha C_S(\eta + \gamma_1 + \mu_{C1} + \mu_{C2}) + (\eta + \mu_{C1} + \mu_{C2})\gamma_1 + \mu_{C2}(\eta + \mu_{C1}))(B - \mu_S)\gamma_2 + ((\eta + \mu_{C1} + \mu_{C2})\gamma_1 + \mu_{C2}(\eta + \mu_{C1}))\mu_{H1} + \alpha((\eta + \mu_{C1} + \mu_{C2})\gamma_1 + \mu_{C2}(\eta + \mu_{C1}))C_S + \gamma_1 \mu_{C2}(\eta + \mu_{C1}) \right) \theta (\alpha C_S + \mu_{H1}) > 0,$$

$$a_4 = (\alpha C_S + \mu_{H1}) \left(((\alpha C_S + \eta + \mu_{C1} + \mu_{H1})\mu_{C2} + (\alpha C_S + \mu_{H1})(\eta + \mu_{C1}))\gamma_1 + \mu_{C2}(\alpha C_S + \mu_{H1})(\eta + \mu_{C1}) \right) (B - \mu_S)\gamma_2 + \gamma_1 \theta \mu_{C2}(\alpha C_S + \mu_{H1})(\eta + \mu_{C1}) > 0,$$

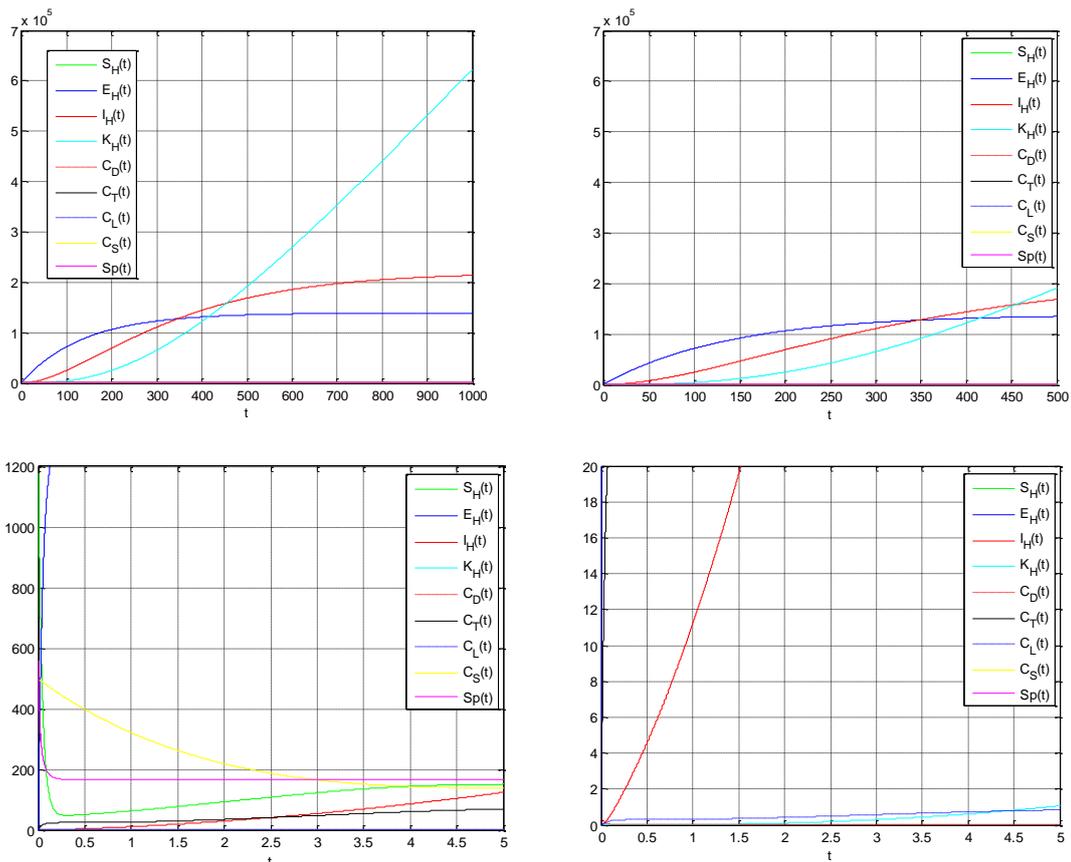
$$a_5 = ((\alpha C_S + \mu_{H1})^2(\eta + \mu_{C1})\mu_{C2} + A\alpha\delta\eta)(B - \mu_S)\gamma_1\gamma_2 > 0.$$

Sama halnya seperti titik ekuilibrium \mathbf{DFE}_2 , titik ekuilibrium endemik akan stabil asimtotik lokal jika kelima nilai eigen λ dari persamaan karakteristik (4) bernilai negatif. Namun, persamaan (4) sulit untuk diselesaikan. Sehingga berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, titik ekuilibrium endemik akan stabil jika syarat perlu dan cukup terpenuhi. Syarat perlu untuk menjamin kestabilan dari titik ekuilibrium endemik dapat dipenuhi, yaitu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$. Sedangkan syarat cukup untuk stabil memiliki bentuk yang kompleks, sehingga tidak dapat disajikan secara eksplisit dalam penelitian ini. Namun dengan menggunakan bantuan Software *Maple* diperoleh $b_1, b_2, c_1, d_1 > 0$. Karena syarat perlu dan cukup bagi kriteria *Routh-Hurwitz* terpenuhi maka dapat dibuktikan bahwa model endemik tersebut stabil asimtotik lokal di sekitar titik ekuilibrium endemiknya. Hal ini mengindikasikan bahwa penyakit *Schistosomiasis* akan terus ada dan menetap di daerah endemic.

3.3. Simulasi Numerik

Untuk melihat dinamika penyebaran penyakit *Schistosomiasis* pada populasi manusia, siput dan cacing, dilakukan simulasi numerik dari model endemik yang telah dikonstruksi menggunakan software *Matlab*. Nilai parameter yang digunakan dalam model tersebut dapat dilihat pada Tabel 1, dengan nilai awal $(S_H(0), E_H(0), I_H(0), K_H(0), C_D(0), C_T(0), C_L(0), C_S(0), Sp(0)) = (1178, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 500, 560)$.

Gambar 2 menunjukkan dinamika dari model endemik transmisi penyakit *Schistosomiasis* pada populasi manusia, siput dan cacing dalam skala yang berbeda agar plot dari masing-masing kompartemen dapat ditampilkan secara detail. Dari gambar 2 terlihat bahwa jumlah sub populasi individu sehat (S_H) akan menurun seiring dengan meningkatnya individu yang terinfeksi (I_H) dan individu kronis (K_H). Jumlah populasi serkaria pun akan menurun (C_S) saat terjadi penurunan jumlah populasi siput (Sp) karena adanya persaingan logistik. Hal ini sesuai dengan kondisi di alam (*real condition*), dimana siput merupakan kunci terjadinya transmisi penyakit *Schistosomiasis*. Semua kompartemen tersebut konvergen ke suatu nilai tertentu (x tidak menuju 0). Kondisi ini mengindikasikan bahwa penyakit *Schistosomiasis* akan menetap di area endemik.



Gambar 2. Simulasi numerik dari model endemik transmisi penyakit *Schistosomiasis*.

4. Kesimpulan

Model endemik untuk transmisi penyakit *Schistosomiasis* pada populasi manusia, siput dan cacing hanya memiliki satu titik ekuilibrium yang stabil-koeksistensi, yakni titik ekuilibrium endemik. Ini mengindikasikan bahwa penyakit *Schistosomiasis* akan terus ada dan menetap di daerah endemik. Oleh karena itu, upaya pengendalian dan pencegahan, seperti pengobatan, pengontrolan siput serta pemberian edukasi kesehatan dan sanitasi akan dipertimbangkan untuk penelitian selanjutnya.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Pusat Riset dan Kreativitas Matematika (PRKM) Program Studi Matematika atas kerjasama selama penelitian berlangsung.

Daftar Pustaka

- [1] Wang, R.B., Wang, T.P., and Wang L.Y., (2008). The Protective Efficacy Against *Schistosoma Japonicum* Infection by Immunization DNA Vaccine and Levamisole as Adjuvant in Mice. *Vaccine*, 26(15): p. 1832-1845.
- [2] Iskandar, T., (2005). Tinjauan Skistosomiasis Pada Hewan dan Manusia di Lembah Napu, Lembah Besoa dan Lembah Danau Lindu Kabupaten Poso Sulawesi Tengah. *Prosiding Lokakarya Nasional Penyakit Zoonosis*, p. 228-234.
- [3] Feng, Z., Li, C., and Fabio, A.M., (2002). Schistosomiasis Models with Density Dependence and Age of Infection in Snail Dynamics. *Elsevier Mathematical Biosciences*, 177: p. 271-286.
- [4] Feng, Z., Eppert, A., Milner, F.A., and Minchella, D.J., (2004). Estimation of Parameters Governing the Transmission Dynamics of Schistosomes. *Elsevier*, p. 1105-1112.
- [5] Chiyaka, E.T., (2010). Modelling Within Host Parasite Dynamics of Schistosomiasis. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 11(3): p. 255-280.
- [6] Longxing, Q., Jing-an, C., Tingting, H., Ye, Fengli, Y., and Longzhi, J., (2014). Mathematical Model of Schistosomiasis Under Flood in Anhui Province. *Hindawi Abstract and Applied Analysis*.

- [7] Zhang, P., Feng, Z., and Milner, F., (2007). A Schistosomiasis Model With an Age-Structure in Human Hosts and Its Application to Treatment Strategies. *Mathematical Biosciences*, 205: p. 83-107.
- [8] Wahab, W., dan Subiantoro A. Fundamental of Control System Stability Criterion-Routh Hurwitz. <http://staff.ui.ac.id/internal/130702176/material/Lecture5-StabilityCriterion-Routh-HurwitzTest20Oct08.pdf>.

MODEL DETERMINISTIK DUA-FASE (STUDI KASUS POPULASI KOTA PEKANBARU)

¹Granita, ²Syamsudhuha

¹Pendidikan Matematika, UIN Suska Riau,
²Prodi. S2 Matematika, FMIPA, Universitas Riau
granitafc@gmail.com

Abstrak

Tulisan ini membahas tentang model pertumbuhan populasi yang diterapkan pada pertumbuhan penduduk Kota Pekanbaru. Model yang biasa dilakukan untuk mendekati pertumbuhan penduduk adalah model deterministik satu-fase. Dalam makalah ini model dua-fase digunakan sebagai perbandingan karena model ini lebih fleksibel. Dari hasil perbandingan diketahui dari beberapa model dua-fase mempunyai nilai RMSE (*root mean square error*) yang lebih kecil dibandingkan dengan model satu-fase terhadap pertumbuhan penduduk Kota Pekanbaru, sedangkan model dua-fase dengan nilai RMSE terkecil digunakan untuk membuat proyeksi kedepan penduduk Kota Pekanbaru.

Kata Kunci: model pertumbuhan penduduk, model dua-fase, proyeksi penduduk.

1. Pendahuluan

Pertumbuhan populasi dimodelkan dengan menggunakan model pertumbuhan populasi. Model yang biasa dipakai adalah model deterministic. Model ini biasanya berbentuk persamaan diferensial. Model pertumbuhan satu-fase lebih populer, seperti fungsi eksponensial, model logistik dan lain-lain [1, 2]. Namun, Banks [2] mengusulkan model deterministik dua-fase untuk pertumbuhan populasi yang mempunyai “*carrying capacity*” atau jumlah optimal. Model ini lebih fleksibel dibandingkan model logistik karena titik beloknya dapat bergerak.

Selain itu, model dua-fase juga dikembangkan oleh Meyer [3], dengan mengusulkan model *bi-logistic* dan menganalisis system yang mempunyai model pertumbuhan logistik dua-fase, yaitu berbentuk tumpang-tindih atau berurutan yang kemudian dikenal dengan taksonomi Meyer. Pendekatan ini kemudian sesuai ketika diaplikasikannya pada pertumbuhan populasi Jepang dan Inggris. Meyer and Ausubel [4] juga menggunakan model logistik dan menganggap *carryng capacity* sebagai fungsi dari populasi. Lebih jauh model multi-logistik dikembangkan oleh Meyer, et al. [5]. Selanjutnya, Wong and Goh [6] membuat sedikit modifikasi untuk pendekatan Meyer, dengan menggunakan taksonomi dan fungsi logistik yang sederhana dari model *bi-logistic* Meyer. Banyak aplikasi menarik dari model dua-fase telah disajikan diantaranya [6-9].

Dalam tulisan ini nilai *Root Mean Squre Error* (RMSE) digunakan untuk membandingkan antara model satu-fase dengan model-model dua-fase terhadap data penduduk Kota Pekanbaru, nilai yang terkecil menunjukkan model yang paling mendekati dengan pertumbuhan penduduk tersebut. Sebelumnya, pendekatan pada populasi penduduk Kota Pekanbaru telah dilakukan dengan menggunakan model satu-fase, seperti fungsi eksponensial, model geometri, model logistik dan lain-lain [10]. Apabila model pertumbuhan populasi dua-fase memiliki nilai RMSE terkecil maka proyeksi dilakukan untuk melihat pertumbuhan penduduk Kota Pekanbaru.

2. Pembahasan

Pada bagaian ini akan dibahas tentang model satu-fase dan model dua-fase yang di gunakan, kemudian model diaplikasikan pada populasi Penduduk Pekanbaru dan dibandingkan nilai RMSEnya. Adapun asumsi secara umum untuk membangun model pertumbuhan populasi menggunakan asumsi sebagai berikut:

- Menganggap populasi hanya membolehkan kelahiran saja.
- Setiap individu dalam populasi dapat melahirkan individu baru

c) Memiliki suatu kelahiran konstan dengan rata-rata λ persatuan waktu.

Di definisikan N_t adalah jumlah populasi pada waktu t .

Ada empat model pertumbuhan penduduk satu-fase yang digunakan sebagaimana dalam Marcus-Roberts and Thompson [1] adalah

$$\text{Model 1:} \quad \frac{dN_t}{dt} = \lambda, N_t = n_0 + \lambda t \quad (2.1)$$

$$\text{Model 2:} \quad \frac{dN_t}{dt} = \lambda N_t, N_t = n_0 e^{\lambda t} \quad (2.2)$$

$$\text{Model 3:} \quad \frac{dN_t}{dt} = \lambda(k - N_t), N_t = k - (k - n_0)e^{-\lambda t} \quad (2.3)$$

$$\text{Model 4:} \quad \frac{dN_t}{dt} = \lambda N_t \left(\frac{k - N_t}{k} \right), N_t = \frac{kn_0}{n_0 + (k - n_0)e^{-\lambda t}} \quad (2.4)$$

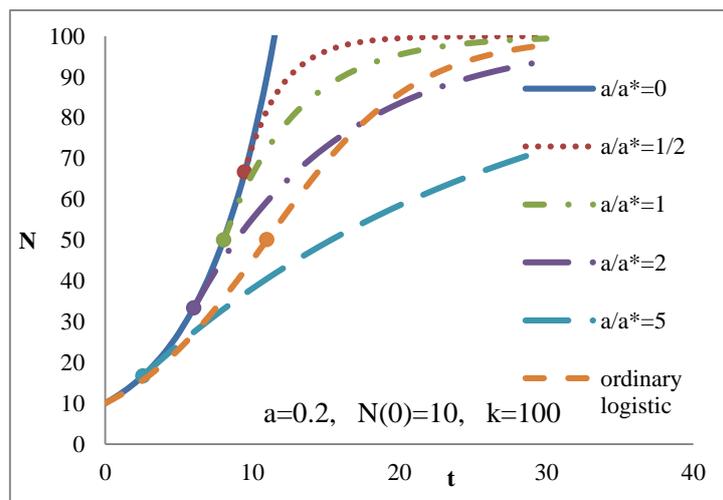
Keempat model ini akan dibandingkan dengan model dua-fase, dari grafik pertumbuhan penduduk Pekanbaru maka model dua-fase yang digunakan mengikuti model yang diusulkan oleh Banks [2].

Model dua-fase tersebut dibangun dengan melakukan kombinasi antara dua model satu-fase. Pada fase pertama, merepresentasikan fungsi eksponensial pada suatu periode waktu yang rata-rata pertumbuhan meningkat. Sementara, fase kedua merepresentasikan distribusi eksponensial terbatas ketika rata-rata pertumbuhan menurun, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Fase pertama:} \quad & \frac{dN_t}{dt} = aN_t, N_t = n_0 e^{at} \\ \text{dan fase kedua:} \quad & \frac{dN_t}{dt} = a^*(k - N_t), N_t = k - (k - N_i)e^{-a^*(t-t_i)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

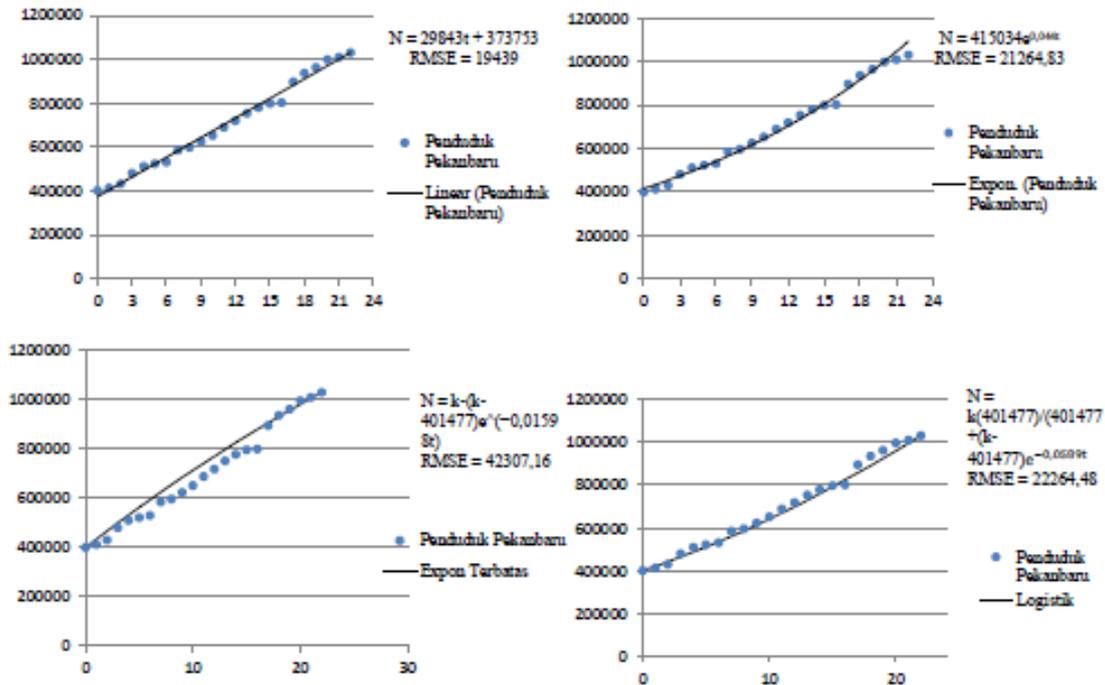
Dengan kondisi awal sebagai berikut: (1) $N_t = N_0, t = 0$ and (2) $N_t = N_i, t = t_i$.

Nilai ordinat N_i (nilai awal fase kedua/titik belok) and kemiringan, $\left(\frac{dN}{dt}\right)_i$ memerlukan titik yang sesuai untuk kedua model. Dalam Gambar 2.1, titik *solid* menunjukkan titik belok, di mana kurva eksponensial tampaknya menjadi tempat kedudukan titik-titik ini. Dalam gambar juga terlihat model dua-fase lebih fleksibel dibandingkan model logistik.



Gambar 2.1 Kombinasi fungsi eksponensial dan distribusi exponential terbatas [2]

Sebelum membahas model dua-fase akan diperlihatkan beberapa model deterministik satu-fase, hasilnya dapat dilihat pada gambar dibawah ini; (dengan nilai “*carrying capacity*” $k = 2529040$ diperoleh dari [10])



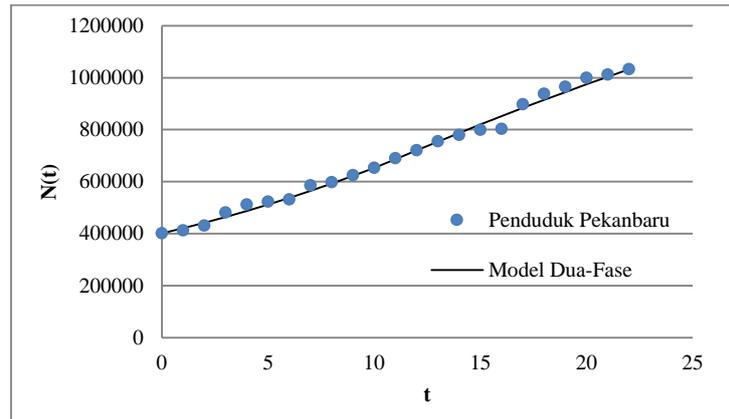
Gambar 2.2. Pendekatan empat model deterministik terhadap pertumbuhan populasi penduduk Kota Pekanbaru dari tahun 1993-2015 dan nilai RMSE masing-masing.

Model dua-fase untuk pendekatan penduduk Pekanbaru dilakukan dengan mengikuti rumus pada Persamaan (2.5). Dalam makalah ini pemilihan titik belok untuk model dua-fase berdasarkan nilai (RMSE) terkecil yang diperoleh antara model dengan pertumbuhan penduduk Pekanbaru. Beberapa Nilai RMSE untuk model dua-fase disajikan pada Tabel 2.1 bersama beberapa nilai titik belok, nilai kemiringan fase-pertama dan fase-kedua.

Tabel 2.1. Beberapa nilai titik belok dan nilai RMSE dari model dua-fase untuk mendekati penduduk Kota Pekanbaru.

t_i	N_i	a	a^*	RMSE	
2001	8	597971	0,049799	0,01819	18321,52
2002	9	625313	0,049234	0,018493	17360,88
2003	10	653435	0,048793	0,018793	16952,93
2004	11	689834	0,049059	0,01872	16857,01
2005	12	720197	0,048698	0,018928	16812,79
2006	13	754467	0,048528	0,018905	16943,36
2008	15	799213	0,045898	0,0206586	21659,91
2010	17	897768	0,047339	0,171898	17236,85

Setelah diperoleh titik belok dengan RMSE terkecil maka model dua-fase untuk pendekatan pertumbuhan penduduk Kota Pekanbaru dari tahun 1993-2015 dapat dilihat pada Gambar 2.3 berikut.



Gambar 2.3. Model dua-fase untuk pendekatan penduduk Kota Pekanbaru dengan titik belok pada tahun ke-12 (2005) dengan nilai RMSE 16812,79.

Proyeksi kedepan dilakukan dengan menggunakan model dua-fase cara yang telah disajikan yaitu model dengan titik belok pada tahun 2005. Pada Tabel 2.2. hasil proyeksi menunjukkan bahwa jumlah penduduk Kota Pekanbaru selama 15 tahun kedepan terus meningkat yaitu 1032118 jiwa pada tahun 2015 menjadi 1402111 pada tahun 2030.

Tabel 2.2. Proyeksi penduduk Kota Pekanbaru 2016-2030 menggunakan model dua-fase

Tahun	Jumlah Penduduk
2016	1060185
2017	1087725
2018	1114749
2019	1141267
2020	1167287
2021	1192819
2022	1217873
2023	1242457
2024	1266580
2025	1290251
2026	1313477
2027	1336269
2028	1358633
2029	1380578
2030	1402111

Proyeksi yang disajikan dalam tulisan ini dimaksud untuk mengetahui data tentang pertumbuhan penduduk dimasa yang akan datang dengan menggunakan model dua-fase yang akan terus melambat menuju suatu titik *carrying capacity* atau jumlah optimum penduduk. Pada penelitian kedepan, model ini dapat digunakan untuk memperkirakan tahun terjadi jumlah optimum penduduk Kota Pekanbaru, yang juga berguna untuk mempersiapkan kebijakan apa yang akan dilakukan apabila penduduk mendekati optimum.

Daftar Pustaka

- [1] H. Marcus-Roberts and M. Thompson, *Life science models*: Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] R. B. Banks, *Growth and diffusion phenomena: mathematical frameworks and applications*: Springer-Verlag Berlin, 1996.
- [3] P. Meyer, "Bi-logistic growth," *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 47, pp. 89-102, 1994.
- [4] P. S. Meyer and J. H. Ausubel, "Carrying capacity: a model with logistically varying limits," *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 61, pp. 209-214, 1999.

- [5] P. S. Meyer, J. W. Yung, and J. H. Ausubel, "A primer on logistic growth and substitution: the mathematics of the Loglet Lab software," *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 61, pp. 247-271, 1999.
- [6] C.-Y. Wong and K.-L. Goh, "Catch-up models of science and technology: A theorization of the Asian experience from bi-logistic growth trajectories," *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 95, pp. 312-327, 2015.
- [7] D. Kucharavy and R. De Guio, "Logistic substitution model and technological forecasting," *Procedia Engineering*, vol. 9, pp. 402-416, 2011.
- [8] D. Kucharavy and R. De Guio, "Application of S-shaped curves," *Procedia Engineering*, vol. 9, pp. 559-572, 2011.
- [9] J. E. Sheehy, P. Mitchell, and A. B. Ferrer, "Bi-phasic growth patterns in rice," *Annals of botany*, vol. 94, pp. 811-817, 2004.
- [10] Granita, "Proyeksi Penduduk Pekanbaru 2015-2035 menggunakan model deterministik," *Prosiding SEMASTAT 2016*, pp. 95-103, 2016.

DEKOMPOSISI MINIMUM MATRIKS DOSIS UNTUK MENGOPTIMALKAN PENDISTRIBUSIAN DOSIS RADIASI PADA *INTENSITY MODULATED RADIATION THERAPY (IMRT)*

Wisnu Wardana, Siti Aminah, Kiki Ariyanti Sugeng

Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Indonesia,
wisnu.matematika.ui@gmail.com, aminah@sci.ui.ac.id, kiki@sci.ui.ac.id

Abstrak

Penelitian ini dimotivasi oleh mesin *multileaf collimator (MLC)* yang berfungsi untuk mendistribusikan dosis-dosis radiasi yang dihimpun dalam matriks dosis pada pengembangan metode pengobatan kanker dengan radioterapi, yaitu *Intensity Modulated Radiation Therapy (IMRT)*. MLC tidak bisa mengirimkan semua bentuk matriks dosis, sehingga perlu dilakukan suatu dekomposisi matriks agar MLC bisa mengirimkan dosis radiasi. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mencari cara mendekomposisikan matriks dosis yang dapat dikirim oleh MLC serta mengoptimalkan pendistribusian dosis radiasi. Algoritma Greedy dianggap sebagai algoritma yang paling optimal untuk mendekomposisikan matriks dosis menjadi matriks yang dapat didistribusikan oleh MLC. Akan tetapi ada kasus dimana Algoritma Greedy memberikan hasil yang kurang optimal, sehingga penulis mencoba untuk memodifikasi Algoritma Greedy yang menghasilkan dekomposisi yang lebih optimal.

Kata Kunci : dekomposisi matriks; kardinalitas dekomposisi; matriks dosis; *multileaf collimator (MLC)*; waktu dekomposisi.

Minimize Dose Matrix Decomposition to Optimize Dose Distribution in IMRT

Abstract

This research was motivated by the multileaf collimator (MLC) machine, which serves to distribute the doses of radiation that is collected in the matrix dosage in the development of treating cancer methods with radiotherapy that is Intensity Modulated Radiation Therapy (IMRT). MLC can not send all form of matrix dosage, so we need some matrix decomposition that MLC can transmit the radiation dose. Therefore, this study aimed to find the ways how to decompose matrix dosage that can be delivered by the MLC and optimize the distribution of radiation dose. Greedy algorithms are considered as the most optimal algorithm for decomposing the matrix into matrix dosage that can be distributed by the MLC. There are some cases where the Greedy algorithms provide the less optimal results. Thus, in this reseach the algorithm is modified to obtain the more optimal result.

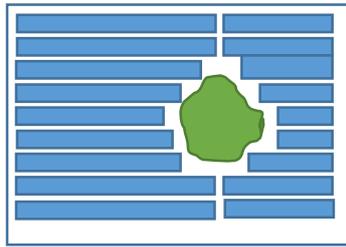
Keyword : dose matrix, matrix decomposition, decomposition time, decomposition cardinality, Multileaf Collimator (MLC).

1. Pendahuluan

IMRT merupakan mode lanjutan radioterapi presisi tinggi yang memanfaatkan akselerator linier yang dikendalikan oleh komputer untuk memberikan dosis radiasi yang tepat untuk menghancurkan sel kanker. Tujuan dari IMRT ini yaitu untuk memfokuskan radiasi sehingga radiasi yang dikirim ke wilayah yang ditargetkan untuk membunuh sel-sel kanker cukup dan bisa mempertahankan fungsi organ sekitarnya (organ yang beresiko terkena radiasi). Di dalam IMRT ini ada bagian mesin yang berfungsi untuk mengirimkan dosis radiasi yaitu *Multileaf Comilator (MLC)* (Wilson, 2008).

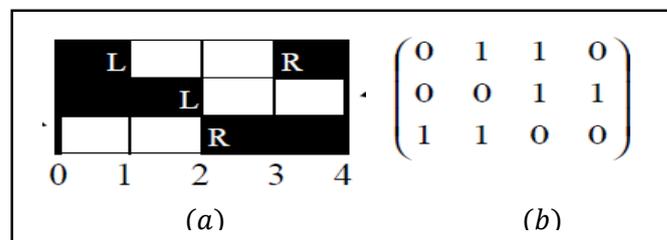
MLC didiskritisasi ke dalam balok-balok kecil yang disebut daun MLC. Daun MLC terbagi atas 2 bagian, yaitu daun kiri dan daun kanan. Daun MLC bisa dikendalikan secara bebas satu sama lain dengan mikroprosesor. Daun-daun MLC juga bisa mengubah medan radiasi serta mengirimkan dosis radiasi yang terhimpun dalam matriks dosis, dengan cara menutup dan menahan sinar radiasi dengan daun MLC dan

meneruskan sinar radiasi yang sesuai dengan target radiasi. Pada Gambar 1 diberikan gambar sketsa dari MLC.



Gambar 1. Sketsa Multileaf Collimator 1

Secara teknis daun-daun dari MLC berfungsi untuk menahan pancaran sinar radiasi sehingga MLC hanya menerima perintah diberikan radiasi atau tidak diberikan radiasi. Jika direpresentasikan dalam bentuk matriks maka elemen matriks adalah bilangan biner 0 atau 1, dimana elemen 0 merepresentasikan daerah yang ditutup oleh daun MLC dan elemen 1 merepresentasikan daerah yang tidak ditutup oleh daun MLC. Pada Gambar 2 diberikan gambaran dari konsep MLC



Gambar 2. (a) Konsep kerja daun MLC; (b) Representasi matriks kerja daun MLC

Pada Gambar 2 (a) menunjukkan konsep kerja daun MLC, dimana daun MLC direpresentasikan oleh blok berwarna hitam yang memiliki arti bahwa daerah yang ditutup oleh daun MLC adalah daerah yang tidak diberikan dosis radiasi. Huruf "L" menunjukkan bahwa daun MLC tersebut merupakan daun dari kiri, sedangkan huruf "R" menunjukkan bahwa daun MLC berasal dari daun kanan. Gambar 2 (b) menunjukkan matriks yang merepresentasikan Gambar 2 (a).

Karena MLC hanya menerima perintah diberikan radiasi atau tidak diberikan radiasi maka dosis radiasi yang bisa didistribusikan oleh MLC hanyalah dosis radiasi seragam, sehingga MLC tidak bisa mengirimkan semua bentuk matriks dosis (matriks yang merepresentasikan berapa banyak dosis radiasi yang diperlukan). Sedangkan dosis radiasi yang perlu diberikan pada target belum tentu sama. Oleh karena itu perlu dilakukan suatu dekomposisi matriks dosis sedemikian sehingga MLC bisa mengirimkan dosis radiasi dalam bentuk matriks dosis hasil dekomposisinya. Hasil dekomposisi matriks dosis akan merepresentasikan perubahan bentuk MLC sedemikian sehingga bisa merepresentasikan dosis radiasi yang sesuai untuk daerah target (Romeijn, 2009).

Dekomposisi matriks adalah penguraian matriks menjadi beberapa matriks yang lebih sederhana. Matriks dosis perlu di dekomposisikan menjadi matriks-matriks yang dapat dikirim oleh MLC. Walaupun demikian, banyak cara mendekomposisikan matriks dosis ke dalam bentuk matriks yang bisa dikirim oleh MLC. Perbedaan cara yang mungkin terjadi pada dekomposisi matriks terletak pada banyaknya matriks hasil dekomposisinya yang selanjutnya disebut kardinalitas dekomposisi yang merepresentasikan banyaknya perubahan bentuk MLC dan jumlah total koefisien dari dekomposisinya yang selanjutnya disebut waktu dekomposisi yang merepresentasikan total dosis radiasi yang diberikan. Kardinalitas dan waktu dekomposisi sangat penting untuk masalah optimalitas pengiriman dosis radiasi. Semakin kecil kardinalitas dan waktu dekomposisi maka pendistribusian dosis radiasi akan semakin optimal. Dengan mempertimbangkan permasalahan di atas, dalam penelitian ini akan dipelajari suatu bentuk dekomposisi yang akan meminimumkan masalah waktu dan kardinalitas dekomposisi, juga memperhatikan bentuk dekomposisi yang sesuai dengan MLC (Baatar dkk, 2005).

2. Matriks Shape

2.1. Matriks Dosis

Matriks dosis merupakan matriks yang merepresentasikan jumlah waktu radiasi seragam yang dilepaskan pada setiap piksel (Boland dkk., 2004). Daerah pada target radiasi dibagi ke dalam kotak-kotak kecil yang disebut piksel. Setiap elemen pada matriks dosis merepresentasikan waktu atau intensitas radiasi yang perlu diberikan pada piksel yang bersesuaian. Matriks dosis ini bisa diperoleh dengan pendekatan multikriteria untuk perencanaan terapi radiasi dari Hamacher dan Kufer. Beberapa matriks dosis ditampilkan sebagai *grayscale* berupa piksel. Pada Gambar 3 ditunjukkan contoh matriks dosis dan *grayscale* nya



Gambar 3. Contoh matriks dosis [Sumber: Baatar dkk, 2005]

Dosis radiasi yang terhimpun dalam matriks dosis didistribusikan oleh suatu mesin di dalam *Intensity Modulated Radiation Therapy* (IMRT) yang disebut *Multileaf Collimator* (MLC). MLC tidak bisa mendistribusikan semua matriks dosis. Hanya matriks dosis yang berupa matriks *consecutive one* (C1) yang bisa di kirim oleh MLC. Oleh karena itu matriks dosis perlu didekomposisi menjadi matriks-matriks C1. Berikut ini diberikan definisi matriks C1.

2.2. Matriks C1 (Hamacher, 2007):

Misalkan \mathbb{N} adalah bilangan bulat positif dan misalkan $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ dengan $M \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ dengan $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, maka matriks $Y \in M_{M \times N}(\mathbb{B})$ disebut matriks C1 (*consecutive one*) jika terjadi keterurutan elemen satu dalam setiap baris, yaitu untuk semua $m \in \mathcal{M}$ berlaku $1 \leq i < j \leq N$, yaitu

$$\text{jika } y_{mi} = 1 = y_{mj} \text{ maka } y_{mk} = 1, \text{ untuk } i \leq k \leq j, \quad (1)$$

dimana $k \in \mathcal{N}$ dan kasus $y_{mn} = 0 \forall n \in \mathcal{N}$, dan $y_{mi} = 1$ untuk tepat satu $i \in \mathcal{N}$ diperbolehkan.

Untuk lebih jelasnya perhatikan Gambar 4 berikut ini.



Gambar 4. (a) Contoh matriks C1; (b) Contoh bukan matriks C1

Pada Matriks di Gambar 4(a) terlihat bahwa terjadi keterurutan elemen 1 pada baris pertama, ke dua dan ke tiga, sedangkan pada Gambar 4(b) tidak terjadi keterurutan elemen satu pada baris ke-2 karena elemen satu muncul pada kolom pertama kemudian diselingi oleh elemen nol dan muncul kembali pada kolom ke empat.

2.3. Daftar Interval Krusial

Daftar interval krusial dari suatu matriks $A = (a_{mn})$ bisa didapatkan dengan mendefinisikan matriks baru $\tilde{A} = (\tilde{a}_{mn})$ yang didefinisikan sebagai berikut.

2.4. Matriks \tilde{A} (Baatar dkk, 2005)

Misalkan $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N + 1\}$ dan diberikan matriks integer $A = (a_{mn})$ berukuran $M \times N$, maka dapat didefinisikan matriks $\tilde{A} = (\tilde{a}_{mn})$ berukuran $M \times (N + 1)$ dengan $\tilde{a}_{mn} = a_{mn} - a_{m,n-1} \quad \forall m \in \mathcal{M} \text{ dan } \forall n \in \mathcal{N}$, dimana

$$a_{m0} = a_{m,N+1} = 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

Dari matriks \tilde{A} dapat ditentukan daftar interval krusial yang dijelaskan dengan definisi sebagai berikut.

2.5. Daftar Interval Krusial (Baatar dkk, 2005)

$\forall m \in \mathcal{M}$, misalkan $\mathcal{P}_m = \{l : \tilde{a}_{ml} > 0\}$ dan $\mathcal{L}_m = \{r : \tilde{a}_{mr} < 0\}$

Maka $\mathcal{T}_m = \{[l, r] : l \in \mathcal{P}_m \text{ dan } r \in \mathcal{L}_m\}$ adalah daftar interval krusial.

Untuk sebarang matriks $L = (a_{mn}^l)$ dan $R = (a_{mn}^r)$ yang mengakibatkan $\tilde{A} = L - R$, berlaku definisi daftar interval krusial alternative sebagai berikut.

$$\mathcal{T}_m = \{[p, q] : p \in \mathcal{P}_m \text{ dan } q \in \mathcal{L}_m\}, \text{ dengan} \quad (2)$$

$$\mathcal{P}_m = \{p : a_{mp}^l > 0\} \text{ dan } \mathcal{L}_m = \{q : a_{mq}^r > 0\} \quad (3)$$

Daftar interval inilah yang akan menentukan pembentukan matriks hasil dekomposisi. (Hamacher, 2007)

2.6. Representasi Matriks C1 menggunakan Interval Krusial

Matriks C1 dapat di representasikan dalam bentuk interval krusial. Dengan kata lain interval krusial ini adalah interval-interval pembentuk matriks C1.

Misalkan

$\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N + 1\}$ dan $Y^k = (y_{mn}^k)$ adalah matriks-matriks C1, maka $\forall Y^k, \exists l_m^k \in \mathcal{N}$ dan $r_m^k \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga

$$y_{mn}^k = 1 \iff l_m^k \leq n < r_m^k, \quad \forall m \in \mathcal{M}. \quad (4)$$

Dengan menggunakan interval $[p, q] := \{i \in \mathcal{N} : p \leq i < q\}$, matriks Y^k bisa ditulis sebagai

$$Y^k = Y([l_m^k, r_m^k])_{m \in \mathcal{M}} \quad (5)$$

Berikut ini diberikan contoh representasi matriks dengan interval krusial.

Contoh

Misalkan

$Y^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Perhatikan matriks Y^1 , untuk $m = 1$, berdasarkan persamaan (5)

$y_{1n} = 1 \iff 1 \leq n < 4$, diperoleh $l_1^1 = 1$ dan $r_1^1 = 4$, sehingga interval krusialnya yaitu $[1, 4)$ dan untuk $m = 2$, berdasarkan persamaan (5)

$y_{2n} = 1 \iff 1 \leq n < 4$, diperoleh $l_2^1 = 1$ dan $r_2^1 = 4$, sehingga interval krusialnya yaitu $[1, 4)$. Matriks Y^1 bisa di representasikan dalam interval-interval krusial sebagai berikut

$$Y^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = Y \left(\begin{bmatrix} [1, 4) \\ [1, 4) \end{bmatrix} \right).$$

2.7. Dekomposisi Matriks

Misalkan \mathcal{K} adalah himpunan indeks dari semua matriks C1 berordo $M \times N$ dan $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$. Diberikan matriks $A = (a_{mn})$ berordo $M \times N$ dimana $a_{mn} \in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$, akan dicari dekomposisi ke dalam matriks C1 yang baik dengan α_k , $k \in \mathcal{K}'$ dan matriks C1 yang berordo $M \times N$ yaitu Y^k sedemikian sehingga $A = \sum_{k \in \mathcal{K}'} \alpha_k Y^k$.

2.8. Waktu Dekomposisi ($DT(\alpha)$)

Masalah waktu dekomposisi pada penelitian ini dinyatakan dalam jumlahan koefisien matriks-matriks hasil dekomposisinya. Waktu dekomposisi ini merepresentasikan waktu penyinaran radiasi seragam yang diberikan pada setiap perubahan bentuk MLC yang sesuai dengan representasi matriks hasil dekomposisinya. Berikut ini diberikan Definisi waktu dekomposisi.

2.9. Waktu Dekomposisi (Baatar dkk, 2005)

Misalkan $A = \sum_{k \in \mathcal{K}'} \alpha_k Y^k$, maka waktu dekomposisi $DT(\alpha)$ didefinisikan sebagai

$$DT(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}'} \alpha_k$$

2.10. Kardinalitas Dekomposisi ($DC(\alpha)$)

Kardinalitas dekomposisi ini memuat banyaknya matriks-matriks hasil dekomposisinya

2.11. $DC(\alpha) := |\{\alpha_k : \alpha_k > 0\}|$

Dalam aplikasinya kardinalitas dekomposisi ini menentukan berapa kali mesin melakukan perubahan bentuk MLC.

2.12. Matriks Shape (Baatar dkk, 2005)

Misalkan \mathbb{N} adalah bilangan asli dan $M, N, l_m, r_m \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$Y = Y([l_m, r_m])_{m \in \mathcal{M}}$ adalah matriks *consecutive one* (C1) berukuran $M \times N$ yang dibangun oleh interval krusial $[l_m, r_m]$, misalkan pula $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, \dots, M\}$ maka $Y = Y([l_m, r_m])_{m \in \mathcal{M}}$ disebut matriks *shape* jika $l_{m-1} \leq r_m$ dan $r_{m-1} \geq l_m$ dipenuhi untuk $m = 2, 3, \dots, M$.

Diberikan contoh pada Gambar 5 berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

Gambar 5. (a) Contoh matriks *shape* ; (b) Contoh bukan matriks *shape*

Pada Gambar 5 (a) terlihat bahwa diantara dua baris tak nol yang berdekatan, tidak ada deretan nol dari kiri dan dari kanan yang saling tumpang tindih, sedangkan pada Gambar 5 (b) ada dua baris tak nol yang berdekatan yang saling tumpang tindih yaitu pada baris ke dua dan ke tiga dimana deretan nol dari kanan pada baris kedua dengan deretan nol dari kiri pada baris ke tiga saling tumpang tindih yakni pada kolom ke dua dan kolom ke tiga.

3. Faktorisasi Matriks Dosis Pada IMRT

Syarat suatu matriks dapat didekomposisi menjadi matrik-matriks C1, dijelaskan pada Teorema 1 berikut ini.

Teorema 1 (Baatar dkk, 2005)

Misalkan $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N + 1\}$, \mathcal{K} adalah himpunan indeks dari semua matriks C1 berukuran $M \times N$ dan \tilde{A} adalah matriks yang didefinisikan pada Definisi 2, maka $A = (a_{mn})$ mempunyai dekomposisi dalam $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ dengan waktu dekomposisi $DT(\alpha)$ jika dan hanya jika terdapat matriks $L = (\alpha_{mn}^l)$ dan $R = (\alpha_{mn}^r)$ ukuran $M \times (N + 1)$ dengan L dan R bukan matriks nol sedemikian sehingga

$$L - R = \tilde{A} \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{m-1,k}^l \geq \sum_{k=1}^n \alpha_{mk}^r \quad \forall m \in \mathcal{M} - \{1\}, \forall n \in \mathcal{N} \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{mk}^l \geq \sum_{k=1}^n \alpha_{m-1,k}^r \quad \forall m \in \mathcal{M} - \{1\}, \forall n \in \mathcal{N} \quad (8)$$

$$DT(\alpha) = \sum_{k \in \mathcal{K}'} \alpha_k = \sum_{n \in \mathcal{N}} \alpha_{pn}^l = \sum_{n \in \mathcal{N}} \alpha_{mn}^r \quad \forall p, m \in \mathcal{M} \quad (9)$$

Berdasarkan Teorema 1, penyelesaian masalah waktu dekomposisi ekuivalen dengan menemukan pasangan matriks bilangan bulat tak nol L dan R yang berkaitan dengan solusi optimalnya.

α_{mn}^l dan α_{mn}^r dapat direpresentasikan dalam bentuk $\tilde{\alpha}_{mn}^l$ dan $\tilde{\alpha}_{mn}^r$ dengan menggunakan variabel baru w_{mn} .

$$\begin{aligned} \alpha_{mn}^l &= \tilde{\alpha}_{mn}^l + w_{mn} \\ \alpha_{mn}^r &= \tilde{\alpha}_{mn}^r + w_{mn} \end{aligned}$$

dimana $w_{mn} \geq 0$ dan menyatakan bilangan bulat.

Menurut persamaan (9) total waktu dekomposisinya adalah

$$\sum_{k=1}^{N+1} \alpha_{mk}^l = \sum_{k=1}^{N+1} \tilde{\alpha}_{mk}^l + \sum_{k=1}^{N+1} w_{mk} = DT_m + \sum_{k=1}^{N+1} w_{mk}$$

dimana m adalah indeks sebarang baris dari matriks $A = (a_{mn})$. Kemudian akan digunakan Teorema 6 untuk memformulasikan masalah waktu dekomposisi sebagai masalah *Integer Linear Programming* (DT-IP) untuk memperoleh variable w_{mk} yang meminimumkan waktu dekomposisi (DT) sebagai berikut:

$$\text{Min } DT(\alpha)$$

dengan syarat :

$$DT_m + \sum_{k=1}^{N+1} w_{mk} = DT(\alpha) \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{m-1,k}^l + \sum_{k=1}^n w_{m-1,k} \geq \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{mk}^r + \sum_{k=1}^n w_{mk} \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall m \in \mathcal{M} - \{1\} \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{mk}^l + \sum_{k=1}^n w_{m,k} \geq \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{m-1,k}^r + \sum_{k=1}^n w_{m-1,k} \quad \forall n \in \mathcal{N}, \forall m \in \mathcal{M} - \{1\} \quad (12)$$

$$w_{mn} \geq 0, w_{mn} \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathcal{N}.$$

Perhatikan bahwa formulasi dari (DT-IP) *redundant* karena persamaan (10) bisa diperoleh dari persamaan (11) dan (12) dengan $n = N + 1$ sehingga persamaan (10) dapat dihilangkan. Meminimumkan $DT(\alpha)$ ekuivalen dengan meminimumkan $\sum_{k=1}^{N+1} w_{mk}$ untuk sembarang pemilihan $m \in \mathcal{M}$. (DT-IP) ekuivalen dengan

$$\min \sum_{k=1}^{N+1} w_{mk}$$

dengan syarat

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{m-1,k}^l + \sum_{k=1}^n w_{m-1,k} &\geq \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{mk}^r + \sum_{k=1}^n w_{mk} & \forall n \in \mathcal{N}, \forall m \in \mathcal{M} - \{1\}; \\ \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{m,k}^l + \sum_{k=1}^n w_{m,k} &\geq \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{m-1,k}^r + \sum_{k=1}^n w_{m-1,k} & \forall n \in \mathcal{N}, \forall m \in \mathcal{M} - \{1\}; \\ w_{mn} &\geq 0 \text{ dimana } w_{mn} \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Lema 2 berikut menjelaskan tentang pendekatan solusi layak lain untuk memperoleh waktu dekomposisi minimum dengan *integer programming*.

Lema 2 (Baatar et al, 2005)

Misalkan $W = (w_{mn})$ adalah solusi layak dari (DT-IP). Jika untuk sembarang kolom p , $w_p = (w_{1p}, w_{2p}, \dots, w_{Mp})^T$, ada $\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_M)^T \geq 0$ sedemikian sehingga $w_p \geq \bar{w}$ dan

$$\sum_{k=1}^p \tilde{\alpha}_{m-1,k}^l + \sum_{k=1}^{p-1} w_{m-1,k} + \bar{w}_{m-1} \geq \sum_{k=1}^p \tilde{\alpha}_{mk}^r + \sum_{k=1}^{p-1} w_{mk} + \bar{w}_m \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^p \tilde{\alpha}_{m,k}^l + \sum_{k=1}^{p-1} w_{m,k} + \bar{w}_m \geq \sum_{k=1}^p \tilde{\alpha}_{m-1,k}^r + \sum_{k=1}^{p-1} w_{m-1,k} + \bar{w}_{m-1} \quad (14)$$

Untuk semua $m = 2, \dots, M$ maka mengganti kolom w_p dengan \bar{w} dan w_{p+1} dengan $w_{p+1} + w_p - \bar{w}$, akan menghasilkan solusi layak dari (DT-IP) dengan nilai dari fungsi tujuan yang sama dengan W .

Berdasarkan Lema 2, (DT-IP) diselesaikan secara rekursif dengan menyelesaikan (SP_n) sebagai berikut.

$$\min \begin{pmatrix} w_{1n} \\ w_{2n} \\ \vdots \\ w_{Mn} \end{pmatrix}$$

dengan syarat:

$$DTL_{m-1}^n + w_{m-1,n} \geq DTR_m^n + w_{mn} \quad \forall m \in \mathcal{M} - \{1\} \quad (15)$$

$$DTL_m^n + w_{m,n} \geq DTR_{m-1}^n + w_{m-1,n} \quad \forall m \in \mathcal{M} - \{1\} \quad (16)$$

$$w_{mn} \geq 0, w_{mn} \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

dimana

$$DTL_m^n = \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{mk}^l + \sum_{k=1}^{n-1} w_{mk}^*, \quad DTR_m^n = \sum_{k=1}^n \tilde{\alpha}_{mk}^r + \sum_{k=1}^{n-1} w_{mk}^* \quad (17)$$

Dengan $(w_{1k}^*, w_{2k}^*, \dots, w_{mk}^*)^T$ adalah solusi optimal dari (SP_k)

$$DTL_m^n \geq DTR_m^n \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (18)$$

Jika untuk sebarang dekomposisi matriks *shape* mempertahankan persamaan (7), (8) dan (9), maka matriks residual dari matriks L dan R akan merepresentasikan dekomposisinya.

Matriks residual dari matriks L dan R adalah matriks $\bar{A} = (\bar{a}_{mn})$ dan $\hat{A} = (\hat{a}_{mn})$ berukuran $(M-1) \times N$ yang didefinisikan oleh

$$\bar{a}_{mn} = \sum_{k=1}^n \alpha_{mk}^l - \sum_{k=1}^n \alpha_{m+1,k}^r \text{ dan} \quad (19)$$

$$\hat{a}_{mn} = \sum_{k=1}^n \alpha_{m+1,k}^l - \sum_{k=1}^n \alpha_{mk}^r, \quad (20)$$

untuk semua $m \in \mathcal{M} - \{M\}$ dan $n \in \mathcal{N} - \{N+1\}$.

Matriks residual akan digunakan sebagai syarat pemilihan interval krusial yang akan membangun matriks hasil dekomposisi. Kondisi (7), (8), dan (10) untuk matriks residual dari matriks L, R dan A bisa dituliskan dalam \bar{A} dan \hat{A} sebagai berikut.

$$\bar{a}_{mn} \geq \alpha, \quad \forall n : l_m \leq n < r_{m+1}, \quad \forall m \in \mathcal{M} - \{M\} \quad (21)$$

$$\hat{a}_{mn} \geq \alpha, \quad \forall n : l_{m+1} \leq n < r_m, \quad \forall m \in \mathcal{M} - \{M\} \quad (22)$$

$$a_{mn} \geq \alpha, \quad \forall n : l_m \leq n < r_m, \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (23)$$

dimana α adalah koefisien yang berhubungan dengan dekomposisi matriks *shape* $Y([l_m, r_m])_{m \in \mathcal{M}}$. Sebelum matriks dosis di dekomposisikan, perlu dicari penyelesaian permasalahan untuk memperoleh koefisien maksimum sebagai berikut.

max α

dengan kendala:

$$(21) - (23)$$

$$l_m \leq r_{m+1} \quad \forall m \in \mathcal{M} - \{M\} \quad (24)$$

$$l_{m+1} \leq r_m \quad \forall m \in \mathcal{M} - \{M\} \quad (25)$$

$$l_m \leq r_m \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (26)$$

$$\alpha_{ml_m}^l \geq \alpha \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (27)$$

$$\alpha_{mr_m}^r \geq \alpha \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (28)$$

$$l_m, r_m \in \mathcal{N} \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

Dengan menyelesaikan permasalahan pemrograman bilangan bulat SP_n serta didukung oleh Teorema 1 maka dijamin waktu dekomposisinya akan minimum. Sedangkan penyelesaian masalah mencari koefisien maksimum yaitu agar angka kardinalitas dekomposisinya cukup kecil, karena semakin besar koefisien yang dipilih pada dekomposisi maka semakin kecil kardinalitas dekomposisinya.

Algoritma Dekomposisi Matrik *Shape*

Dalam subbagian ini akan dijelaskan mengenai Algoritma untuk mendapatkan hasil dekomposisi matriks dosis menjadi matriks-matriks *shape*. Sebelumnya akan dijelaskan terlebih dahulu Algoritma untuk menyelesaikan masalah SP_n , kemudian dijelaskan Algoritma Greedy untuk memperoleh matriks-matriks hasil dekomposisinya. Algoritma Greedy dianggap sebagai algoritma yang paling baik untuk mendekomposisikan matriks dosis (Baatar et al, 2005). Penyelesaian masalah SP_n akan memperoleh matriks W yang meminimumkan waktu dekomposisi matrik *shape*. Kemudian hasil penyelesaian masalah SP_n akan digunakan pada Algoritma Greedy. Untuk memperoleh solusi dari masalah SP_n , digunakan Algoritma 3.1 sebagai berikut.

Algoritma 3.1

```

Input      :  $\tilde{L}$  and  $\tilde{R}$ 
Output     :  $w_{mn}$ ,  $\forall m = 1, \dots, M$ 
Function A(p) :
    If  $DTL_{p-1}^n + w_{p-1,n} < DTR_p^n + w_{p,n}$ 
        Then  $w_{p-1,n} = DTR_p^n - DTL_{p-1}^n + w_{p,n}$ 
    If  $p \geq 3$ 
        Then  $p = p - 1$ 
        A(p)
    End If
End If
End Function

For  $n = 1$  to  $N + 1$  do
     $w_{mn} = 0 \quad \forall m = 1, \dots, M$ 
    For  $m = 2$  to  $M$  do
        Calculate  $DTL_m^n, DTR_m^n$  according (3.13)
        If  $DTL_m^n + w_{mn} \leq DTR_{m-1}^n + w_{m-1,n}$ 
            then  $w_{mn} = DTR_{m-1}^n - DTL_m^n + w_{m-1,n}$ 
            else A(m)
        end if
    End For

```

Algoritma ini menghasilkan solusi untuk permasalahan SP_n dengan cara:

1. Memisalkan solusi awalnya yaitu 0.
2. Memeriksa apakah dengan solusi awal tersebut sudah memenuhi persamaan (13), Jika belum, maka solusi awal tadi diubah agar persamaan (13) bisa terpenuhi. Cara mengubah solusi awal ini yaitu dengan menyetarakan persamaan (13) dan dengan memanipulasi aljabar dapat diperoleh bagaimana cara mengubah solusi awal tadi. Setelah solusi awal tadi diubah, persamaan (14) tidak perlu diperiksa karena pengubahan solusi awal dengan teknik seperti itu akan mengakibatkan persamaan (14) juga terpenuhi.
3. Jika persamaan (13) sudah terpenuhi, maka diperiksa apakah sudah memenuhi persamaan (14). Ide pengubahan solusi awalnya sama dengan pengubahan solusi awal untuk persamaan (13).

Algoritma 3.1 dijalankan berdasarkan kolom matriks. Pada setiap satu kolom akan dijalankan Algoritma 3.1 ini. Jadi untuk memperoleh seluruh solusi permasalahan SP_n digunakan Algoritma 3.1 sebanyak jumlah kolom matriks \tilde{L} . Algoritma ini juga akan melakukan looping sebanyak jumlah baris dari matriks \tilde{L} -1 kali pada setiap kolom.

Hasil Algoritma 3.1 selanjutnya akan digunakan pada Algoritma Greedy untuk memperoleh matriks-matriks hasil dekomposisi matriks dosis yang meminimumkan waktu dekomposisinya. Dekomposisi matriks dosis menjadi matriks-matriks *shape* bisa diperoleh dengan menggunakan Algoritma 3.2 (Greedy) sebagai berikut.

Algoritma 3.2 Greedy

Input : Matrix A

Output : Decomposition of A into shape matrices.

(1) Compute $DT(\alpha)$ and matrices L and R using Algorithm 3.1(2) Compute \bar{A}, \hat{A} according to (3.14) and (3.15)(3) Set $k = 0$ and initialize

$$\alpha = \min_{m \in \mathcal{M}, \delta \in \{l, r\}} \max_{n \in \mathcal{N}} \alpha_{mn}^{\delta}$$

(4) While $DT(\alpha) \neq 0$ do(4.1) If $\alpha \neq 1$ Then For $m = 1$ to M do

$$I_m = \{[p, q] : (3.18), (3.21) - (3.23)\}$$

If $I_m = \emptyset$ Then GO TO (4.9)

End For

(4.2) $m = 1$ (4.3) While $m \neq M$ doIf $m \leq 1$ Then

$$m = 1$$

$$[l_1, r_1] = \text{lexmin}\{[p, q] : [p, q] \in I_1\}$$

End If

Remove intervals $[p, q]$ with $q < l_m$ from I_{m+1} If $I_{m+1} = \{\emptyset\}$ Then GO TO (4.9)Find $\text{lexmin}\{[p, q] : [p, q] \in I_{m+1}\}$ such that

$$l_m \leq q, p \leq r_m$$

$$\bar{a}_{mn} \geq \alpha \text{ for all } n : l_m \leq n < q$$

$$\hat{a}_{mn} \geq \alpha \text{ for all } n : p \leq n < r_m$$

If such an interval $[p, q]$ existThen $m = m + 1$

$$[l_m, r_m] = [p, q]$$

Else

$$I_m = I_m \setminus \{[l_m, r_m]\}$$

If $I_m = \{\emptyset\}$ Then GO TO (4.9)Else $m = m - 1$

End If

End While (4.3)

(4.4) Set $k = k + 1$.(4.5) Extract *shape* matrix $Y^k = Y([l_m, r_m])_{m \in \mathcal{M}}$ With coefficient $\alpha_k = \alpha$.(4.6) Update $A, L, R, \bar{A}, \hat{A}$.(4.7) Set $DT(\alpha) = DT(\alpha) - \alpha_k$ (4.8) For $m = 1$ to M do

Remove interval which do not satisfy

$$(33), (37), (38) \text{ from } I_m$$

End For

If $I_m \neq \emptyset$ for all $m \in \mathcal{M}$ Then GO TO (4.2)Else Extract *shape* matrices until $DT(\alpha) = 0$

(use leftmost non zero elemen of L and R)

End If

(4.9) $\alpha = \alpha - 1$

(4.10) End While (4)

(5). End

Algoritma Greedy ini dibangun atas gagasan yang secara intuitif jika waktu dekomposisi $DT(\alpha)$ kecil dan koefisien-koefisien dari dekomposisinya rata-rata besar, maka kardinalitas dekomposisinya akan kecil. Berdasarkan gagasan inilah dalam Algoritma ini pertama akan diselesaikan masalah (DT-IP) untuk

memperoleh matriks L dan R yang bisa meminimumkan $DT(\alpha)$. Lalu pada setiap kali mendekomposisikan matriks akan dipilih kemungkinan koefisien yang paling besar.

Langkah (1) digunakan untuk memperoleh waktu dekomposisi yang paling minimum, Langkah (2) digunakan untuk memperoleh matriks \bar{A}, \hat{A} dengan tujuan untuk mengecek syarat dari Teorema 1 dari residual matriks L dan R. Langkah (3) digunakan untuk memilih kemungkinan koefisien dekomposisi yang paling besar tetapi tetap menjaga kesesuaian dekomposisinya. Langkah (4) adalah cara mendekomposisikan matriks dosis menjadi matriks *shape*. Langkah (4.1) digunakan untuk memeriksa syarat untuk memilih Interval krusial yang bisa memaksimumkan koefisien-koefisien dekomposisinya. Langkah (4.2) dan (4.3) digunakan untuk memilih interval krusial sebagai calon matriks-matriks *shape* hasil dekomposisinya. Langkah (4.4) dan (4.5) digunakan untuk membentuk matriks *shape* hasil dekomposisi. Langkah (4.6) digunakan untuk memperbaharui matriks-matriks yang digunakan dalam dekomposisi ini setelah mendapatkan beberapa hasil dekomposisinya. Langkah (4.7)-(4.9) digunakan untuk mempersiapkan dan mengulangi prosedur Algoritma Greedy dengan matriks-matriks yang sudah diperbaharui.

3.3 Modifikasi Algoritma Greedy untuk Dekomposisi Matriks *Shape*

Algoritma Greedy (Algoritma 3.2 Greedy) mempunyai kekurangan, yaitu jika matriks L atau matriks R yang diperoleh dari Algoritma 3.1 mempunyai baris yang semua elemennya satu maka pemilihan α pada langkah (3) di Algoritma Greedy ini kurang maksimal karena α yang akan terpilih adalah satu yang mengakibatkan banyaknya matriks dekomposisinya akan bertambah banyak sehingga bentuk dekomposisinya kurang efektif. Sedangkan masih terdapat kemungkinan pemilihan α yang lebih besar dari satu sehingga bisa membuat kardinalitas dekomposisi lebih kecil. Untuk mengatasi masalah tersebut penulis sedikit memodifikasi Algoritma Greedy pada langkah 3.1, dimana jika pada calon pemilihan α terdapat angka satu, maka angka satu ini akan dieliminasi dari daftar calon pemilihan α sehingga α yang akan terpilih bukanlah satu. Jika matriks L atau matriks R yang diperoleh dari Algoritma 3.1 mempunyai baris yang semua elemennya satu maka akan berpengaruh pada matriks \bar{A} atau \hat{A} yang akan memiliki baris yang semua elemennya satu juga. Sehingga pemilihan α pada modifikasi ini juga akan berpengaruh pada cara pemilihan interval yang akan menjadi interval krusial pada langkah (4.3) pada Algoritma Greedy. Dengan demikian langkah (4.3), syarat pemilihan calon interval krusial

$$\begin{aligned} \bar{a}_{mn} &\geq \alpha, \forall n : l_m \leq n < q, \\ \hat{a}_{mn} &\geq \alpha, \forall n : p \leq n < r_m \end{aligned}$$

akan dihilangkan jika terdapat baris yang semua elemennya satu pada matriks \bar{A} atau \hat{A} di modifikasi Algoritma ini. Modifikasi Algoritma ini akan menghasilkan waktu dekomposisi yang sama dengan Algoritma Greedy akan tetapi kardinalitas dekomposisi yang diperoleh akan lebih kecil dari Algoritma Greedy sehingga pendistribusian matriks dosisnya akan lebih efektif.

Perbandingan Output Algoritma Greedy dan Modifikasi Greedy

Berikut ini diberikan tabel perbandingan Algoritma Greedy dan Algoritma Modifikasi Greedy.

Tabel 1. Perbandingan Algoritma Greedy dan Algoritma modifikasi Greedy

Matriks Input	Algoritma Greedy			Algoritma Modifikasi Greedy		
	$DT(\alpha)$	$DC(\alpha)$	Total	$DT(\alpha)$	$DC(\alpha)$	Total
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	3	3	6	3	2	5
$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$	9	5	14	9	4	13
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	11	7	18	11	6	17

Dari perbandingan diatas terlihat bahwa Algoritma Modifikasi Greedy mempunyai kardinalitas dekomposisi yang lebih kecil jika dibandingkan Algoritma Greedy. Perbedaan satu angka saja dalam kardinalitas dekomposisi suatu dekomposisi matriks dosis akan sangat berpengaruh besar dalam optimalisasi distribusi dosis karena satuan dari waktu dekomposisi dan kardinalitas dekomposisinya adalah menit, sehingga semakin besar kardinalitas dekomposisinya maka akan semakin lama waktu perubahan bentuk MLC yang dibutuhkan.

4. Kesimpulan

Matriks yang dapat didistribusikan oleh MLC yaitu matriks-matriks *shape*. Cara memfaktorisasikan matriks dosis yaitu mencari waktu dekomposisi yang paling minimum, kemudian difaktorisasikan berdasarkan interval krusial yang dipilih berdasarkan syarat-syarat yang memenuhi kriteria matriks *shape* serta memilih koefisien sebesar mungkin. Modifikasi Algoritma Greedy pada pemilihan koefisien awal lebih optimal dari Algoritma Greedy, dimana kardinalitas dekomposisi Modifikasi Algoritma Greedy lebih kecil dibandingkan Algoritma Greedy.

5. Ucapan Terima Kasih

Sebagian dari hasil penelitian ini dibiayai oleh Hibah PUPT UI 2016.

Daftar Pustaka

- [1] Baatar.D, Hamacher. H, Ehrgoot. M, Woeginger. G. 2005. Decomposition of integer matrices and multileaf collimator sequencing. *Discrete Applied Mathematics* 152, 6-34.
- [2] Boland, N, Hamacher, H.W, Lenzen F. 2004. Minimizing Beam-On Time in Cancer Radiation Treatment Using Multileaf Collimator. *Networks*, Vo. 43 (4), 226-240
- [3] Hamacher, H. 2007. Integer and Linear Programs involving Consecutive-1 Matrices. Diunduh dari http://home.deib.polimi.it/malucell/didattica/AOD/2007_03_12_Milano.pdf
- [4] Romeijn, E. 2009. Optimization problems for radiation therapy treatment planning. 3rd Nordic Optimization Symposium. KTH, Stockholm, *Sweden*. March 13–14, 2009.
- [5] Wilson A, 2010. Cancer center adding LINAC New teknologi helps in fight against cancer. *The New Herald: US*

MODIFIKASI VARIAN METODE NEWTON DENGAN ORDE KONVERGENSI DELAPAN

Wartono¹, Atika Novia Yoma²

^{1,2}Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau,
wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Varian metode Newton [3], merupakan salah satu metode iterasi dengan orde konvergensi kuartik dan melibatkan empat evaluasi fungsi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Makalah ini membahas pengembangan varian metode Newton dengan menggunakan bentuk kuadratur. Berdasarkan hasil kajian diperoleh metode iterasi baru dengan orde konvergensi delapan yang melibatkan empat evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar $8^{1/4} \approx 1,68179$. Simulasi numerik menunjukkan bahwa metode yang diusulkan mempunyai performa lebih baik dibandingkan metode Newton, metode Potra-Ptak, metode Komposit Potra-Ptak dan Newton-Steffensen dan modifikasi metode Ostrowski.

Kata Kunci: Aturan kuadratur, orde konvergensi, persamaan nonlinear, varian metode Newton.

1. Pendahuluan

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang semakin maju, mendorong munculnya berbagai persoalan matematis yang rumit dalam bentuk persamaan nonlinear yang hampir sebagian besar tidak dapat diselesaikan secara analitik.

Oleh karena itu, penyelesaian alternatif dari persamaan nonlinear dilakukan dengan menggunakan komputasi berulang yang disebut metode iterasi. Pada makalah ini, penulis mempertimbangkan metode iterasi untuk menentukan akar sederhana dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$ dengan $f: I \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ adalah fungsi real pada interval terbuka I .

Salah satu metode iterasi yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear adalah metode Newton dengan orde konvergensi kuadratik yang ditulis:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

Pada saat ini, beberapa peneliti mengembangkan metode iterasi yang orde konvergensinya lebih tinggi dari metode Newton dengan menggunakan berbagai pendekatan, seperti: metode dekomposisi Adomian [2, 3], metode analisis homotopi [4], kelengkungan kurva [8], fungsi kuadratik [5, 11, 13, 14], parabola dan hiperbola [1].

Metode iterasi yang dikonstruksi dengan menggunakan pendekatan tersebut menghasilkan metode iterasi berorde konvergensi paling rendah tiga dan melibatkan paling sedikit tiga evaluasi fungsi, termasuk metode iterasi yang dihasilkan oleh Chun [3] untuk $m = 2$ dengan orde konvergensi empat dan melibatkan empat evaluasi fungsi.

Menurut Traub [14], metode iterasi yang demikian dikatakan tidak optimal. Oleh karena itu, untuk mengoptimalkan metode iterasi perlu dilakukan reduksi terhadap jumlah evaluasi fungsi yang digunakan [6, 7, 9, 10, 12].

Makalah ini membahas modifikasi varian metode Newton [3] dengan mereduksi jumlah evaluasi fungsi menggunakan teknik yang dilakukan oleh Chun dan Ham [7]. Selanjutnya, simulasi numerik diberikan untuk melihat performa metode iterasi baru dengan menggunakan beberapa fungsi.

2. Metode yang Dikembangkan

2.1. Metode Iterasi

Selanjutnya, pertimbangkan kembali varian metode Newton yang dihasilkan oleh Chun [3] dengan orde

konvergensi empat sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - 2 \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(y_n)f'(y_n)}{[f'(x_n)]^2} \quad (2)$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3)$$

Persamaan (2) merupakan varian metode Newton yang melibatkan empat evaluasi fungsi, yaitu $f(x)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ dan $f'(y_n)$ dengan indeks efisiensinya sebesar $4^{1/4} \approx 1,4142$.

Untuk mengoptimalkan orde konvergensi Persamaan (2), maka $f'(y_n)$ direduksi menggunakan teknik yang dilakukan oleh Chun dan Ham [7] dengan bentuk

$$f'(y_n) \approx \frac{f'(x_n)f(x_n)^2}{f(x_n)^2 + 2f(x_n)f(y_n) + f(y_n)^2}. \quad (4)$$

Substitusikan Persamaan (4) ke Persamaan (2), maka diperoleh metode iterasi dua langkah,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{2f(y_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(y_n)f(x_n)^2}{f'(x_n)[f(x_n)^2 + 2f(x_n)f(y_n) + f(y_n)^2]}. \quad (5)$$

Persamaan (5) merupakan metode iterasi dua langkah yang melibatkan tiga evaluasi fungsi, yaitu $f(x)$, $f'(x_n)$, dan $f(y_n)$.

Untuk meningkatkan orde konvergensi metode iterasi (5), selanjutnya dilakukan penambahan langkah ketiga bentuk Newton dalam z_n yang ditulis

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (6)$$

yang mana $f'(z_n)$ diaproksimasi menggunakan Kuadratur [12,15] dalam bentuk

$$\begin{aligned} f'(z_n) = & - \frac{1}{(-y_n + x_n)^2(-z_n + y_n)(z_n - x_n)} \\ & \times [(-z_n + y_n)^2(-z_n + x_n)(-y_n + x_n)f'(x_n) - (x_n - y_n)^2(2y_n - 3z_n + x_n)f(z_n) \\ & + (x_n - z_n)^3 f(y_n) - (y_n - z_n)^2(3x_n - 2y_n - z_n)f(x_n)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Substitusikan Persamaan (7) ke Persamaan (6), maka diperoleh secara lengkap skema metode iterasi tiga langkah sebagai berikut:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (8)$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{2f(y_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(y_n)f(x_n)^2}{f'(x_n)[f(x_n)^2 + 2f(x_n)f(y_n) + f(y_n)^2]}, \quad (9)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)[(-y_n + x_n)^2(-z_n + y_n)(z_n - x_n)]}{-Af(x_n) + Bf(y_n) - Cf(z_n) + Df'(x_n)}, \quad (10)$$

dengan

$$A = (y_n - z_n)^2(3x_n - 2y_n - z_n), \quad B = (x_n - z_n)^3, \quad C = (x_n - y_n)^2(2y_n - 3z_n + x_n), \quad \text{dan}$$

$$D = (-z_n + y_n)^2(-z_n + x_n)(-y_n + x_n).$$

Persamaan (8) – (9) merupakan metode iterasi tiga langkah yang melibatkan empat evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f(z_n)$ dan $f'(x_n)$,

2.2. Orde Konvergensi

Untuk menentukan orde konvergensi dari metode iterasi (8) – (10) dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang diberikan pada teorema berikut:

Teorema 1. Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar dari fungsi $f: I \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ untuk suatu interval terbuka, dan asumsikan bahwa f mempunyai turunan pada interval I . Jika x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke α , maka metode iterasi pada Persamaan (8) – (10) memiliki orde konvergensi delapan yang

memenuhi persamaan galat berikut:

$$e_{n+1} = \frac{1}{c_2^3} (8c_2^2 - c_3) (c_2^2 (264c_2^6 - 513c_3c_2^4 + c_4c_2^3 + 384c_3^2c_2^2 - 128c_3^3) + 16c_3^4) e_n^8 + O(e_n^9), \quad (11)$$

dengan $c_j = \left(\frac{1}{j!} \right) \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \dots$ dan $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti. Misalkan α adalah akar persamaan nonlinear $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$. Misalkan $e_n = x_n - \alpha$, maka dengan ekspansi deret Taylor terhadap $f(x)$ dan $f'(x)$ disekitaran α untuk $x = x_n$ masing-masing diberikan oleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + \dots + O(e_n^9)), \quad (12)$$

dan

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + \dots + O(e_n^9)), \quad (13)$$

dengan

$$c_j = \left(\frac{1}{j!} \right) \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan Persamaan (12) dan (13) ke Persamaan (8), diperoleh

$$y_n = \alpha + c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + \dots + O(e_n^9). \quad (14)$$

Gunakan Persamaan (14) dan ekspansi deret Taylor terhadap $f(x)$ disekitaran α untuk $x = y_n$, maka diperoleh $f(y_n)$ yang diberikan oleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2e_n^2 + 2(c_3 - c_2^2)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + \dots + O(e_n^9)). \quad (15)$$

Kemudian dengan menggunakan Persamaan (12), (13) dan (15) maka diperoleh

$$\frac{2f(y_n)}{f'(x_n)} = 2c_2e_n^2 + (-8c_2^2 + 4c_3)e_n^3 + (26c_2^3 + 6c_4 - 28c_2c_3)e_n^4 + \dots + O(e_n^9) \quad (16)$$

dan

$$\frac{f(y_n)f(x_n)^2}{f'(x_n)[f(x_n)^2 + 2f(x_n)f(y_n) + f(y_n)^2]} = c_2e_n^2 + (2c_3 - 6c_2^2)e_n^3 + \dots + O(e_n^9). \quad (17)$$

Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan Persamaan (16) dan (17) ke Persamaan (9) maka diperoleh z_n dalam bentuk

$$z_n = \alpha + (-c_2c_3 + 8c_2^3)e_n^4 + (-12c_2c_4 - 62c_2^4 + 70c_2^2c_3 - 8c_3^2)e_n^5 + \dots + O(e_n^9). \quad (18)$$

Selanjutnya ekspansi $f(x)$ dengan menggunakan deret Taylor disekitaran α untuk $x = z_n$ diberikan oleh

$$f(z_n) = f'(\alpha)((-c_2c_3 + 8c_2^3)e_n^4 + (-12c_2c_4 - 62c_2^4 + 70c_2^2c_3 - 8c_3^2)e_n^5 + (34c_3c_4 + 296c_2^3c_3 - 116c_2^2c_3^2 - 84c_2^2c_4 - 112c_2^5)e_n^6 + \dots + O(e_n^9)). \quad (19)$$

Selanjutnya dengan menggunakan $x_n = e_n + \alpha$, Persamaan (14) dan (19), maka diperoleh

$$(-y_n + x_n)^2(-z_n + y_n)(-z_n + x_n) = c_2e_n^5 + (2c_3 - 4c_2^2)e_n^6 + \dots + O(e_n^9), \quad (20)$$

$$A = 3c_2^2e_n^6 + (-11c_2^3 + 12c_2c_3)e_n^7 + \dots + O(e_n^9), \quad (21)$$

$$B = c_2e_n^5 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^6 + (3c_4 + 5c_2^3 - 7c_2c_3)e_n^7 + \dots + O(e_n^9), \quad (22)$$

$$C = (-c_2c_3 + 8c_2^3)e_n^7 + (-12c_2c_4 - 62c_2^4 + 70c_2^2c_3 - 8c_3^2)e_n^8 + O(e_n^9), \quad (23)$$

dan

$$D = c_2^2e_n^6 + (4c_2c_3 - 3c_2^3)e_n^7 + (6c_2c_4 - 15c_2^2c_3 - 8c_2^4 + 4c_3^2)e_n^8 + O(e_n^9). \quad (24)$$

Substitusikan Persamaan (12), (13), (15) dan (20) – (24) ke Persamaan (10), maka diperoleh orde konvergensi dari metode iterasi baru yang diberikan oleh

$$e_{n+1} = \frac{1}{c_2^3} (8c_2^2 - c_3) (c_2^2 (264c_2^6 - 513c_3c_2^4 + c_4c_2^3 + 384c_3^2c_2^2 - 128c_3^3) + 16c_3^4) e_n^8 + O(e_n^9). \quad (25)$$

Persamaan (25) menunjukkan bahwa orde konvergensi dari metode iterasi (8) – (10) adalah delapan yang melibatkan empat evaluasi fungsi. Berdasarkan definisi indeks efisiensi [14], maka metode iterasi baru mempunyai indeks efisiensi sebesar $8^{1/4} \approx 1,68179$.

2.3. Simulasi Numerik

Untuk menguji performa dari metode iterasi pada (8) – (10), dilakukan simulasi numerik untuk menentukan jumlah iterasi dan orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC) dari metode iterasi baru (MVN8) dan metode iterasi lainnya yang dibandingkan, yaitu: metode Newton (N) dengan orde konvergensi tiga [14], metode Potra-Ptak (PP) dengan orde konvergensi tiga [16], metode modifikasi Potra-Ptak dan Newton-Steffensen (MPPNS) dengan orde konvergensi empat [18], metode modifikasi Ostrowski (MO) dengan orde konvergensi enam [17]. Semua perhitungan komputasi dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak Maple 13.00 dan 800 digit aritmetik.

Pada simulasi numerik ini, penulis menggunakan delapan fungsi real dengan akar-akar persamaan α yang ditampilkan sebanyak 16 desimal dan tebakan awal x_0 diambil cukup dekat dengan α . Adapun fungsi-fungsi yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^5 + x^4 + 4x^2 - 15, \alpha \approx 1,3474280989683050, \\ f_2(x) &= (x - 1)^8 - 1, \alpha = 2,0000000000000000, \\ f_3(x) &= 10x \cdot \exp(-x^2 - 1), \alpha \approx 1,6796306104284499, \\ f_4(x) &= \sqrt{x} - x, \alpha \approx 1,0000000000000000, \\ f_5(x) &= \exp(-x^2 + x + 2) - \cos(x + 1) + x^3 + 1, \alpha = -1,0000000000000000, \\ f_6(x) &= \cos(x) - x, \alpha \approx 0,7390851332151606, \\ f_7(x) &= (x - 1)3 - 2, \alpha \approx 2,2599210498948732, \\ f_8(x) &= x^2 - (1 - x)^{25}, \alpha \approx 0,1437392592997537. \end{aligned}$$

Perhitungan akar-akar pendekatan dari metode iterasi akan berhenti jika memenuhi kriteria sebagai berikut:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \quad (26)$$

dengan $\varepsilon = 10^{-15}$. Sedangkan orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC) digunakan rumusan sebagai berikut:

$$\rho \approx \frac{\ln|(x_{n+2} - \alpha) / (x_{n+1} - \alpha)|}{\ln|(x_{n+1} - \alpha) / (x_n - \alpha)|}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Tabel 1 menunjukkan jumlah iterasi yang digunakan untuk setiap metode iterasi berdasarkan kriteria yang diberikan pada Persamaan (26) dengan mengambil $\varepsilon = 10^{-15}$.

Tabel 1. Perbandingan jumlah iterasi untuk $\varepsilon = 10^{-15}$.

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi				
		N	PP	MPPNS	MO	MVN8
$f_1(x)$	1,6	9	5	4	4	3
$f_2(x)$	2,5	13	8	6	4	4
$f_3(x)$	1,8	9	6	4	4	3
$f_4(x)$	1,5	9	6	4	3	3
$f_5(x)$	-0,65	9	6	5	3	3
$f_6(x)$	1,7	8	6	5	3	3
$f_7(x)$	3	11	7	5	4	3
$f_8(x)$	0,4	11	8	6	5	3

Pada Tabel 1 dapat dilihat bahwa secara umum metode iterasi baru (MVN8) menggunakan iterasi lebih sedikit dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Hal ini menyatakan bahwa metode Iterasi menggunakan aturan kuadratur (MVN8) lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

Untuk menentukan orde konvergensi yang dihitung dengan menggunakan nilai-nilai iterasi (COC) sebagaimana yang dirumuskan pada Persamaan (27) diberikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Perbandingan COC untuk $\varepsilon = 10^{-15}$.

$f(x)$	x_0	COC				
		N	PP	MPPNS	MO	MVN8
$f_1(x)$	1,6	1,99999999	2,99999999	3,99999999	5,99999611	7,99997499
$f_2(x)$	2,5	1,99999999	2,99999999	3,99999999	5,99999146	7,99967848
$f_3(x)$	1,8	2,00000000	3,00000000	3,99999999	5,99999978	7,99999962
$f_4(x)$	1,5	1,99999999	2,99999999	3,99999999	5,99999951	7,99999989
$f_5(x)$	-0,65	2,00000000	3,00000000	3,99999999	5,99999945	8,00000003
$f_6(x)$	1,7	1,99999999	2,99999999	3,99999999	5,99999868	7,99999991
$f_7(x)$	3	1,99999999	2,99999999	3,99999999	5,99951241	7,99822922
$f_8(x)$	0,4	2,00000000	3,00000000	4,00000000	6,00000000	8,00110418

Berdasarkan Tabel 2 dapat dilihat bahwa orde konvergensi metode iterasi baru adalah delapan.

Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas, penulis memperoleh metode iterasi baru dengan orde konvergensi delapan yang melibatkan empat evaluasi fungsi, sehingga indeks efisiensi sebesar $8^{1/4} \approx 1,68179$. Simulasi numerik memberikan informasi bahwa metode iterasi baru (MVN8) memiliki jumlah iterasi paling sedikit dibandingkan dengan metode-metode pembandingan lainnya. Selain itu, nilai *COC* yang diperoleh menguatkan informasi terhadap orde konvergensi yang diperoleh secara analitik.

Daftar Pustaka

- [1] Amat, S., dkk., (2003), Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 157, p. 197 – 205.
- [2] Abbasbandy, S., (2003), Improving Newton-Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 145, p. 887 – 893.
- [3] Chun, C., (2005), Iterative methods improving Newton's method by the decomposition method, *Computers and Mathematics with Applications*, 50, 1559–1568.
- [4] Chun, C., (2006), Construction of Newton-like iteration methods for solving nonlinear equations, *Numerische Mathematik*, 104, 297 – 315.
- [5] Chun, C., (2007), A one-parameter family of third-order methods to solve nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 189, p. 126 – 130.
- [6] Chun, C., (2008), Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 195, p. 454 – 459.
- [7] Chun, C. and Ham, Y., (2008), Some fourth-order modifications of Newton's methods, *Applied Mathematics and Computation*, 197, p. 654–658.
- [8] Chun, C. and Kim, Y., (2010), Several new third-order iterative methods for solving nonlinear equations, *Acta Applied Mathematics*, 109, p. 1053 – 1063.
- [9] Chun, C. and Neta, B., (2009), Certain improvements of Newton's method with fourth-order convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 215, p. 821 – 828.
- [10] Matin Far, M., dkk., (2012), A new three-step iterative method for solving nonlinear equations, *Journal of Mathematical Extension*, 6(1), p. 29 – 39.
- [11] Melman, A., (1997), Geometry and convergence of Euler's and Halley's methods, *SIAM Review*, 39(4), p. 728 – 735.
- [12] Khattri, S. K., (2012), Quadrature based optimal iterative methods with applications in high-precision computing, *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.*, 5(4), p. 592 – 601.
- [13] Sharma, J. R., (2007), A family of third-order methods to solve nonlinear equations by quadratic curves approximation, *Applied Mathematics and Computation*, 184, p. 210 – 215.

- [14] Traub, J. F., *Iterative methods for solution of equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1977.
- [15] Wartono, dkk., (2016), Chebyshev-Halley's method without second derivative of eight-order convergence, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12(4), p. 2987 – 2997.
- [16] Potra, F.A and Ptak, V., (1984), Nondiscrete introduction and iterative processes, *In Research Note in Mathematics*, 103.
- [17] Singh, S. and Gupta, D. K., (2014), A new sixth order method for nonlinear equations in R, *The Scientific World Journal*, 2014, p. 1 – 5.
- [18] Jisheng, K., Yitian, L., and Xiuhua, W., (2007), A composite fourth-order iterative method for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 184, p. 471 – 475.

APLIKASI ENKRIPSI CITRA DIGITAL DENGAN ALGORITMA DUFFING MAP

Edi Sukirman¹, Suryadi MT², Sugih Prasetya¹

¹Jurusan Sistem Informasi Universitas Gunadarma,

²Departemen Matematika, Universitas Indonesia,
ediskm@staff.gunadarma.ac.id, yadi.mt@sci.ui.ac.id

Abstrak.

Usaha mencegah pengaksesan informasi secara *illegal* yaitu dengan teknik pengamanan data, salah satunya dengan mengenkripsi data. Proses enkripsi dapat dilakukan dengan cara mengimplementasikan teori chaos dalam hal ini menggunakan Duffing map. Algoritma ini membangkitkan barisan bilangan yang bersifat acak dengan dua nilai awal. Hasil penelitian menunjukkan bahwa algoritma ini dapat mengenkripsi sejumlah citra berwarna dan *grayscale* berekstensi bmp. Ukuran ruang kunci yang diperoleh sebesar 10^{30} . Waktu proses enkripsi dan dekripsi berbanding lurus dengan besarnya dimensi citra. Komposisi dan keragaman warna yang membentuk citra tidak berpengaruh secara signifikan terhadap waktu proses enkripsi dan dekripsi citra. Selain itu, tingkat sensitivitas kunci pertama mencapai 10^{-16} dan kunci kedua mencapai 10^{-17} , sehingga algoritma ini tahan terhadap serangan *brute force*.

Kata kunci: Algoritma enkripsi, chaotic map, citra digital, Duffing map

1. Pendahuluan

Kemajuan teknologi komputer seperti internet sangat membantu manusia untuk proses pencarian dan pengiriman informasi. Informasi yang tersebar di dunia internet dapat berupa teks, citra, audio, video, dan multimedia. Namun keamanan informasi juga aspek yang perlu diperhatikan. Informasi yang bersifat pribadi tentu memiliki nilai yang tinggi untuk dijaga kerahasiaannya, apalagi lagi informasi yang menyangkut keamanan negara.

Citra digital telah digunakan secara luas dalam berbagai macam kebutuhan sehingga perlindungan citra digital dari pihak yang tidak memiliki hak akses menjadi sangat penting. Untuk mencegah pengaksesan informasi oleh orang yang tidak berhak maka diperlukan teknik pengamanan data, salah satunya dengan cara mengenkripsi data sehingga hanya orang yang dituju sajalah yang dapat mengakses data tersebut.

Enkripsi adalah proses mengamankan suatu informasi dengan membuat informasi tersebut tidak dapat dibaca tanpa bantuan pengetahuan khusus. Hal tersebut dapat dilakukan dengan perubahan nilai (transformasi) atau dengan perubahan posisi (transposisi). Dikarenakan enkripsi telah digunakan untuk mengamankan komunikasi di berbagai negara, hanya organisasi-organisasi tertentu dan individu yang memiliki kepentingan yang sangat mendesak akan kerahasiaan yang menggunakan enkripsi.

Salah satu algoritma dari teori *chaos* adalah algoritma *duffing map*. *Duffing map* merupakan salah satu sistem dinamis dengan menggunakan fungsi diskrit yang menerapkan sifat *chaos*. Duffing map mengambil sebuah titik pada sebuah koordinat lalu memetakannya menjadi sebuah titik yang baru sesuai dengan persamaan (1): [3]

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n \\y_{n+1} &= -bx_n + ay_n - y_n^3\end{aligned}\quad (1)$$

Pemetaan dari persamaan (1) sendiri dipengaruhi oleh dua buah nilai, yakni konstanta a dan b . Pada umumnya, nilai untuk konstanta a yang sering digunakan adalah 2.75 dan nilai yang sering digunakan untuk konstanta b adalah 0.2. Kedua nilai inilah yang seringkali digunakan untuk membangkitkan bilangan acak.

Dipahami bahwa algoritma *duffing map* bersifat chaos dengan membangkitkan barisan bilangan yang bersifat acak melalui dua nilai awal x_0 dan y_0 serta dua parameter a dan b . Keunggulan dari algoritma ini yakni memiliki sifat *chaos*, yaitu sensitif terhadap perubahan kecil nilai awal, dan nilai yang dihasilkan bersifat acak serta bersifat *ergodicity* [3,4]. Algoritma ini juga memiliki dua nilai awal yang memungkinkan memiliki lebih banyak kombinasi kunci sehingga memiliki tingkat keamanan yang relatif tinggi.

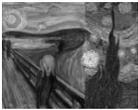
Berdasarkan hal tersebut, pada paper ini akan disajikan penggunaan *duffing map* pada proses enkripsi dan dekripsi citra digital. Selanjutnya dilakukan uji coba terhadap beberapa data citra digital dan dilakukan analisis kinerja algoritma tersebut berdasarkan analisis waktu proses, analisis sensitivitas, dan analisis ruang kunci serta pengamatan sifat *ergodicity*.

2. Hasil-hasil Utama

Pengimplementasian aplikasi algoritma *duffing map* dilakukan pada komputer dengan spesifikasi perangkat keras : *processor* Intel® Core™ B940 (2.0GHz, 2MB L3 cache), *RAM* DDR3 (2GB), *VGA* Intel® HD Graphics, *HDD* 320 GB, *monitor*, *keyboard* dan *mouse*.

Pada tahap uji coba, proses enkripsi dan dekripsi menggunakan sejumlah citra. Data citra yang digunakan dalam penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Data Citra untuk Uji Coba

Nama Citra	Citra Semula	Jenis Citra	Ukuran File	Ukuran Citra
Bird.bmp		Gray scale	192 kb	256 × 256
Charlie.bmp		Gray scale	928 kb	512 × 619
Katak.bmp		Gray scale	947 kb	700 × 462
Lukisan.bmp		Gray scale	2280 kb	996 × 802
Spiral.bmp		Gray scale	2250 kb	1024 × 768
Marley.bmp		Color	117 kb	200 × 200

Tabel 1. Data Citra untuk Uji Coba (lanjutan)

Nama Citra	Citra Semula	Jenis Citra	Ukuran File	Ukuran Citra
Marley.bmp		Color	117 kb	200 × 200
Leonardo.bmp		Color	290 kb	256 × 387
Lena.bmp		Color	768 kb	512 × 512
Detective.bmp		Color	1190 kb	685 × 610
Artist.bmp		Color	1370 kb	800 × 600

Hasil uji coba terhadap semua data uji pada Tabel 1 dianalisis berdasarkan waktu proses enkripsi dan dekripsi, sensitivitas kunci, ruang kunci dan bentuk histogram. Hal tersebut akan dijelaskan pada bagian berikut.

2.1. Analisis Waktu Proses Enkripsi dan Dekripsi

Pengujian dilakukan dengan menghitung waktu proses enkripsi dan dekripsi pada semua data uji pada Tabel 1, masing-masing 10 kali pengujian. Hasil pengujian rata-rata waktu proses enkripsi dan dekripsinya terlihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Rata-rata Waktu Proses Enkripsi dan Dekripsi Pada Data Uji

Nama citra	Ukuran Citra (dalam piksel)	Proses enkripsi (dalam detik)	Proses dekripsi (dalam detik)
Bird.bmp	256 × 256	0.1295	0.1282
Charlie.bmp	512 × 619	0.6130	0.6107
Katak.bmp	700 × 462	0.6257	0.6221
Lukisan.bmp	996 × 802	1.5480	1.5552
Spiral.bmp	1024 × 768	1.5256	1.5331
Marley.bmp	200 × 200	0.0783	0.0790
Leonardo.bmp	256 × 387	0.1922	0.1934
Lena.bmp	512 × 512	0.5090	0.5087
Detective.bmp	685 × 610	0.8128	0.8107
Artist.bmp	800 × 600	0.9301	0.9289

Dari Tabel 2, tampak bahwa waktu proses berbanding lurus dengan ukuran citranya. Semakin besar ukuran citranya maka semakin lama waktu prosesnya. Selain itu, tampak bahwa waktu proses enkripsi dan dekripsi reaktif sama. Hal tersebut karena kedua proses tersebut merupakan proses kebalikannya (inversnya).

2.1. Analisis Sensitivitas Kunci

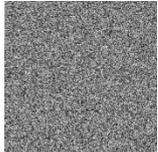
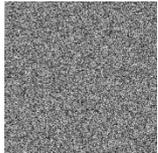
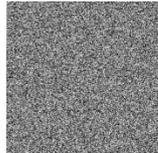
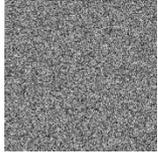
Pengujian dilakukan dengan melakukan proses enkripsi menggunakan kunci $a = 2.75$ dan $b = 0.2$. Selanjutnya dilakukan proses dekripsi dengan menggunakan 3 skenario uji berdasarkan 3 variasi kunci yang berbeda dari salah satu kunci tersebut. Ketiga jenis skenario pengujian tampak pada Tabel 3.

Tabel 3. Skenario Pengujian Enkripsi dan Dekripsi Pada Citra Digital

Jenis Skenario Pengujian	Nilai Kunci untuk Proses Enkripsi	Nilai Kunci untuk Proses Dekripsi
Pertama	$a = 2.75$ $b = 0.2$	$a = 2.75$ $b = 0.2$
Kedua	$a = 2.75$ $b = 0.2$	$a = 2.75$ $b = 0.2+10^{-16}$
Ketiga	$a = 2.75$ $b = 0.2$	$a = 2.75$ $b = 0.2+10^{-17}$

Hasil pengujiannya yang disajikan dalam paper ini merupakan hasil dari pengujian satu data uji yang masing-masing tampak pada Tabel 4.

Tabel 4. Hasil Pengujian Sensitivitas untuk Citra Bird.bmp

Jenis Skenario Pengujian	Citra Semula	Citra Hasil Enkripsi	Citra Hasil Dekripsi
Pertama			
Kedua			
Ketiga			

Tampak dari Tabel 4 bahwa jika proses dekripsi menggunakan kunci yang sama dengan kunci saat proses enkripsi (skenario pertama) maka citra asalnya dapat diperoleh sesuai dengan citra semula. Namun, jika minimal satu kuncinya berbeda dan perbedaannya sangat kecil (dalam hal ini mencapai 10^{-16}) maka citra asalnya tidak dapat diperoleh (kasus skenario jenis kedua). Sedangkan, jika selisih salah satu nilai kunci dekripsi dengan enkripsinya mencapai 10^{-16} atau lebih (skenario jenis ketiga) maka nilai kunci tersebut dianggap sama. Sehingga citra asalnya dapat diperoleh sesuai dengan citra semula.

2.2. Analisis Ruang Kunci

Parameter kunci yang digunakan pada algoritma *Duffing map* ini sebanyak dua buah, yaitu kunci A dan kunci B yang masing – masing bertipe data *double precision*. Sehingga banyak kemungkinan nilai dari masing – masing kunci adalah 10^{15} . Sehingga ukuran ruang kuncinya adalah $10^{15} \times 10^{15} = 10^{30}$. Adapun perhitungan waktu yang dibutuhkan untuk mencoba semua kunci yang mungkin disajikan pada Tabel 5.

Tabel 5. Waktu Yang Dibutuhkan untuk *Exhaustive Key Search*

Ukuran Ruang Kunci	Banyak Percobaan per detik	Waktu yang Dibutuhkan		
		Detik	Bulan	Tahun
10^{30}	10^6	10^{24}	3.86×10^{17}	3.22×10^{16}
	10^{10}	10^{20}	3.86×10^{13}	3.22×10^{12}
	10^{12}	10^{18}	3.86×10^{11}	3.22×10^{10}
	10^{18}	10^{12}	3.86×10^5	3.22×10^4

Tampak pada Tabel 5, waktu yang dibutuhkan untuk mencoba semua kunci enkripsi yang mungkin dari algoritma *duffing map*, relatif sangat lama. Terlihat bahwa jika digunakan dengan prosesor yang mempunyai kecepatan instruksi per detik (IPS) mencapai 10^{18} , dibutuhkan waktu paling 3.22×10^4 tahun. Sehingga algoritma *duffing map* sangat sulit dipecahkan dengan serangan *brute force*.

3. Kesimpulan

Pengimplementasian algoritma *duffing map* pada proses enkripsi dan dekripsi citra digital ini telah berhasil dilakukan pada aplikasi dan diuji cobakan pada beberapa gambar. Hasil percobaan memperlihatkan bahwa algoritma *duffing map* ini dapat mengenkripsi citra dengan baik dan mendepkrisikannya kembali tepat sama seperti citra semula serta sangat sulit dipecahkan dengan serangan *brute force*. Hal tersebut ditunjukkan dengan kinerja sebagai berikut:

1. Ukuran *file* dan dimensi dari citra semula, citra terenkripsi dan citra terdekripsi tetap sama karena pada dasarnya proses enkripsi dan dekripsi pada penelitian ini hanya mengubah nilai dari setiap piksel citra menggunakan operasi XOR terhadap bit-bit kunci dengan setiap piksel citra asli.
2. Waktu proses enkripsi dan dekripsi berbanding lurus dengan besarnya dimensi citra, semakin besar dimensi suatu citra semakin lama waktu yang dibutuhkan untuk mengenkripsi citra tersebut karena semakin besarnya dimensi citra semakin banyak pula piksel citra yang akan diproses dan begitu juga sebaliknya.
3. Perbandingan antara waktu proses enkripsi dan dekripsi menunjukkan waktu yang tidak jauh berbeda atau relatif sama.
4. Tingkat sensitivitas kunci mencapai nilai 10^{-17} . Perubahan yang sangat kecil dari salah satu maupun kedua buah kunci membangkitkan nilai acak yang jauh berbeda di setiap perubahan nilai kuncinya.
5. Ukuran ruang kunci mencapai 10^{30} sehingga waktu yang dibutuhkan untuk mencoba semua kemungkinan yang sama sangat lama, walaupun dilakukan dengan prosesor dengan kecepatan sangat tinggi.

Daftar Pustaka

- [1] Ariyus, Doni, 2008, *Pengantar Ilmu Kriptografi Teori, Analisis, dan Implementasi*, Penerbit ANDI, Yogyakarta.
- [2] Away, Gunaidi Abadia, 2006, *The Shortcut Of MATLAB Programming*, Penerbit Informatika Bandung.
- [3] Ibraheem, A., & Kumar, N., 2015, Attractors of Duffing Map: Application of DLI and 0-1 Test, *International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT)*, Volume 4, Issue 10, pp. 165-169.
- [4] Kocarev, L., & Lian, S., 2011, *Chaos-based Cryptography*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- [5] Munir, Rinaldi, 2006, *Kriptografi*, Penerbit Informatika, Bandung.
- [6] Munir, Rinaldi, 2012, Algoritma Enkripsi Citra Digital Berbasis Chaos Dengan Penggabungan Teknik Permutasi dan Teknik Substitusi Menggunakan Arnold Cat Map dan Logistik Map, <http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/> Penelitian/Makalah_Senapati_2012.pdf, tanggal Akses : 20 November 2013.
- [7] Rosen, K. H., 2007, *Discrete Mathematics and its Applications* (6th ed.), Mc Graw-Hill, New York.
- [8] Stallings, W., 2007, *Data and Computer Communications* (8th ed.), Prentice hall, New Jersey.

- [9] Stallings, W., 2011, *Computer and Network Security: Principle and Practice* (5th ed.), Prentice hall, New York.
- [10] Sugiharto, Aris, 2006, *Pemrograman GUI dengan Matlab*, Penerbit ANDI, Yogyakarta.
- [11] Susanto, Alvin, 2009, Penerapan Teori Chaos di Dalam Kriptografi, <http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Kriptografi/2008-2009/Makalah2/MakalahIF3058-2009-b031.pdf> , tanggal Akses 25 November 2013.

IMPLEMENTASI ALGORITMA ENKRIPSI CITRA DIGITAL MENGUNAKAN TANGENT LOGISTIC MAP

Suryadi MT¹, Yudi Satria², Desty Chartika³

^{1,2,3}Departemen Matematika, Universitas Indonesia,
yadi.mt@sci.ui.ac.id, ysatria@sci.ui.ac.id, desty.chartika@ui.ac.id

Abstrak.

Saat ini, pengiriman dan penerimaan informasi menjadi sangat mudah. Namun hal tersebut tidak serta merta berjalan aman. Berkembangnya teknologi informasi dan komunikasi pun diiringi oleh kejahatan seperti penyadapan informasi. Untuk mengamankan informasi dari pengirim oleh penerima, salah satu caranya yaitu dengan penerapan ilmu kriptografi. Metode yang digunakan yaitu metode tangent logistic map. Informasi awal ditransformasi ke dalam domain piksel lalu di enkripsi dengan tangent logistic map. Uji coba dilakukan terhadap informasi berupa citra digital. Hasil yang diperoleh berupa informasi yang sudah tersandikan (terenkripsi) yang sulit dipecahkan melalui serangan *brute force*. Selain itu, citra yang tersandikan dapat diperoleh kembali informasinya sebagaimana citra aslinya, dengan melakukan proses dekripsi dalam waktu yang relatif sama dengan waktu yang dibutuhkan pada saat proses enkrripsinya.

Kata kunci: Enkrripsi dan Dekripsi, Citra Digital, Teori Chaos, Tangent Logistic Map.

1. Pendahuluan

Penyajian data atau informasi kini semakin canggih seiring pesatnya perkembangan suatu teknologi, salah satunya yakni penyajian data atau informasi secara digital. Namun kecanggihan teknologi pun juga diiringi kejahatan seperti serangan berupa penyadapan data/ informasi dimana data/ informasi tersebut bersifat rahasia. Data atau informasi yang bersifat rahasia sangat rentan terhadap serangan yang bertujuan untuk menyalahgunakan data atau informasi tersebut. Citra digital adalah salah satu bentuk data atau informasi digital yang sering dijadikan sasaran kejahatan. Oleh karena itu dibutuhkan cara untuk mengamankan data atau informasi yang bersifat rahasia tersebut. Adapun cara untuk mengamankan data atau informasi dari pengirim oleh penerima salah satunya yaitu dengan menerapkan ilmu kriptografi dengan metode enkripsi.

Metode enkripsi pada prosesnya memerlukan key yang hanya diketahui oleh pengirim atau penerima saja [4]. Jika pada proses enkripsi dan dekripsi menggunakan key yang sama, maka proses tersebut disebut enkripsi simetris. Ada beberapa teknik enkripsi citra yang diusulkan, salah satunya yaitu teknik enkripsi citra berbasis chaos. Dikarenakan sifat tersebut, fungsi chaos dapat digunakan untuk membangkitkan barisan bilangan acak guna proses enkripsi. Ada banyak jenis fungsi berbasis chaos diantaranya logistic map, Arnold Cat Map dan Tangent logistic map [2,5,6]. Adapun penyajian fungsi Tangent logistic map tersebut dalam bentuk iteratifnya adalah

$$x_{n+1} = (1 - \beta^{-4}) \cdot \text{ctg} \left(\frac{\alpha}{1+\beta} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^{\beta} \cdot \text{tg} (\alpha x_n) \cdot (1 - x_n)^{\beta} \quad (1)$$

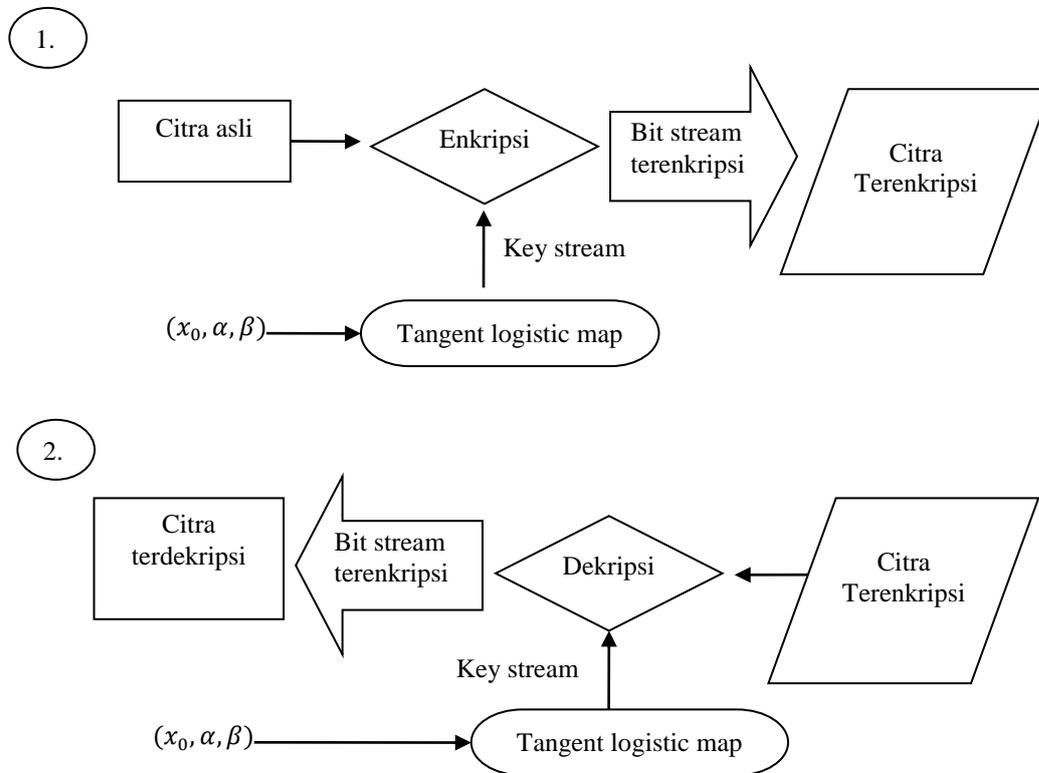
dengan parameter $x_n \in (0,1)$, $\alpha \in (0, 1.4]$, $\beta \in [5, 43]$ atau $x_n \in (0,1)$, $\alpha \in (1.4, 1.5]$, $\beta \in [9, 38]$ atau $x_n \in (0,1)$, $\alpha \in (1.5, 1.57]$, $\beta \in [3, 15]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ dan x_0 adalah nilai awal pada iterasi [3].

Tangent logistic map merupakan salah satu fungsi chaos dan telah dibuktikan dapat mengatasi permasalahan yang terdapat pada Logistic map, Gao, Zhang, Liang, Li [3]. Oleh sebab itu, dalam makalah ini akan digunakan tangent logistic map sebagai fungsi chaos dalam metode enkripsi pada citra digital.

Uji algoritma akan dilakukan berdasarkan ruang kunci, analisa sensitivitas kunci, dan waktu rata-rata enkripsi. Analisa tersebut berguna untuk menghindari dari serangan brute force.

2. Hasil – Hasil Utama

Dalam proses enkripsi citra digital yang dilakukan menggunakan tangent logistic map sebagai fungsi chaos seperti persamaan (1). Berikut adalah alur proses enkripsinya.

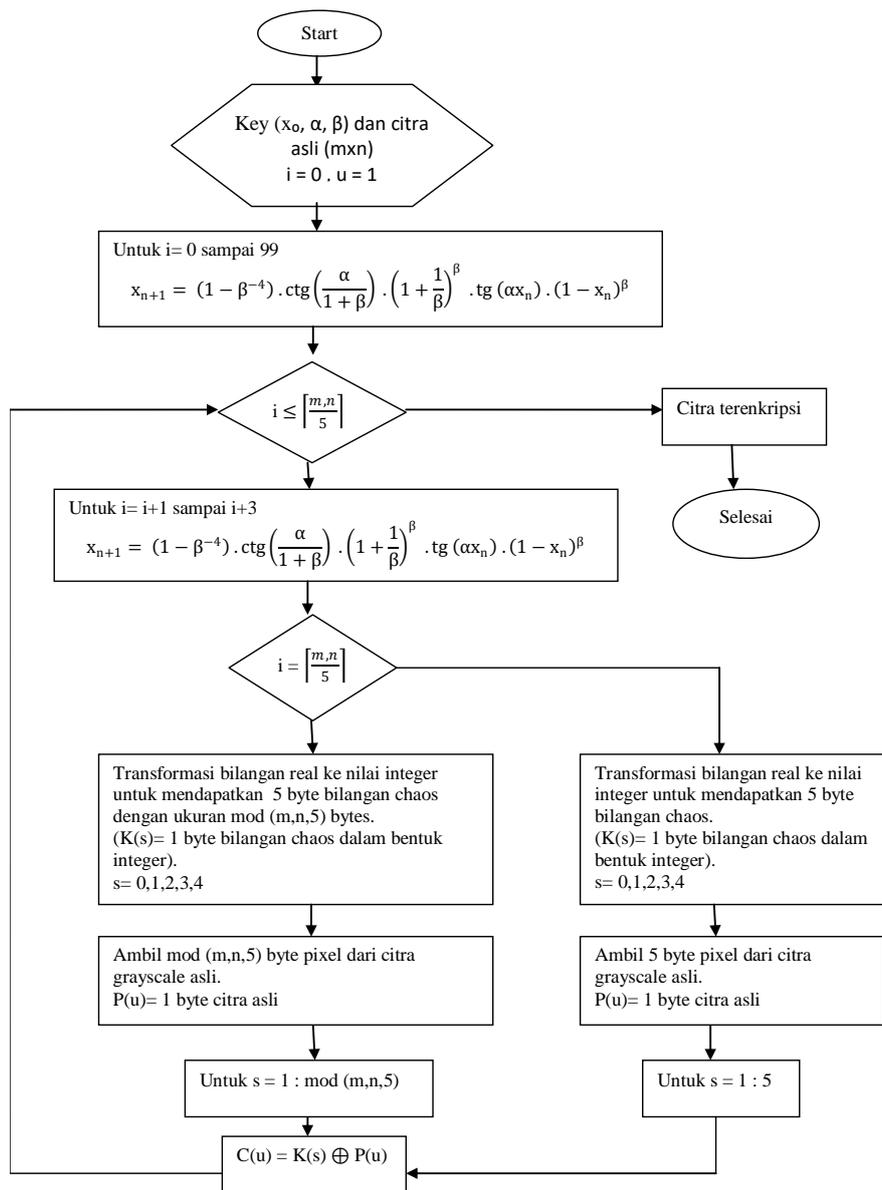


Gambar 1. alur proses dalam mengamankan citra digital.
1.)Proses enkripsi, 2.) Proses dekripsi

Bagan alur bagian 1 menunjukkan alur proses enkripsi pada citra digital, sedangkan bagan 2 menunjukkan proses alur sebaliknya atau dekripsi. Pada bagan 1, hal pertama yang dilakukan adalah memasukkan file berupa citra asli kemudian dienkripsi menggunakan tangent logistic map sebagai fungsi chaos untuk membangkitkan kunci dimana tangent logistic map membutuhkan key (x_0, α, β) , yang dioperasikan dengan operator XOR terhadap piksel citra aslinya. Sehingga didapatkan bit stream terenkripsi yang mana hasilnya berupa citra terenkripsi. Sifat operator XOR ialah invertible [3]. Bagan 2 adalah proses kebalikan dari bagan 1, dengan menggunakan key yang sama seperti proses pada bagan 1.

2.1. Rancangan Algoritma

Chaos adalah tipe dari perilaku suatu sistem ataupun fungsi yang bersifat acak, peka terhadap nilai awal dan *ergodicity* [2]. Fungsi yang memiliki sifat chaos dinamakan fungsi chaos. Gambar 2 merupakan *flowchart* dari algoritma enkripsi pada citra digital menggunakan tangent logistic map



Gambar 2. Flowchart Algoritma Enkripsi dengan Tangent Logistic Map

2.2. Hasil Pengujian

Pengujian dilakukan dengan orientasi pada pertahanan algoritma enkripsi berbasis chaos terhadap serangan *brute force*. Adapun hal tersebut menyangkut waktu komputasi, analisa ruang kunci serta analisa sensitivitas kunci. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah citra dengan format jpg.

2.2.1. Analisis waktu enkripsi

Berikut tabel rata-rata waktu enkripsi dan dekripsi dengan masing-masing citra tiap ukurannya dilakukan 10 kali pengujian. Citra yang digunakan adalah citra warna Lena dan Jihan dalam berbagai ukuran piksel. Pada proses enkripsi dan dekripsi menggunakan *key* yang sama, dengan nilai yang digunakan adalah $x_0 = 0.3$, $\alpha = 1.57$, $\beta = 3.5$

Tabel 1. Waktu Proses Enkripsi dan Dekripsi Citra Warna

Uji ke-	Nama citra	Ukuran Piksel	Rata-rata waktu enkripsi (detik)	Rata-rata waktu dekripsi (detik)
1	Lena	314 x 314	9.04630002976	9.597200012
2		256 x 256	5.96850001812	5.97469999790
3		128 x 128	1.92980000973	1.97980000973
4		96 x 96	1.36170001030	1.24969999790
5		60 x 60	0.689600014687	0.609899997711
6		238 x 317	7.70510001183	7.42709996700
7	Jihan	195 x 260	5.56789996624	5.41340003014
8		161 x 215	4.10420002937	4.06680004597
9		128 x 171	2.43830003738	2.41500003338
10		30 x 40	0.44149999619	0.47269997597

Sementara untuk hasil uji rata-rata waktu enkripsi pada citra grayscale dengan berbagai ukuran piksel adalah sebagai berikut. Pengujian juga menggunakan key yang sama pada proses enkripsi dan dekripsi seperti uji yang dilakukan pada citra warna.

Tabel 2. Waktu Proses Enkripsi dan Dekripsi Citra *Grayscale*

Uji ke-	Nama citra	Ukuran Piksel	Rata-rata waktu enkripsi (detik)	Rata-rata waktu dekripsi (detik)
1	Lena	314 x 314	3.35720000267	3.38210003376
2		256 x 256	2.39919998646	2.51470003128
3		128 x 128	0.98269999027	0.91409997940
4		96 x 96	0.79580001831	0.73950002193
5		60 x 60	0.54760000706	0.57400002480
6		238 x 317	2.74250004292	2.64890003204
7	Jihan	195 x 260	2.06219995022	1.93780000210
8		161 x 215	1.45540001392	1.39960000515
9		128 x 171	1.07169997692	1.12939999104
10		30 x 40	0.38509995937	0.54129998684

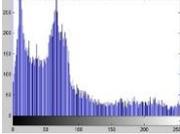
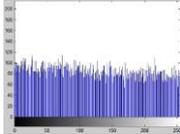
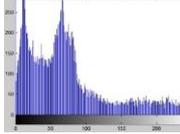
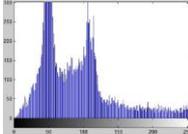
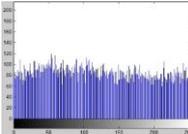
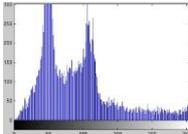
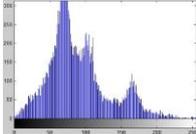
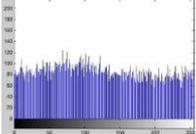
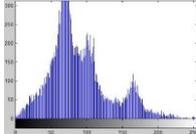
2.2.2. Analisis Ruang Kunci

Untuk membangkitkan kunci diperlukan fungsi pembangkit kunci. Dalam penelitian ini, tangent logistic map digunakan sebagai fungsi pembangkit kunci. Adapun key yang dibutuhkan dalam tangent logistic map terdiri dari 3 nilai floating point yaitu x_0 , α , β . Jika menggunakan tingkat presisi yang lebih tinggi, contohnya dengan standar IEEE 64-bit double presisi, maka level presisi akan mencapai 10^{-15} . Sehingga besar total kemungkinan ruang kunci adalah $10^{15} \times 10^{15} \times 10^{15} = 10^{45}$. Nilai tersebut lebih besar dibanding dengan 56-bit algoritma DES = 2^{56} , dimana DES merupakan algoritma pengamanan enkripsi yang terkenal.

2.2.3. Analisis Sensitivitas Kunci

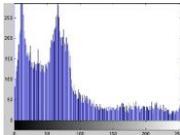
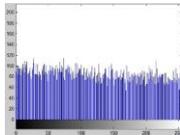
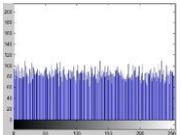
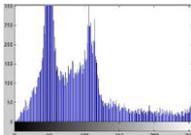
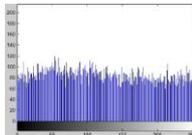
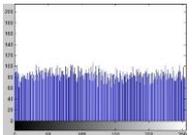
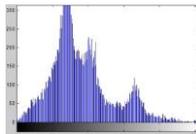
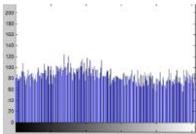
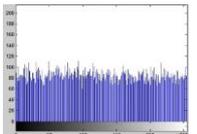
Key yang digunakan dalam setiap uji pada penelitian ini adalah sama untuk setiap citra digital. Namun untuk melihat sensitivitas kunci maka pada proses dekripsi akan di uji dengan menggunakan nilai key yang berbeda. Hasil disajikan pada tabel 2.2.3, 2.2.4, dan 2.2.5.

Tabel 3. Hasil sensitivitas kunci menggunakan x_0 yang sama

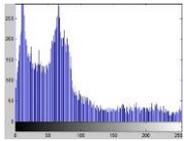
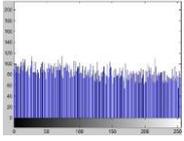
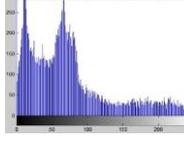
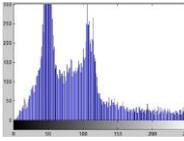
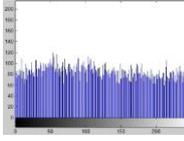
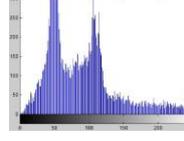
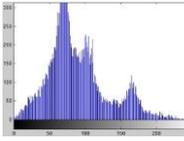
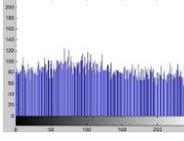
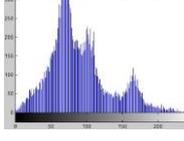
	Citra Asli	Proses enkripsi $x_0 = 0.3, \alpha = 1.57, \beta = 3.5$	Hasil Dekripsi $x_0 = 0.3, \alpha = 1.57, \beta = 3.5$
			
R			
e			
G			
r			
e			
n			
B			
l			
u			
e			

Tampak pada Tabel 3, hasil dari proses enkripsi dan dekripsi terhadap citra Jihan menggunakan key yang sama yaitu $x_0 = 0.3, \alpha = 1.57, \beta = 3.5$. Terlihat proses dekripsi berhasil, karena hasil dari citra terdekripsi sama dengan citra asli. Histogram komponen R, G, B nya menunjukkan nilai distribusi piksel. Tampak pada kolom hasil dekripsi, histogramnya sama dengan histogram pada kolom citra asli.

Tabel 4. Hasil sensitivitas kunci menggunakan x_0 yang berbeda (Perbedaan nilai x_0 adalah 10^{-16})

	Citra Asli	Proses enkripsi $(x_0 = 0.3, \alpha = 1.57, \beta = 3.5)$	Hasil Dekripsi $(x_0 = 0.3000000000000001, \alpha = 1.57, \beta = 3.5)$
			
R			
e			
d			
G			
r			
e			
n			
B			
l			
u			
e			

Tabel 5. Hasil sensitivitas kunci menggunakan x_0 yang berbeda (Perbedaan nilai x_0 adalah 10^{-17})

	Citra Asli	Proses enkripsi ($x_0 = 0.3, \alpha = 1.57, \beta = 3.5$)	Hasil Dekripsi ($x_0 = 0.30000000000000001, \alpha = 1.57, \beta = 3.5$)
			
R e d			
G r e e n			
B l u e			

Tampak pada Tabel 4 uji sensitivitas kunci untuk proses dekripsinya dengan menggunakan nilai $x_0 = 0.30000000000000001$ dan hasilnya menunjukkan bahwa citra terdekripsi tidak sama dengan citra asli, dengan kata lain proses dekripsinya gagal. Sedangkan pada Tabel 5, kunci yang digunakan ialah dengan nilai $x_0 = 0.30000000000000001$, hasil dari proses dekripsinya sama dengan citra asli. Artinya, nilai 0.3 dan nilai 0.30000000000000001 dipertimbangkan sebagai nilai yang sama yaitu dengan 0.3. Sehingga, dapat dikatakan bahwa tingkat sensitivitas pada algoritma yang menggunakan tangent logistic map ini mencapai 10^{-16} .

3. Kesimpulan

Algoritma enkripsi berbasis chaos menggunakan tangent logistic map ini sulit untuk diserang melalui serangan bruteforce. Terlihat dari ruang kunci yang mencapai 10^{45} , maka untuk mendapatkan key diperlukan waktu yang sangat lama. Disamping itu, sensitivitas kunci yang mencapai 10^{-16} menambah sulitnya algoritma ini untuk diserang. Telah terbukti juga bahwa algoritma ini memperbaiki algoritma logistic map ruang kuncinya 10^{30} [6] menjadi lebih besar, yaitu mencapai 10^{45} .

Ucapan Terima Kasih

Makalah ini merupakan hasil penelitian yang didanai oleh DIKTI melalui Direktorat Riset dan Pengabdian Masyarakat Universitas Indonesia dalam program hibah PUPU Tahun Anggaran 2016, dengan Nomor: 1133/UN2.R12/HKP.05.00/2016.

Daftar Pustaka

- [1] Gao, H., Zhang, Y., Liang, S., Li, D. (2006). A new chaotic algorithm for image encryption. *Journal of Chaos, Solutions and Fractals*, 29, 393-399.
- [2] Kocarev, L., & Lian, S. (2011). *Chaos-based cryptography*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag.
- [3] Rosen, K. H., 2007, *Discrete Mathematics and its Applications*, 6th ed., McGraw-Hill, New York.
- [4] Stallings, W. (2011). *Computer and Network Security : Principle and Practice* (5 ed.). New York: Prentice hall.
- [5] Suryadi MT, (2013). New Chaotic Algorithm for Video Encryption, 4th The International Symposium on Chaos Revolution in Science, Technology and Society 2013, Jakarta, 28-29, August, 2013.

- [6] Suryadi MT, Eva Nurpeti and Dhian Widya, (2014), Performance of Chaos-Based Encryption Algorithm for Digital Image, *TELKOMNIKA Journal*, Vol.12, No.3, pp. 675~682.

PEMBENTUKKAN STRUKTUR BAYESIAN NETWORK DARI DATA

Devni Prima Sari¹, Dedi Rosadi², Danardono³, Adhitya Ronnie E.⁴

¹Program Studi S3 Matematika Universitas Gadjah Mada

^{2,3,4}Universitas Gadjah Mada

devniprimasari@yahoo.co.id

Abstrak

Penggunaan data *mining* semakin meluas dalam berbagai bidang dan menjadi bagian dari perkembangan teknologi informasi yang tak terhindarkan. Klasifikasi menjadi salah satu bahasan yang paling sering dibicarakan dalam data *mining* karena cakupan penerapannya yang cukup luas seperti dalam bidang bisnis, keuangan, kesehatan, keamanan, ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu metode klasifikasi adalah *Bayesian Network* (BN). Metode BN adalah metode yang menggunakan prinsip dan teorema Bayes dengan asumsi bahwa variabel/atribut input dapat saling terikat. Probabilitas yang dihasilkan kemudian digunakan untuk melakukan prediksi data di masa depan. Contoh penerapan klasifikasi dalam bidang kesehatan adalah proses diagnosa/prognosa/prediksi penyakit kanker payudara dilihat dari hasil foto rontgen pada data kanker payudara. Pembuatan model dalam *Bayesian Network* melibatkan dua langkah yaitu membuat struktur jaringan dan mengestimasi nilai probabilitas setiap *node*. Salah satu algoritma yang bisa digunakan untuk membentuk struktur jaringan adalah dengan menggunakan algoritma *Maximum Spanning Tree*. Dari model BN, didapatkan probabilitas pasien yang menderita kanker payudara dengan tipe sel jinak (*benign*) sebesar 62% dan tipe sel ganas (*malignant*) sebesar 38%.

Kata kunci: data *mining*, *Bayesian Network*, *Maximum Spanning Tree*

1. Pendahuluan

Data *mining* merupakan serangkaian proses untuk menggali nilai tambah dari suatu kumpulan data berupa pengetahuan yang selama ini tidak diketahui secara manual. *Mining* berarti usaha untuk mendapatkan sedikit data berharga dari sejumlah data dasar. Dalam terapannya, tujuan utama data *mining* cenderung pada deskriptif dan prediksi (Han & Kambe, 2001). *Bayesian Network* merupakan salah satu penerapan data *mining* yang menghasilkan model prediksi peluang interaktif berupa gambaran hubungan antar variabel serta memberikan informasi peluangnya.

Bayesian Network adalah struktur grafis probabilistik yang menggambarkan hubungan sebab-akibat antara variabel yang saling berkaitan. Ada empat hal yang dapat ditawarkan *Bayesian Network* sebagai sebuah metode: pertama, *Bayesian Network* dapat dengan mudah menangani ketidaklengkapan maupun masalah pada data. Kedua, *Bayesian Network* memungkinkan seseorang untuk belajar tentang hubungan kausal. Proses pembelajaran menjadi penting ketika kita mencoba untuk memahami domain dari permasalahan. Ketiga, *Bayesian Network* dapat memfasilitasi kombinasi dari pengetahuan domain dan data. Terakhir, *Bayesian Network* menawarkan pendekatan yang efisien dan berprinsip untuk menghindari *over fitting* pada data. Pembuatan model dalam *Bayesian Network* melibatkan dua langkah yaitu membuat struktur jaringan dan mengestimasi nilai probabilitas setiap *node*. Salah satu algoritma yang bisa digunakan untuk membentuk struktur jaringan adalah dengan menggunakan algoritma *Maximum Spanning Tree*.

Penulisan akan mengaplikasikan metode ini pada suatu contoh kasus, yaitu penyakit kanker payudara. Kanker adalah suatu kondisi dimana sel telah kehilangan pengendalian dan mekanisme normalnya, sehingga mengalami pertumbuhan yang tidak normal, cepat dan tidak terkendali. Salah satu jenis kanker adalah kanker payudara. Kanker payudara (*Carcinoma mammae*) didefinisikan sebagai suatu penyakit neoplasma yang ganas yang berasal dari *parenchyma*. Berdasarkan data dari rekam medis RS Kanker Dharmais sebagai salah satu rumah sakit kanker nasional, hampir 85% pasien kanker payudara

datang ke rumah sakit dalam keadaan stadium lanjut. Hal ini akan mempengaruhi prognosis dan tingkat kesembuhan pasien. Padahal jika kanker payudara ditemukan dalam stadium awal, maka tingkat kesembuhan pasien akan sangat baik. Untuk menemukan kanker payudara dalam stadium awal, yang diperlukan adalah deteksi dini. Dengan melakukan deteksi dini maka jika akan mudah ditemukan jika ada tumor dalam ukuran yang masih kecil sekalipun dan akan lebih cepat dilakukan tindakan pengobatan ataupun operasi. Pencegahan merupakan hal yang paling penting daripada pengobatan.

Hasil penelitian yang menginspirasi penulisan karya tulis ini adalah penelitian Wicaksana, P.D (2015) tentang algoritma *K-Nearest Neighbor* dan *Naive Bayes* untuk studi data “*Wisconsin diagnosis breast cancer*”. Penelitian Khoerudin, A (2011) yang berjudul Analisis Tingkat Kesukaan Konsumen dengan Metode *Bayesian Network* (Studi Kasus Produk Biskuit). Penelitian oleh Erisa Noviaty (2015) tentang klasifikasi menggunakan metode *bayesian belief networks*.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan metode literatur, yaitu dengan mengumpulkan berbagai sumber materi yang mendukung seperti buku, jurnal, dan beberapa artikel dari internet. Pembuatan model dalam *Bayesian Network* melibatkan dua langkah yaitu membuat struktur jaringan dengan menggunakan algoritma *Maximum Spanning Tree* dan mengestimasi nilai probabilitas setiap *node*.

Bayesian Networks adalah metode klasifikasi yang menggunakan asumsi bahwa efek dari variabel atribut dapat bersifat independen bersyarat secara bersama (*joint conditionally independent*) dengan variabel atribut lainnya. BN menggunakan distribusi probabilitas bersyarat gabungan (*joint conditional probability*) dan grafik model hubungan sebab-akibat dalam proses pelatihannya. BN terdiri dari dua komponen, grafik *Directed Acyclic Graph* (DAG) dan tabel probabilitas bersyarat (*Conditional Probability Table*, CPT) untuk setiap variabel atribut (Han & Kambe, 2001). DAG dapat dinotasikan dengan $G = (X, E)$ dengan, X terdiri dari variabel yang disebut *node* dan E adalah pasangan *node* yang dihubungkan dengan garis panah. *Node* pada DAG menggambarkan variabel random, sedangkan garis panah menunjukkan hubungan probabilistik dependensi antar atribut. Garis panah hanya menuju ke satu arah dan tidak berputar kembali menuju *node* asalnya. Jika terdapat garis dari *node* variabel atribut X_j menuju *node* X_k , dapat dikatakan bahwa *node* X_j adalah orangtua (*parent*) dari *node* X_k dan *node* X_k adalah anak/turunan (*child*) dari *node* X_j . *Parent* didefinisikan sebagai *node* yang dijadikan syarat dan *child* adalah *node* yang diberikan syarat. Sehingga dapat diperoleh rumus untuk fungsi kepadatan probabilitas (PDF) sebagai berikut:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i | \text{parents}(X_i))$$

dengan probabilitas *node* turunan hanya tergantung terhadap *node* orangtuanya (Larose, 2006). Dalam suatu BN dapat dimiliki lebih dari satu *node* keluaran. Selain dapat memperoleh keluaran berupa label kelas, dapat diketahui pula nilai probabilitas untuk setiap kelas.

Metode Bayesian dalam statistika memiliki fundamental yang berbeda dengan metode klasik. Dalam metode klasik parameter populasi dipandang sebagai besaran yang tidak diketahui. Sedangkan dalam metode Bayes parameter populasi dipandang sebagai variabel yang mempunyai distribusi yang disebut distribusi prior atau subjektif. Selain itu, jika terdapat suatu parameter/hipotesis pada populasi tersebut, maka parameter tersebut juga mempunyai distribusi yang disebut dengan distribusi posterior.

Distribusi posterior $P(A|B)$ adalah distribusi bersyarat parameter A diberikan data observasi B dan ditulis secara matematis sebagai berikut

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

Distribusi bersyarat parameter A diberikan data observasi B juga dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Bayes berikut,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (2)$$

dimana,

$P(A)$ = probabilitas *evidence* atau bukti

$P(B)$ = probabilitas prior

$P(A|B)$ = probabilitas bersyarat yang diketahui disebut sebagai *likelihood*

$P(B|A)$ = probabilitas bersyarat yang akan dicari atau probabilitas posterior

Bayesian Network Terboboti adalah metode untuk menyusun struktur *Bayesian Network* dengan menggunakan suatu nilai pembobot pada setiap *edge*. Nilai pembobot yang digunakan dapat berupa jarak, korelasi, dan kekuatan hubungan lainnya. Pada penelitian ini digunakan algoritma *Maximum Spanning*

Tree. Maximum Spanning Tree adalah himpunan bagian dari suatu graf G yang tidak memiliki siklus namun memiliki *node* yang sama seperti G . Syarat *spanning tree* adalah semua *node* terhubung dan memiliki bobot (Munir, 2009).

Penggunaan algoritma *Maximum Spanning Tree* untuk analisis tingkat kesukaan adalah mencari bobot paling maksimum dari nilai korelasi. Korelasi yang digunakan adalah korelasi spearman karena datanya merupakan berskala ordinal. Korelasi menggambarkan kedekatan hubungan antara dua variabel sehingga semakin tinggi nilainya maka hubungan antara kedua variabel semakin kuat. Terdapat dua jenis algoritma *spanning tree*, yaitu prim dan kruskal. Dalam penelitian ini digunakan algoritma prim. Berdasarkan definisi yang dikemukakan Munir (2009), maka penjabaran langkah-langkah algoritma *Maximum Spanning Tree* dalam membangun BN adalah sebagai berikut:

- Seluruh variabel dalam keadaan diskret (jika ada variabel kontinu didiskretisasi terlebih dahulu).
- Mencari korelasi spearman seluruh variabel yang ada dan menggunakan korelasi tersebut sebagai bobot untuk setiap *edge*.
- Memilih variabel penjelas yang memiliki *edge* dengan bobot terbesar dengan variabel respon lalu menghubungkan kedua variabel tersebut dan menentukan arah *edge*.
- Mencari *edge* dengan bobot terbesar berikutnya. *Edge* antara variabel yang sudah terhubung pada langkah ke-c dengan variabel lain yang belum terhubung namun bukan merupakan siklus
- Menghubungkan variabel baru yang didapat pada langkah ke-d dan menentukan arah *edge*.
- Mengulangi langkah d dan langkah e sehingga seluruh variabel terhubung.

Algoritma *Maximum Spanning Tree* bekerja menggunakan korelasi *spearman* sebagai bobot penghubung *node*. Daniel (1989) menyatakan bahwa korelasi *spearman* berfungsi untuk menentukan besama hubungan dua variabel yang berskala ordinal. Jika r merupakan korelasi spearman dan/ merupakan selisih antara variabel x dan y , maka koefisien korelasi spearman pada jumlah data sebanyak n dapat dihitung:

$$r = 1 - \frac{6 \sum l^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$l = x_i - y_i$$

3. Hasil dan Pembahasan

Data yang akan digunakan sebagai studi kasus adalah data sekunder *Breast Cancer Dataset*. Terdapat 699 data pada dataset tersebut, yang terdiri dari 241 data pasien (34,5%) yang positif terdapat sel kanker dan 458 data pasien (65,5%) yang mengidap tumor jinak (negatif kanker payudara) dengan enam variabel independen dan satu variabel dependen. Variabel dependen sebagai variabel target pada dataset tersebut dapat dilihat pada tabel 1 sedangkan variabel independen pada dataset tersebut dapat dilihat pada tabel 2.

Tabel 1: Variabel dependen/kelas pada data

Nama Variabel	Deskripsi	Keterangan
<i>Class(Y)</i>	Hasil diagnosa sel	Tipe data ordinal dengan nilai: 1 untuk sel jinak (<i>benign</i>), 2 untuk sel ganas (<i>malignant</i>)

Tabel 2: Variabel independen/atribut pada data

Nama Variabel	Deskripsi	Keterangan
<i>clump_thickness (X₁)</i>	Atribut ini menentukan apakah sel berlayer atau tidak karena sel tumor jinak (<i>benign celss</i>) cenderung hanya mempunyai satu layer (<i>monolayer</i>) sedangkan sel ganas cenderung mempunyai banyak layer (<i>multilayer</i>).	Tipe data ordinal dengan nilai 1-5
<i>uniformity_of_cell_size (X₂)</i>	Atribut ini menentukan konsistensi ukuran sel.	Tipe data ordinal dengan nilai 1-5
<i>uniformity_of_cell_shape (X₃)</i>	Atribut ini menentukan kesamaan bentuk sel.	Tipe data ordinal dengan nilai 1-5
<i>marginal_adhesion (X₄)</i>	Atribut ini menentukan apakah sel-sel bersama sama atau tidak karena sel ganas cenderung kehilangan kemampuan ini.	Tipe data ordinal dengan nilai 1-5
<i>single_epithelial_cell_size(X₅)</i>	Atribut ini menentukan apakah ephitelial cell cenderung membesar atau tidak.	Tipe data ordinal dengan nilai 1-5
<i>bland_chromatin (X₆)</i>	Atribut ini menentukan tingkat tekstur dari sel kromatin.	Tipe data ordinal dengan nilai 1-5

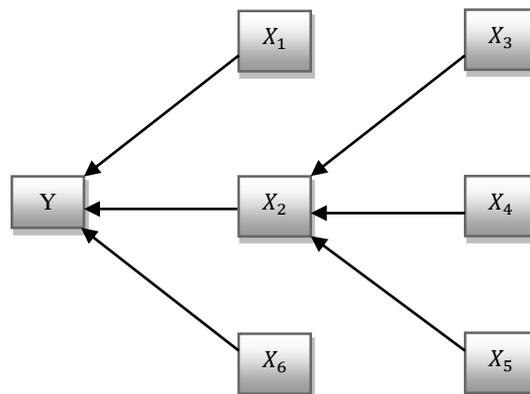
Karena seluruh variabel sudah dalam bentuk diskret, selanjutnya peneliti mencari korelasi *spearman* antar variabel yang ada. Dengan menggunakan SPSS diperoleh korelasi antar variabel seperti pada tabel 3.

Tabel 3: Korelasi *Spearman* antar variabel

Korelasi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Y
X_1	1,00000	0,64771	0,64698	0,51911	0,58043	0,52181	0,68303
X_2	0,64771	1,00000	0,88403	0,72284	0,82116	0,72403	0,86252
X_3	0,64698	0,88403	1,00000	0,68665	0,77356	0,69395	0,85116
X_4	0,51911	0,72284	0,68665	1,00000	0,67565	0,61780	0,71084
X_5	0,58043	0,82116	0,77356	0,67565	1,00000	0,65541	0,78415
X_6	0,52181	0,72403	0,69395	0,61780	0,65541	1,00000	0,73712
Y	0,68303	0,86252	0,85116	0,71084	0,78415	0,73712	1,00000

Nilai korelasi yang paling tinggi adalah korelasi antara variabel *uniformity_of_cell_size* (X_2) dan *uniformity_of_cell_shape* (X_3) yaitu sebesar 0,88403 sedangkan korelasi yang paling rendah adalah korelasi antara *clump_thickness* (X_1) dan *marginal_adhesion* (X_4), yaitu sebesar 0,51911.

Algoritma *Maximum Spanning Tree* yang dipakai merupakan algoritma yang didasarkan atas hubungan *causal relationship*. Hubungan kausal ini diperlihatkan melalui korelasi *spearman*. Penggunaan algoritma prim mensyaratkan agar setiap variabel dapat terhubung namun tidak membentuk sebuah siklus. Gambar 1 memperlihatkan struktur BN hasil dari algoritma *Maximum Spanning Tree*.



Gambar 1. BN dengan algoritma *Maximum Spanning Tree*

Variabel *Class* (Y) menjadi child dari variabel *clump_thickness* (X_1), *uniformity_of_cell_size* (X_2), dan *bland_chromatin* (X_6). *Uniformity_of_cell_size* (X_2) menjadi child dari variabel *uniformity_of_cell_shape* (X_3), *marginal_adhesion* (X_4), dan *single_epithelial_cell_size* (X_5). Gambar 1 memperlihatkan bahwa selain variabel *clump_thickness* (X_1), *uniformity_of_cell_size* (X_2), dan *bland_chromatin* (X_6), ketiga variabel yang lain tidak mempengaruhi variabel *Class* (Y) secara langsung. Variabel *uniformity_of_cell_shape* (X_3), *marginal_adhesion* (X_4), dan *single_epithelial_cell_size* (X_5) terlebih dahulu mempengaruhi variabel *uniformity_of_cell_size* (X_2). Kemudian variabel *uniformity_of_cell_size* (X_2) mempengaruhi variabel *Class* (Y).

Setelah membentuk stuktur *Bayesian Network*, langkah selanjutnya adalah menghitung probabilitas setiap variabel untuk variabel yang tidak dipengaruhi (eksogen) dan probabilitas bersyarat bagi variabel yang dipengaruhi (endogen).

- Menghitung probabilitas variabel yang tidak dipengaruhi (variabel eksogen)

Node X_1, X_3, X_4, X_5 dan X_6 masing-masing terdiri atas lima *state* yaitu 1, 2, 3, 4 dan 5. Pada tabel ditunjukkan probabilitas kejadian dari *node* X_1, X_3, X_4, X_5 dan X_6 .

Tabel 4: Probabilitas kejadian dari *node* (a) X_1 , (b) X_3 , (c) X_4 , (d) X_5 dan (e) X_6

State Node X_1	Frekuensi	Probabilitas
1	195	0.279
2	188	0.269
3	164	0.235
4	69	0.099
5	83	0.119
Total	699	1

(a)

State Node X_3	Frekuensi	Probabilitas
1	412	0.589
2	100	0.143
3	64	0.092
4	58	0.083
5	65	0.093
Total	699	1

(b)

State Node X_4	Frekuensi	Probabilitas
1	465	0.665
2	91	0.130
3	45	0.064
4	38	0.054
5	60	0.086
Total	699	1

(c)

State Node X_5	Frekuensi	Probabilitas
1	433	0.619
2	120	0.172
3	80	0.114
4	33	0.047
5	33	0.047
Total	699	1

(d)

State Node X_6	Frekuensi	Probabilitas
1	318	0.455
2	205	0.293
3	44	0.063
4	101	0.144
5	31	0.044
Total	699	1

(e)

b. Menghitung probabilitas bersyarat bagi variabel yang dipengaruhi (variabel endogen)

Langkah berikutnya menentukan probabilitas *node* berdasarkan stuktur BN yang terbentuk. Berdasarkan struktur BN pada Gambar 1. distribusi peluang gabungan lengkap dari BN adalah

$P(Y, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = P(Y|X_1, X_2, X_6) \cdot P(X_1) \cdot P(X_2|X_3, X_4, X_5) \cdot P(X_6) \cdot P(X_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5)$
dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh rumusan sebagai berikut

$$P(Y|X_1 \cap X_2 \cap X_6) = \frac{P(X_1 \cap X_2 \cap X_6 \cap Y)}{P(X_1 \cap X_2 \cap X_6)}$$

dan

$$P(X_2|X_3 \cap X_4 \cap X_5) = \frac{P(X_3 \cap X_4 \cap X_5 \cap X_2)}{P(X_3 \cap X_4 \cap X_5)}$$

Banyak kombinasi dari masing-masing nilai probabilitas bersyarat di atas $2 \times 5 \times 5 \times 5 = 250$ dan $5 \times 5 \times 5 = 625$. Pada data terdapat probabilitas bersyarat bernilai nol, untuk mencegahnya maka digunakan *laplace estimator*.

$$P(X_2) = P(X_2|X_3 \cap X_4 \cap X_5)P(X_3 \cap X_4 \cap X_5)$$

karena X_3 , X_4 dan X_5 independen maka

$$P(X_2) = P(X_2|X_3 \cap X_4 \cap X_5)P(X_3)P(X_4)P(X_5)$$

Sehingga diperoleh

$$P(X_2 = 1) = \sum_{X_3, X_4, X_5} P(X_2 = 1|X_3, X_4, X_5) \cdot P(X_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5) = 0.48$$

$$P(X_2 = 2) = \sum_{X_3, X_4, X_5} P(X_2 = 2|X_3, X_4, X_5) \cdot P(X_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5) = 0.19$$

dan seterusnya

$$P(X_2 = 5) = \sum_{X_3, X_4, X_5} P(X_2 = 5|X_3, X_4, X_5) \cdot P(X_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5) = 0.11$$

Kita juga dapat menyederhanakan perhitungan distribusi marjinal untuk setiap variabel (*node*) dalam BN dengan proses marginalisasi oleh variabel eliminasi. Untuk marginalisasi variabel dalam BN adalah penting untuk mengingat dua fakta kunci berikut (untuk setiap variabel A dan B):

$$\sum_B P(A|B)P(B) = P(A) \quad (3)$$

dan

$$\sum_A P(A|B) = 1 \quad (4)$$

Persamaan di atas diperoleh dengan menggunakan teorema Bayes dan persamaan (3).

Penulis telah mendapatkan bahwa distribusi probabilitas gabungan dapat ditulis sebagai berikut:

$$P(Y, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) = P(Y|X_1, X_2, X_6) \cdot P(X_1) \cdot P(X_2|X_3, X_4, X_5) \cdot P(X_6) \cdot P(X_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5)$$

Misalkan kita ingin menggunakan marginalisasi untuk mendapatkan $P(Y)$ maka $P(Y)$ adalah

$$P(Y) = \sum_{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6} \frac{P(Y|X_1, X_2, X_6) \cdot P(X_1) \cdot P(X_2|X_3, X_4, X_5) \cdot P(X_6) \cdot P(X_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5)}{P(X_4) \cdot P(X_5)} \quad (5)$$

$$P(Y) = \sum_{X_2} \left[\sum_{X_3, X_4, X_5} P(X_2|X_3, X_4, X_5) \cdot P(X_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5) \right] \left[\sum_{X_1, X_6} P(Y|X_1, X_2, X_6) \cdot P(X_1) \cdot P(X_6) \right]$$

dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh

$$\sum_{X_1, X_6} P(Y|X_1, X_2, X_6) \cdot P(X_1) \cdot P(X_6) = P(Y|X_2)$$

Sehingga kita dapat mengeliminasi X_1 dan X_6 dari persamaan (5)

$$P(Y) = \sum_{X_2} \left[\sum_{X_3, X_4, X_5} P(X_2|X_3, X_4, X_5) \cdot P(X_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5) \right] P(Y|X_2) \quad (6)$$

Kita kemudian menyederhanakan $\sum_{X_3, X_4, X_5} P(X_2|X_3, X_4, X_5) \cdot P(X_3) \cdot P(X_4) \cdot P(X_5)$ dengan persamaan (3). Sehingga X_3, X_4 dan X_5 dapat dieliminasi dari persamaan sehingga $P(Y)$ menjadi

$$P(Y) = \sum_{X_2} P(X_2)P(Y|X_2) \quad (7)$$

Maka dengan menggunakan persamaan (7) diperoleh

$$P(Y = 1) = \sum_{X_2} P(X_2)P(Y = 1|X_2) = 0,66$$

dan

$$P(Y = 2) = \sum_{X_2} P(X_2)P(Y = 2|X_2) = 0,34$$

Setelah dilakukan perhitungan setiap probabilitas, maka model prediksi stadium kanker payudara dengan *Bayesian Network* telah lengkap dibuat. Model prediksi stadium kanker payudara dapat pula dibentuk dengan menggunakan software GeNie seperti pada Gambar 2.

Dari model di atas, didapatkan probabilitas pasien yang menderita kanker payudara dengan tipe sel jinak (*benign*) sebesar 62% dan tipe sel ganas (*malignant*) sebesar 38%. Hasil ini dibandingkan dengan probabilitas hasil diagnosa pasien pada kondisi nyata ditunjukkan pada tabel.

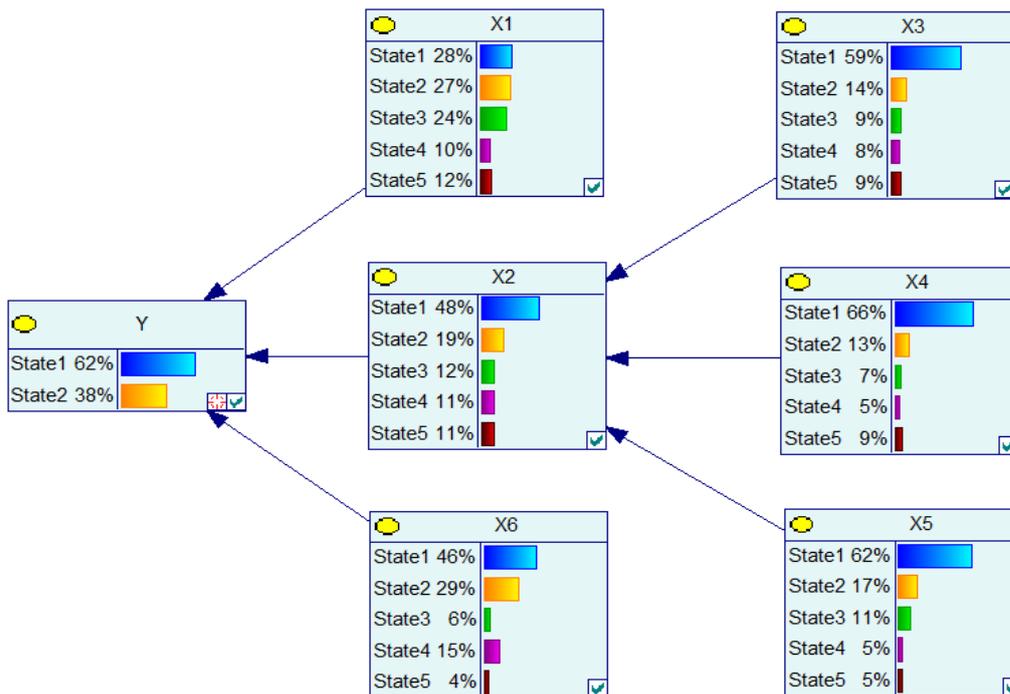
Tabel 5: Probabilitas hasil diagnosa (Y)

No.	Hasil Diagnosa	Frekuensi	Probabilitas
1	sel jinak (<i>benign</i>),	458	0.655222
2	sel ganas (<i>malignant</i>)	241	0.344778
	Total	699	1

Perbandingan hasil diagnosa bahwa sel jinak (*benign*) pada kondisi nyata dengan model BN adalah

$$\frac{\text{selisih } (p) \text{ diagnosa sel jinak } (benign)}{(p) \text{ diagnosa sel jinak } (benign) \text{ aktual}} = \frac{0,66 - 0,62}{0,02} = 0,061$$

sehingga dapat dikatakan model tersebut memiliki error sebesar 6,1%.



Gambar 2. Model prediksi diagnosa kanker payudara dengan *Bayesian Network* lengkap

Sedangkan, perbandingan hasil diagnosa bahwa sel ganas (*malignant*) pada kondisi nyata dengan model BN adalah

$$\frac{\text{selisih } (p) \text{ diagnosa sel ganas (malignant)}}{\text{(p) diagnosa sel ganas (malignant) aktual}} = \frac{0.38 - 0.34}{0.02} = 0.118$$

sehingga dapat dikatakan model tersebut memiliki error sebesar 11,8%

4. Kesimpulan dan Rekomendasi

Variabel-variabel digambarkan sebagai sebuah *node* yang kemudian membentuk sebuah jaringan hubungan sebab-akibat. Setiap variabel dapat langsung diketahui pengaruh terhadap variabel yang lain melalui gambar struktur BN yang terbentuk. Menurut teori, algoritma *Maximum Spanning Tree* merupakan algoritma yang paling sesuai dalam klasifikasi karena mempertimbangkan nilai korelasi semua variabel. Dari model *Bayesian Network*, didapatkan probabilitas pasien yang menderita kanker payudara dengan tipe sel jinak (*benign*) sebesar 62% dan tipe sel ganas (*malignant*) sebesar 38%.

Penelitian ini masih berdasarkan variabel diskret untuk membangun struktur BN sehingga perlu ada sebuah penelitian lanjut mengenai variabel kontinu. Se jauh ini algoritim untuk diskretisasi adalah algoritma *k-means*. Struktur BN memungkinkan berubah apabila menggunakan metode diskretisasi jenis lain, sehingga diperlukan penelitian lebih lanjut.

Daftar Pustaka

- Daniel, W. W. (1989). *Applied Nonparametric Statistics* (2 ed.). Boston: Pws-Kent Publishing.
- Han, J., & Kambe, M. (2001). *Data Mining: Concepts and Techniques* (2 ed.). United States of America: Morgan Kaufmann.
- Khoerudin, A. (2011). *Analisis Tingkat Kesukaan Konsumen dengan Metode Bayesian Network (Studi Kasus Produk Biskuit): Skripsi*. Bogor: FMIPA Institut Pertanian Bogor.
- Larose, D. T. (2006). *Data Mining Methods And Models*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Munir, R. (2009). *Matematika Diskrit* (3 ed.). Bandung: Informatika.
- Noviati, E. (2015). *Klasifikasi Menggunakan Metode Bayesian Belief Networks: Skripsi*. Yogyakarta: FMIPA UGM.
- Wicaksana, P. D. (2015). *Perbandingan algoritma K-Nearest Neighbor dan Naive Bayes untuk studi data "Wisconsin diagnosis breast cancer": Tesis*. Yogyakarta: Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Sanata Dharma.

IDENTIFIKASI GELOMBANG SPIKE DAN SHARP PADA DATA EEG PASIEN EPILEPSI MENGGUNAKAN *BACKPROPAGATION NEURAL NETWORK*

Agus Indra Jaya¹, Juni Wjayanti Puspita², Edy Soewono³

^{1,2}Program Studi Matematika FMIPA, Universitas Tadulako

³Departemen Matematika FMIPA, Institut Teknologi Bandung

¹jayaindraagus@gmail.com, ²juni.wpuspita@yahoo.com

³esoewono@math.itb.ac.id

Abstrak

Epilepsi adalah suatu kondisi yang ditandai oleh bangkitan berulang sebagai akibat dari abnormalitas otak permanen. Pemeriksaan penunjang yang paling sering digunakan untuk mendiagnosis dan mengklasifikasikan epilepsi adalah elektroensefalografi (EEG) yang dapat merekam aktivitas dari neuron. Umumnya, gambaran EEG pada pasien epilepsi merupakan gelombang interiktal yang terdiri dari gelombang paku (*spike*) dan gelombang tajam (*sharp*). Gelombang paku dicirikan dengan puncak yang runcing berdurasi 20-70 ms, sedangkan gelombang tajam mempunyai durasi 70-200 ms. Penelitian ini menawarkan pendekatan matematika sederhana dalam mengidentifikasi gelombang spike dan sharp menggunakan Backpropagation Neural Network berdasarkan fitur frekuensi dan amplitudo dari masing-masing gelombang. Sebanyak 260 data EEG dari pasien epilepsi digunakan sebagai training data dan 50 data EEG digunakan sebagai data testing. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode BNN yang menggunakan profil frekuensi dan amplitudo dapat mengklasifikasi kedua jenis gelombang dengan tingkat akurasi sebesar 88% untuk semua variasi *learning rate* ($0 < \alpha < 1$) dan pemilihan fungsi aktivasi (fungsi sigmoid bipolar, sigmoid biner dan *hyperbolic tangent*).

Kata Kunci: amplitudo, EEG, frekuensi, gelombang spike, gelombang sharp.

1. Pendahuluan

EEG merupakan suatu uji diagnostik utama pada epilepsi. Gambaran EEG abnormal pada pasien epilepsi dapat berupa gelombang iktal dan interiktal. Sebagian besar rekaman pasien epilepsi merupakan rekaman di luar bangkitan (interiktal). Umumnya, gelombang interiktal terdiri atas gelombang paku (*spike*) dan gelombang tajam (*sharp*). Gelombang paku dicirikan dengan puncak yang runcing berdurasi 20-70 ms sedangkan gelombang tajam mempunyai durasi 70-200 ms [1]. Gelombang lambat (*slow*) yang khas juga sering dijumpai pada rekaman EEG pasien epilepsi. Gelombang lambat ini dapat dijumpai sebelum gelombang epileptogenik, setelah gelombang epileptogenik atau sebelum dan setelah gelombang epileptogenik [2]. Perbedaan durasi tersebut erat kaitannya dengan perbedaan ukuran zona epileptogenik [3]. Gelombang epileptogenik biasanya mempunyai bentuk yang asimetrik. Setengah gelombang awal (dari dasar ke puncak) memiliki durasi yang lebih lebar daripada setengah gelombang berikutnya (dari puncak ke dasar) [1]. Kedua jenis gelombang tersebut hanya dapat dikenali secara visual oleh praktisi yang terlatih dan mempunyai pemahaman klinis yang cukup dalam masalah terkait, yang disebut *electroencephalographer* (EEG_{er}).

Pendekatan dengan metoda matematika dalam mengklasifikasikan rekaman EEG pasien epilepsi dan pasien normal telah banyak dilakukan untuk membantu para praktisi dalam mendiagnosis epilepsi [2, 4-10]. Beberapa diantaranya memanfaatkan metode-metode transformasi dalam mengekstrak fitur gelombang EEG, seperti transformasi Wavelet [4, 5], transformasi Walsh [6, 7] dan Fast Fourier Transform [10]. Tidak sedikit pula yang memanfaatkan pendekatan-pendekatan statistik dalam ekstraksi fitur gelombang epileptogenik [3, 11]. Penelitian ini menawarkan metode sederhana dalam mengekstraksi fitur gelombang epileptogenik, yakni gelombang *spike* dan gelombang *sharp*. Frekuensi yang berkorelasi dengan durasi gelombang epileptogenik, serta amplitudo gelombang epileptogenik dari data rekaman

EEG pasien epilepsi yang sudah diverifikasi oleh EEGer digunakan sebagai fitur yang menggambarkan profil dari gelombang *spike* dan gelombang *sharp*. Selanjutnya, metode *Backpropagation Neural Network* (BNN) diterapkan untuk mengklasifikasikan kedua jenis gelombang tersebut.

2. Metode Penelitian

2.1. Pengolahan Data

Data rekaman EEG pasien epilepsi sebanyak 109 data diperoleh dari rumah sakit Hasan Sadikin Bandung. Data berdurasi 30 menit yang diambil berupa data gelombang otak pasien epilepsi dalam format *edf* (*European Data format*). Data rekaman EEG dalam format *edf* ini kemudian dikonversi ke dalam data ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*) dengan menggunakan *software Polyman*. Data yang dikonversi adalah data yang dilokalisasi pada interval waktu yang mengandung gelombang epileptogenik (*sharp* atau *spike*) berdasarkan hasil pengamatan EEGer. Data gelombang epileptogenik dicuplik dalam interval waktu 1000 ms (1 detik). *Frequency sampling* yang digunakan dalam penelitian ini adalah 500 Hz, sehingga dalam 1 detik dapat diperoleh 500 titik data.

Frekuensi dari gelombang epileptogenik dapat diekstrak dengan menggunakan formula berikut ini.

$$f_i = \frac{\text{banyaknya data dalam 1 detik}}{\text{lebar gelombang epileptogenik}} = \frac{500}{\Delta t}$$

Nilai Δt dapat diperoleh dengan menentukan titik awal dan titik akhir yang memotong *baseline* dari gelombang epileptogenik. Nilai amplitudo (A_i) gelombang epileptogenik pun dapat dihitung berdasarkan *baseline* yang telah ditetapkan. Selanjutnya profil dari gelombang epileptogenik direpresentasikan ke dalam vektor berukuran 2×1 sebagai berikut:

$$X_i = \begin{pmatrix} f_i \\ A_i \end{pmatrix}, i = 1 \dots n$$

dengan n menyatakan banyaknya data epileptogenik. Selanjutnya, dilakukan penskalaan kembali data profil gelombang epileptogenik dalam skala (0,1) menggunakan formula berikut ini :

$$\hat{X} = \frac{0.8(X - \min(X))}{\max(X) - \min(X)} + 0.1$$

dimana $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$.

2.2. Implementasi Metode *Backpropagation Neural Network*

Backpropagation merupakan salah satu algoritma pembelajaran terawasi pada *Artificial Neural Network* (Jaringan Syaraf Tiruan). Algoritma *backpropagation* menggunakan error output untuk mengubah nilai bobot-bobotnya dalam arah mundur (*backward*). Untuk mendapatkan error tersebut, tahap perambatan maju (*forward propagation*) harus dikerjakan terlebih dahulu. Pada saat perambatan maju, neuron-neuron diaktifkan dengan menggunakan fungsi aktivasi yang dapat didefensiasikan [12]. Fungsi aktivasi yang sering digunakan adalah sebagai berikut:

1. Fungsi Sigmoid Biner

Output dari fungsi ini memiliki nilai pada range 0 sampai 1, yang diformulasikan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (1)$$

dengan $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$.

2. Fungsi Sigmoid Bipolar

Output dari fungsi ini memiliki nilai pada range 1 sampai -1, yang diformulasikan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad (2)$$

dengan $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + f(x))(1 - f(x))$.

3. Fungsi *Hyperbolic Tangent*

Fungsi ini sangat dekat dengan fungsi sigmoid bipolar, dengan range output antar -1 sampai 1, dan diformulasikan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \quad (3)$$

dengan $f'(x) = (1 + f(x))(1 - f(x))$.

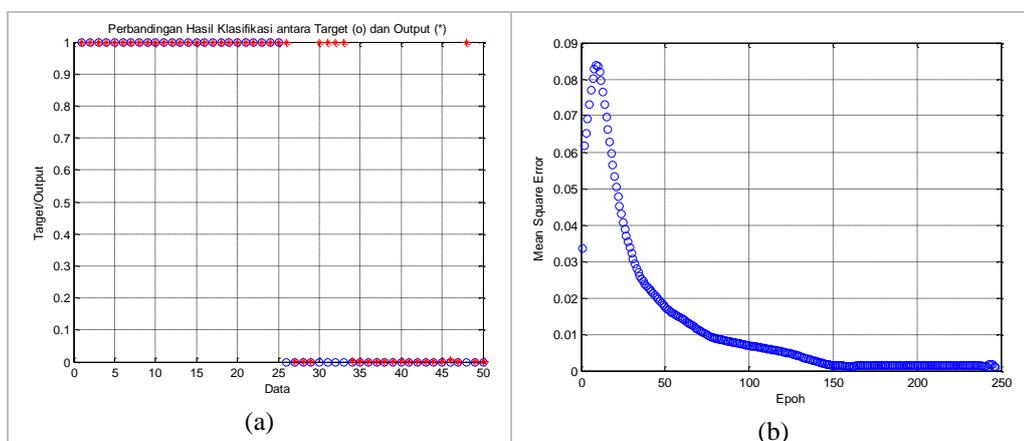
Dalam penelitian ini, profil gelombang epileptogenik yang telah dikonstruksi, digunakan sebagai input pada algoritma *Backpropagation Neural Network (BNN)*. Selanjutnya, simulasi dilakukan untuk mengklasifikasikan profil tersebut ke dalam kelompok gelombang *spike* dan gelombang *sharp*, dengan menggunakan bantuan *software* MATLAB.

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil ekstraksi fitur frekuensi dan amplitudo dari data epileptogenik dibagi menjadi dua kelompok data, yaitu kelompok *training data* dan kelompok *testing data*. Sebanyak 260 data digunakan sebagai *training* yang terdiri dari 130 data gelombang *spike* dan gelombang *sharp*. Sedangkan 50 data, masing-masing 25 data gelombang *spike* dan *sharp*, digunakan sebagai *testing*. Gelombang *spike* direpresentasikan oleh angka 1 sedangkan gelombang *sharp* direpresentasikan oleh angka 0.

Beberapa variasi pemilihan fungsi aktivasi yang diterapkan pada unit *hidden layer* dan unit *output* serta variasi *learning rate* dilakukan pada penelitian ini. Jika diberikan maksimum epoch = 1500 dan target error = 0.001, maka diperoleh hasil klasifikasi berikut ini.

1. Fungsi aktivasi Sigmoid Bipolar - Sigmoid Bipolar



Gambar 1. (a) Hasil klasifikasi vs Hasil validasi EEGer dengan $\alpha = 0.7$; (b) Grafik MSE tiap epoch

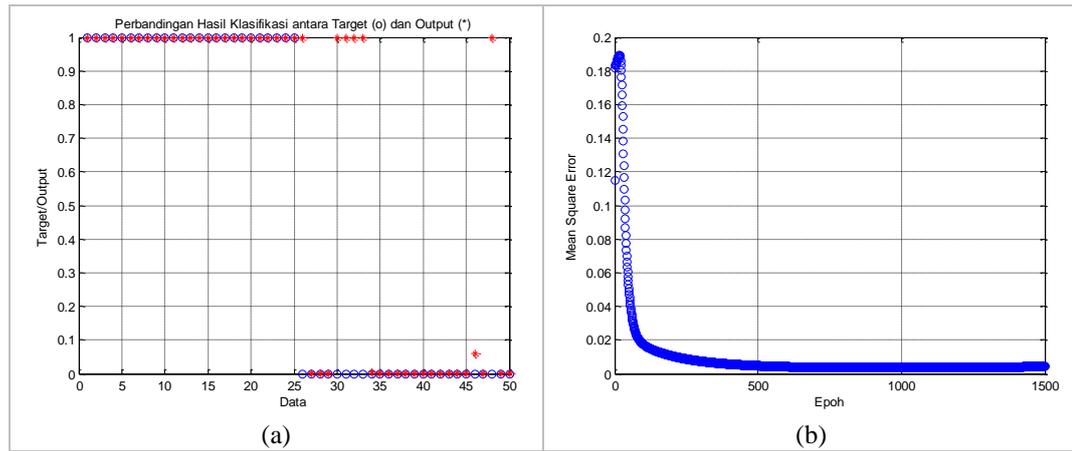
Hasil klasifikasi menggunakan fungsi aktivasi ini dapat dilihat pada Tabel 1. Berdasarkan hasil simulasi, diketahui bahwa variasi *learning rate* (α) mempengaruhi MSE tiap epoch. Jika $\alpha \leq 0.5$ maka nilai MSE berfluktuatif. Namun, jika dipilih $\alpha > 0.5$ maka nilai MSE mencapai target yang ditetapkan, seperti pada pemilihan $\alpha = 0.7$ yang ditunjukkan dalam Gambar 1(b). Target MSE tercapai pada epoch/iterasi ke-252. Semakin kecil nilai target MSE yang ditetapkan tentu akan semakin baik pula performa *classifier*.

Tabel 1: Hasil Klasifikasi untuk Fungsi Aktivasi Sigmoid Bipolar - Sigmoid Bipolar

No.	<i>Learning rate</i> (α)	MSE	<i>Testing data yang dikenali dengan benar</i>		<i>Recognition rate</i> (%)
			<i>Spike</i>	<i>Sharp</i>	
			1.	0.3	
2.	0.5	0.0057	25	19	88
3.	0.7	0.00088	25	19	88
4.	0.9	0.00098	25	19	88

2. Fungsi aktivasi Sigmoid Biner - Sigmoid Biner

Hasil klasifikasi menggunakan fungsi aktivasi ini dapat dilihat pada Tabel 2. Nilai MSE tiap epoch mengalami penurunan untuk setiap nilai *learning rate* (α) yang dipilih.

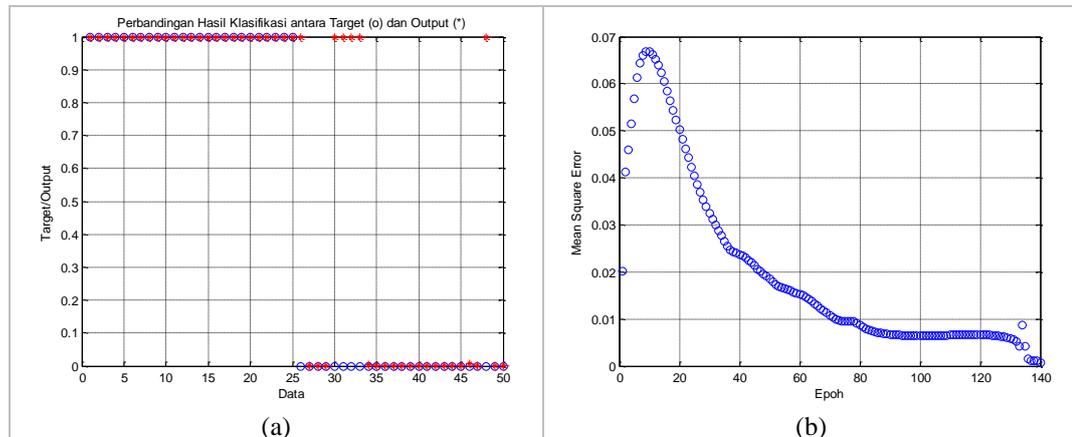


Gambar 2. (a) Hasil klasifikasi vs Hasil validasi EEGer dengan $\alpha = 0.5$; (b) Grafik MSE tiap epoch

Tabel 2: Hasil Klasifikasi untuk Fungsi Aktivasi Sigmoid Biner - Sigmoid Biner

No.	Learning rate (α)	MSE	Testing data yang dikenali dengan benar		Recognition rate (%)
			Spike	Sharp	
1.	0.3	0.0046	25	19	88
2.	0.5	0.0042	25	19	88
3.	0.7	0.0032	25	19	88
4.	0.9	0.0040	25	19	88

3. Fungsi aktivasi *Hyperbolic Tangent* – *Hyperbolic Tangent*



Gambar 3. (a) Hasil klasifikasi vs Hasil validasi EEGer dengan $\alpha = 0.3$; (b) Grafik MSE tiap epoch

Hasil klasifikasi menggunakan fungsi aktivasi ini dapat dilihat pada Tabel 3. Berdasarkan hasil simulasi, diketahui bahwa nilai MSE akan berfluktuatif ketika dipilih $\alpha \geq 0.5$. Sehingga algoritma cenderung menjadi tidak stabil.

Tabel 3: Hasil Klasifikasi untuk Fungsi Aktivasi *Hyperbolic Tangent* - *Hyperbolic Tangent*

No.	Learning rate (α)	MSE	Testing data yang dikenali dengan benar		Recognition rate (%)
			Spike	Sharp	
1.	0.3	0.00072	25	19	88
2.	0.5	0.0079	25	19	88
3.	0.7	0.0053	25	19	88
4.	0.9	0.0057	25	19	88

Berdasarkan hasil klasifikasi menggunakan algoritma BNN yang ditunjukkan pada Tabel 1 – Tabel 3, diketahui bahwa kesalahan klasifikasi hanya terjadi pada gelombang *sharp*. Hal ini diakibatkan oleh penentuan *baseline* yang menyebabkan berkurangnya lebar gelombang *sharp* yang sesuai dengan definisi kriteria pengkategorian, yaitu 70 – 200 ms. Sehingga gelombang *sharp* teridentifikasi sebagai gelombang *spike*.

4. Kesimpulan

Penelitian ini telah memberikan pendekatan matematika sederhana dalam mengklasifikasikan gelombang *spike* dan *sharp*. Hasil klasifikasi memberikan tingkat akurasi sebesar 88% untuk semua variasi *learning rate* dan pemilihan fungsi aktivasi. Kesalahan klasifikasi hanya terjadi pada gelombang *sharp* akibat dari penentuan *baseline*. Oleh karena itu, revisi penentuan *baseline* dalam ekstraksi fitur frekuensi diperlukan sehingga dapat memperkecil tingkat kesalahan dalam mengklasifikasikan gelombang *spike* dan *sharp*.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih dan apresiasi yang sebesar-besarnya kepada hibah penelitian kerja sama antara Perguruan Tinggi (PEKERTI) dikti sebagai penyandang dana penelitian. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Pusat Riset dan Kreativitas Matematika (PRKM) program studi Matematika atas kerjasama selama penelitian berlangsung.

Daftar Pustaka

- [1] Fisch, B.J., (1999). *EEG Primer. Basic Principles of Digital and Analog EEG*. Elsevier.
- [2] Puspita, W.J., (2014). *Pendekatan Bayesian untuk Identifikasi Gelombang Spike dan Gelombang Sharp pada Data EEG Pasien Epilepsi*, Tugas Akhir S2 Program studi Matematika, FMIPA ITB.
- [3] Jaseja, H., and Jaseja, B., (2012). EEG spike versus EEG sharp wave: Differential clinical significance in epilepsy. *Epilepsy Behaviour*, 25(137). doi:10.1016/j.yebeh.2012.05.023.
- [4] Nenadic, Z., and Burdick, J.W., (2005). Spike Detection Using the Continuous Wavelet Transform. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 52(1): p. 74-87.
- [5] Chavan, A.S., and Kolte M., (2011). EEG Signal Preprocessing Using Wavelet Transform. *International Journal of Electronics Engineering*, 3(1): p. 5-10.
- [6] Adjouadi, M., Cabrerizo, M., Ayala, M., Sanchez, D., Yaylali, I., Jayakar, P., and Barreto, A., (2005). Detection of Interictal Spikes and Artifactual Data through Orthogonal Transformations. *Journal of Clinical Neurophysiology*, 22: p. 53-64.
- [7] Adjouadi, M., Sanchez, D., Cabrerizo, M., Ayala, M., Jayakar, P., Yaylali, I., and Barreto, A., (2004). Interictal Spikes Detection Using the Walsh Transform. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 51: p. 868-872.
- [8] Cabrerizo, M., Ayala, M., Jayakar, P., and Adjouadi, M., (2011). Classification and Medical Diagnosis of Scalp EEG Using Artificial Neural Networks. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 7: p. 6905-6918.
- [9] LeVan, P., Urrestarazu, E., and Gotman, J., (2006). A System for Automatic Artifact Removal in Ictal Scalp EEG Based on Independent Component Analysis and Bayesian Classification. *Clinical Neurophysiology*, 117: p. 912-927.
- [10] Lian, G., Rivero, D., Dorado, J., Munteanu, C.R., and Pazos, A., (2011). Automatic feature extraction using genetic programming: An application to epileptic EEG classification. *Expert Systems with Applications*, 38: p. 1042510436.
- [11] Pudjitransani, A., (2012). *Analisis Spektrum Gelombang Otak Berbasis Fast Fourier Transform (FFT) pada Studi Kasus Keadaan Normal dan Epilepsi*. Tugas Akhir S1 Program studi Fisika, FMIPA ITB.
- [12] Khanwani, P., Sridhar, S., and Vijaylakshmi, K., (2010). Automated Event Detection of Epileptic Spikes Using Neural Network. *Int. J. Comput. Appl*, 2(4): p. 14-17.
- [13] Kusumadewi, S., (2014). *Membangun Jaringan Syaraf Tiruan (Menggunakan Matlab & Excel Link)*. Yogyakarta. Andi.

KONSTRUKSI PELABELAN GRACEFUL UNTUK GRAF POHON DENGAN BANTUAN MATRIKS KETETANGGAAN

Kiki Ariyanti Sugeng, Widita Endiyarini, Denny R. Silaban

Departemen Matematika, FMIPA Universitas Indonesia,
kiki@sci.ui.ac.id, dita_dnnb2914@yahoo.co.id, denny@sci.ui.ac.id

Abstrak

Pelabelan *graceful* merupakan pemetaan injektif f yang memetakan himpunan simpul ke $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ yang menginduksi pemetaan bijektif λ yang memetakan himpunan busur ke $\{1, 2, \dots, m\}$, dengan label busur tersebut merupakan selisih dari label simpul yang dihubungkan oleh busur tersebut. Karena λ merupakan pelabelan bijektif, maka pelabelan *graceful* akan menghasilkan label busur yang berbeda. Suatu graf yang mempunyai pelabelan *graceful* disebut sebagai graf *graceful*. Satu konjektur terkenal di pelabelan *graceful* adalah konjektur dari Ringel dan Kotzig bahwa semua p pohon mempunyai pelabelan *graceful*. Dalam rangka membuktikan konjektur ini, maka para peneliti mencoba berbagai cara mulai dari mengkonstruksi pelabelan dan menggunakan komputasi untuk membuktikan suatu graf mempunyai pelabelan *graceful*. Pada makalah ini akan digunakan matriks ketetanggaan untuk memperoleh graf *graceful* yang baru dari suatu graf *graceful* yang diketahui. Khususnya akan dibahas mengenai graf pohon.

Kata Kunci: pelabelan *graceful*, graf pohon, matriks ketetanggaan.

1. Pendahuluan

Suatu graf $G(V, E)$ terdiri atas suatu himpunan tak-kosong dan berhingga simpul V dan suatu himpunan berhingga busur E . Banyaknya anggota pada himpunan simpul V dinyatakan sebagai $n = |V|$. Banyaknya anggota pada himpunan busur E pada suatu graf G dinyatakan sebagai $m = |E|$.

Salah satu cara untuk merepresentasikan graf adalah melalui **matriks ketetanggaan** (*adjacency*). Matriks ketetanggaan $A = (a_{ij})$ adalah suatu matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ yang entrinya merepresentasikan ada tidaknya busur yang menghubungkan dua simpul, jadi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ada busur antara } x_i \text{ dan } x_j \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Pelabelan *graceful* adalah suatu pemetaan injektif f yang memetakan himpunan simpul ke $\{0, 1, 2, \dots, m\}$ yang menginduksi pemetaan bijektif λ yang memetakan himpunan busur ke $\{1, 2, \dots, m\}$, dengan label busur tersebut merupakan selisih dari label simpul yang dihubungkan oleh busur tersebut. Jika banyaknya simpul kurang dari atau sama dengan banyaknya busur, maka tidak seluruh label terpakai. Graf yang memiliki pelabelan *graceful* disebut graf *graceful*. Dalam survey Gallian (2015) tercatat beberapa kelas graf yang telah dibuktikan *graceful*, antara lain kelas graf pohon (caterpillar, firecrackers, pohon pisang), lingkaran C_n , $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$, graf roda, graf helm, graf sarang laba-laba, graf grid, graf prisma, graf matahari umum, dll

Sugeng dan Miller (2005) telah menunjukkan bahwa matriks ketetanggaan dari graf SBAA (Simpul Busur Anti Ajaib) dapat digunakan untuk membuat graf SBAA (Simpul Busur Anti Ajaib) yang baru. Salah satu cara memperoleh graf SBAA yang baru adalah dengan menggeser entri 1 searah entri-entri pada diagonal arah kanan atas ke kiri bawah dari matriks.

Dari hasil Sugeng dan Miller (2005), dengan menggunakan operasi pada matriks ketetanggaan yang tetap mempertahankan sifat PSBAA- $(a, 1)$ dapat diperoleh kelas graf baru yang juga memenuhi pelabelan PSBAA- $(a, 1)$. Pada makalah ini penulis akan menggunakan ide dari Sugeng dan Miller (2005) ini untuk pelabelan *graceful*.

2. Hasil yang diketahui

Beberapa penelitian mengenai hubungan matriks ketetanggaan dengan pelabelan, baik *graceful* maupun pelabelan yang lain, telah dilakukan. Cavalier (2009) telah membuktikan bahwa untuk graf berlabel *graceful* G dan A adalah matriks ketetanggaan diperumum dari graf G maka matriks A memiliki tepat satu entri 1 pada setiap diagonalnya, kecuali diagonal utama, jika dan hanya jika pemetaan f pada G adalah pelabelan *graceful*. Matriks A yang merepresentasikan graf *graceful* disebut matriks *graceful*. Matriks ketetanggaan diperumum adalah suatu matriks bujur sangkar yang entrinya merepresentasikan ada tidaknya busur yang menghubungkan dua simpul berlabel. Misal G adalah graf dengan m busur dan pemetaan $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, m\}$ maka matriks $A_{(m+1) \times (m+1)}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i v_j \in E(G) \text{ untuk } f(v_i) = i \text{ dan } f(v_j) = j \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

dimana $i, j = 0,1,2, \dots, m$.

Cavalier (2006) menyatakan bahwa karakteristik pelabelan *graceful* apabila dilihat dari matriks ketetanggaannya adalah memiliki tepat satu entri 1 pada setiap diagonalnya, kecuali diagonal utama. Matriks ketetanggaan A_G dengan entri a_{ij} yang merepresentasikan graf *graceful* G disebut matriks *graceful* dengan $0 \leq i, j \leq m$.

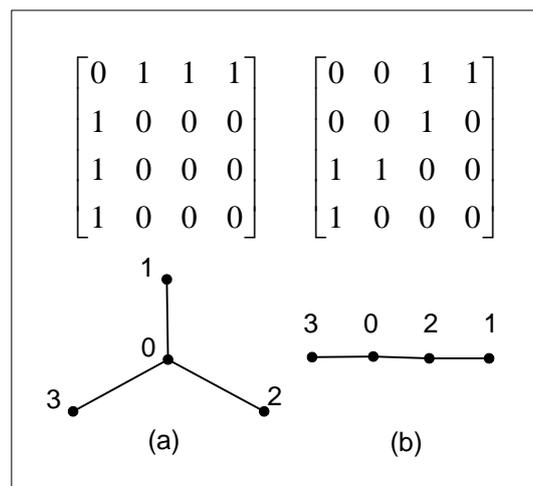
Teorema 1 (Cavalier, 2006)

Misal G adalah graf berlabel dengan pelabelan f dan A adalah matriks ketetanggaan diperumum dari graf G , maka matriks A memiliki tepat satu entri 1 pada setiap diagonalnya, kecuali diagonal utama, jika dan hanya jika f adalah pelabelan *graceful* pada G .

3. Hasil Penelitian

Untuk graf berlabel *graceful* didefinisikan juga matriks ketetanggaan diperumum. Matriks ketetanggaan diperumum adalah suatu matriks bujur sangkar yang entrinya merepresentasikan ada tidaknya busur yang menghubungkan dua simpul dengan label tertentu pada graf.

Dalam hubungannya dengan graf, baris i dan kolom j pada matriks ketetanggaan diperumum merepresentasikan label dari simpul pada graf. Perlu diperhatikan bahwa indeks baris dan kolom dari matriks ini dimulai dari 0 (bukan dari 1 seperti matriks pada umumnya). Apabila pada matriks ketetanggaan (pada umumnya) terdapat suatu baris- i ataupun kolom- j yang seluruh entrinya 0, maka simpul ke- i atau ke- j merupakan simpul terisolasi. Sedangkan pada matriks ketetanggaan diperumum, apabila terdapat suatu baris- i ataupun kolom- j yang seluruh entrinya 0, maka label simpul ke- i atau ke- j tersebut tidak digunakan dalam melabel simpul pada graf. Karena graf yang dibahas adalah graf sederhana dan terutama graf pohon, maka tidak terdapat gelung sehingga seluruh entri diagonal utama matriks ketetanggaan diperumum adalah 0.



Gambar 1. Graf bintang S_3 dan lintasan P_4 serta matriks ketetanggaan

Proses pemindahan entri 1 pada matriks ketetanggaan akan menghasilkan matriks ketetanggaan baru yang merepresentasikan graf baru yang tidak isomorfik dengan graf awal. Salah satu cara mengkonstruksi graf *graceful* baru adalah dengan memindahkan entri 1 di sepanjang diagonal-diagonal D_k matriks ketetanggaan A dengan entri a_{ij} dari graf yang telah diketahui *graceful*, dimana diagonal D_k adalah diagonal ke- k , $k = |i - j|$. Matriks ketetanggaan baru yang diperoleh memiliki ukuran yang lebih besar. Pada graf, pemindahan entri 1 pada matriks ketetanggaan merepresentasikan adanya pemindahan busur.

Adanya entri 1 yang tepat sebanyak satu pada setiap diagonal matriks ketetanggaan, kecuali pada diagonal utama, menjamin bahwa label yang dipakai pada setiap busur pada graf berbeda satu sama lain. Diagonal-diagonal dari matriks ketetanggaan merepresentasikan label dari busur-busur pada graf yang diinduksi oleh pelabelan *graceful*. Misal A adalah matriks *graceful* $n \times n$. Garis diagonal ke k dari matriks A adalah kumpulan entri $D_k = \{a_{ij} | j - i = k\}$. Maka, diagonal ke k merepresentasikan label k pada busur. Dari pendefinisian ini, diperoleh Teorema berikut.

Teorema 2:

Misal $A_{m+1 \times m+1}$ adalah matriks ketetanggaan dari suatu graf *graceful* dengan m busur. Pemindahan entri 1 pada elemen a_{ij} ke elemen a_{pq} , dimana $0 \leq i, j, p, q \leq m$, di sepanjang diagonal D_k , dimana $k = |i - j| = |p - q|$, akan menghasilkan matriks ketetanggaan yang merepresentasikan graf *graceful* yang baru.

Graf baru yang terbentuk juga akan memiliki pelabelan *graceful* karena pemindahan entri-entri 1 searah diagonal D_k pada matriks *graceful* berarti konstruksi matriks baru mempertahankan label-label busur yang unik yang menjadi karakteristik matriks *graceful*. Label busur k direpresentasikan oleh diagonal D_k pada matriks ketetanggaan.

Teorema 3.

Terdapat $m!$ graf *graceful* dengan m busur yang tidak saling isomorfik.

Bukti:

Diberikan matriks *graceful* berikut

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & m \\ 0 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right] \\ 1 & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \\ \vdots & \left[\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array} \right] \\ m & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

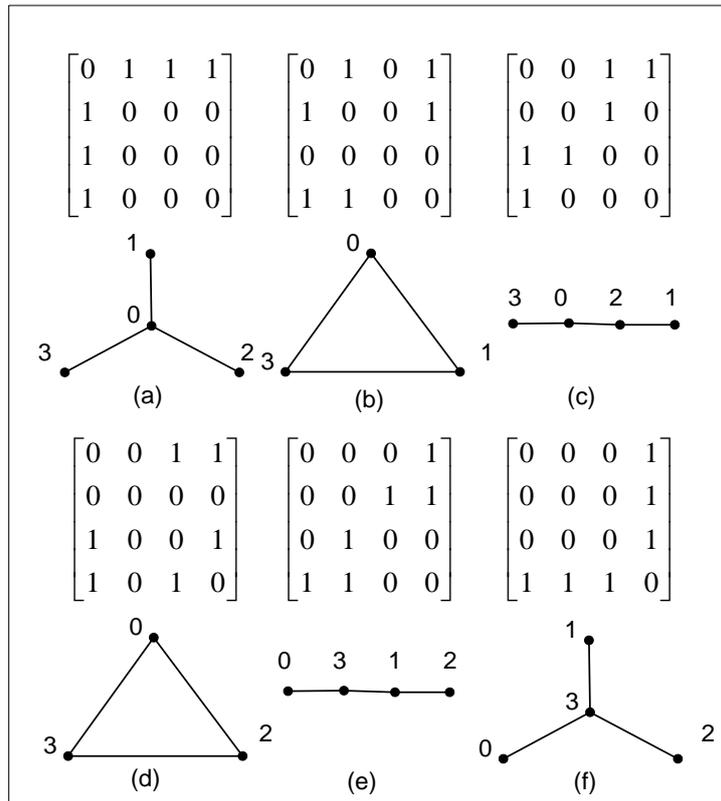
dimana matriks ini merupakan matriks simetris dengan tepat satu entri 1 pada diagonal D_k , $k = 0, 1, \dots, m$. Dapat dilihat bahwa untuk D_m , terdapat satu kemungkinan untuk meletakkan entri 1. Untuk D_{m-1} , terdapat dua kemungkinan untuk meletakkan entri 1. Untuk D_{m-2} , terdapat tiga kemungkinan untuk meletakkan entri 1 dan seterusnya hingga untuk D_1 , terdapat m kemungkinan untuk meletakkan entri 1. Sehingga secara keseluruhan terdapat $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m = m!$ kemungkinan untuk meletakkan entri 1 pada matriks *graceful*. Setiap kemungkinan tersebut merepresentasikan graf yang berbeda dan tidak isomorfik. Maka dihasilkan bahwa terdapat $m!$ graf dengan m busur yang memiliki pelabelan *graceful* yang tidak saling isomorfik.#

Untuk memperjelas hasil yang diperoleh dari observasi-observasi di atas, berikut ini akan diberikan contoh pemindahan entri 1 pada matriks ketetanggaan dari graf *graceful* yang memiliki 3 busur.

Pemindahan entri 1 pada matriks ketetanggaan dari graf *graceful* yang memiliki 3 busur dimulai dari graf bintang S_3 (Gambar 1) telah diketahui memiliki pelabelan *graceful*. Graf bintang S_3 (Gambar 2(a)) memiliki 3 busur sehingga dengan pemindahan entri 1 searah diagonal D_k , dapat diperoleh $3! - 1 = 5$ matriks ketetanggaan $A_{4 \times 4}$ baru yang merepresentasikan graf *graceful* baru yang tidak saling isomorfik. Gambar 3 memperlihatkan semua kemungkinan matriks ketetanggaan $A_{4 \times 4}$ beserta graf *graceful* dengan 3 busur yang direpresentasikan oleh matriks ketetanggaan masing-masing.

Dari Gambar 3 terlihat bahwa dari graf S_3 yang diketahui *graceful*, maka diperoleh 6 graf *graceful* baru yang tidak saling isomorfik (jika dilihat labelnya). Dapat dilihat pula pada Gambar 3 bahwa graf pohon seperti graf bintang S_3 tidak selalu menghasilkan graf pohon setelah dilakukan operasi pemindahan entri 1 (pemindahan busur). Dari Gambar 3 dapat dilihat graf pohon yang terbentuk adalah graf S_3 dan P_3 .

Dari Gallian (2015) diketahui bahwa *caterpillar* merupakan graf *graceful*. Teorema berikut memberikan alternatif bukti hasil bahwa graf kembang api (*firecracker*) regular juga merupakan graf *graceful*. Sayangnya metode ini hanya berlaku untuk graf kembang api yang regular.



Gambar 3. Matriks ketetanggaan $A_{4 \times 4}$ serta graf *graceful* dengan 3 busur yang direpresentasikannya

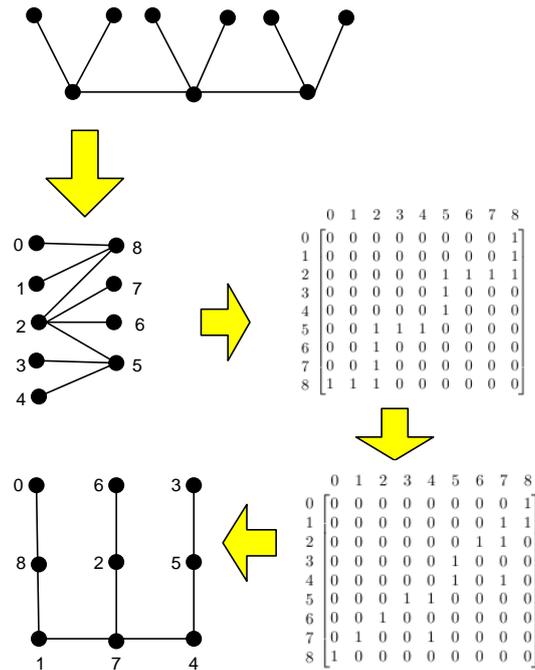
Teorema 4: Graf kembang api regular- r merupakan graf *graceful*.

Bukti:

Diberikan graf caterpillar regular- $(r + 1)$ dengan k pusat $S_{r,r,\dots,r}$. Berikan pelabelan *graceful* pada graf caterpillar menurut Rosa (1967) sebagai berikut.

Karena caterpillar adalah graf bipartite, susun simpul-simpul caterpillar menjadi dua himpunan terpisah A dan B . Beri pelabelan $0, 1, 2, \dots, |A| - 1$ untuk simpul-simpul di A secara berurutan, dan beri label $|V|, |V| - 1, |V| - 2, \dots, |A|$ untuk simpul-simpul di himpunan B . Untuk lebih jelasnya dapat dilihat contoh pada Gambar 4. Bentuk matriks *graceful* dari graf *caterpillar* ini dengan indeks mengikuti label terkecil ke terbesar. Kemudian lakukan pergeseran entri '1' dengan aturan pindahkan semua entri "1" yang menyatakan busur yang menghubungkan pusat-pusat dari caterpillar ke posisi antar daun caterpillar dengan bobot yang sama. Matriks *graceful* yang baru menunjukkan matriks *graceful* untuk graf kembang api.#

Perhatikan contoh di Gambar 4 yang menunjukkan perubahan pelabelan dari *Caterpillar* regular-2 menjadi graf kembang api regular-1. Entri "1" di posisi (8,2) dan (2,5) yang menghubungkan pusat dari caterpillar (simpul-simpul yang berlabel 8,2 dan 5) dipindahkan ke posisi yang menghubungkan (1,7) dan (7,4) secara berturut turut. Sehingga perpindahan entri "1" pada matriks diikuti perpindahan busur yang menghasilkan graf kembang api regular.



Gambar 4. Proses perubahan matriks *graceful* graf *caterpillar* menjadi graf kembang api yang *graceful*

Dengan cara yang serupa dapat juga diperoleh pelabelan graf-graf lain, seperti pelabelan graf *path-like tree* dari graf lintasan (*path*) atau regular *caterpillar-like tree* dari graf *caterpillar* (salah satunya menjadi graf kembang api).

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini sebagian dibiayai oleh Hibah PITTA UI tahun 2016.

Daftar Pustaka

- [1]. Rosa, A., On certain valuations of the vertices of a graph. (1967). Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome, July 1966). Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris. 349-355.
- [2]. Cavalier, C. M. (2009). *Graceful Labelings*. Thesis. University of South Carolina, South Carolina.
- [3]. Gallian, J. A. (2015). A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 6. #DS6.
- [4]. Sugeng, K.A. dan Miller, M. (2005) Relationship between Ketetangaan Matrices and Super (a,d)-Edge-Antimagic-Total Labeling of Graphs, *JCMCC*. Vol 55. 71-82.

NILAI TOTAL KETAKTERATURAN TITIK GRAF HASIL KALI COMB P_m DAN C_4

C. M. Corazon, Lina Hasanah, N. R. Riyanti

Jurusan Matematika UIN Sultan Syarif Kasim Riau,
corry@uin-suska.ac.id

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. Pelabelan- k total $\lambda: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dikatakan pelabelan- k total tak teratur titik jika setiap dua titik yang berbeda x dan y berlaku $wt(x) \neq wt(y)$, dimana $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$. Nilai total ketakteraturan titik graf G (*total vertex irregularity strength*) dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah nilai k minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik. Pada makalah ini akan ditentukan nilai total ketakteraturan titik dari graf $P_m \triangleright C_4$.

Katakunci : graf hasil kali comb, pelabelan total tak teratur titik, nilai total ketakteraturan titik.

1. Pendahuluan

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasang unsur-unsur graf (titik/sisi) dengan bilangan bulat non negatif. Jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Ada beberapa jenis pelabelan, diantaranya pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan tak teratur, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib.

Pelabelan total tak teratur diperkenalkan oleh Martin Baca, dkk. [7]. Mereka memperkenalkan dua jenis pelabelan total tak teratur, yaitu pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi.

Hingga kini dikenal beberapa operasi pada graf, diantaranya operasi *join* (+), gabungan (\cup), kartesian (\times), korona (\odot), dan *comb* (\triangleright). Dengan mengoperasikan dua/lebih graf, akan dihasilkan graf yang baru. Misalkan G dan H adalah dua graf sederhana dan x adalah suatu titik di graf H . Graf hasil kali *comb* dari G dan H , dinotasikan dengan $G \triangleright H$, adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan graf G dan menggandakan H sebanyak $|V(G)|$ dan mencangkokkan penggandaan graf H ke- i di titik x ke titik ke- i dari graf G [8].

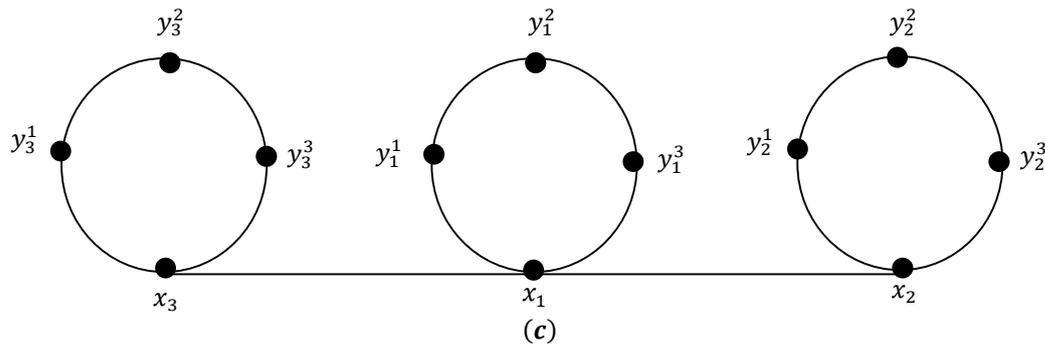
Pada makalah ini akan dibahas pelabelan total tak teratur titik, khususnya menentukan nilai total ketakteraturan titik dari graf hasil kali *comb* dari P_m dan C_4 , yang dinotasikan dengan $tvs(P_m \triangleright C_4)$, dimana P_m adalah graf lintasan dengan m titik dan C_4 adalah graf lingkaran dengan empat titik. Pelabelan total tak teratur titik sudah banyak diteliti oleh para ilmuwan sebelumnya, diantaranya Baca M., dkk. [7], Nurdin dkk. [9],[10],[11], Anholcer dkk. [5]. Selain itu, Ali Ahmad dkk. [1] juga telah memperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf helm, perumuman graf friendship, graf flower, dan graf web. Kemudian, Ahmad A., Baca M., Bashir Y. [2] telah memperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf unicyclic. Hasil-hasil penelitian yang lain dapat dilihat pada [3],[6], dan [12].

2. Survey Literatur

Definisi 1 [8]

Diberikan dua graf terhubung G dan H . Misalkan titik x adalah titik di graf H . Hasil kali *comb* dari G dan H , dinotasikan dengan $G \triangleright H$, adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan pada G dan menggandakan H sebanyak $|V(G)|$ dan mencangkokkan penggandaan graf H ke- i di titik x ke titik ke- i dari graf G .

Berikut ini adalah gambar dari graf $P_3 \triangleright C_4$



Gambar 1. Graf $P_3 \triangleright C_4$

Definisi 2 [5]

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf. Fungsi $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ disebut pelabelan- k total tak teratur titik pada G , jika setiap dua titik yang berbeda x dan y , $wt(x) \neq wt(y)$, dimana

$$wt(x) = \lambda(x) + \sum_{xy \in E(G)} f(xy)$$

Bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan- k total tak teratur titik disebut nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari G , dinotasikan dengan $tvs(G)$.

M. Baca, S. Jendrol, M. Miller, J. Ryan [7] telah memberikan batas atas dan batas bawah dari nilai total ketakteraturan titik seperti dijelaskan pada Teorema 3, serta menentukan nilai total ketakteraturan titik dari beberapa jenis graf.

Teorema 3 [7]

Misalkan G adalah graf- (p, q) dengan derajat minimum $\delta = \delta(G)$ dan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$. Maka $\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$.

Kemudian, Anholcer, M. dkk. [4] mengemukakan batas atas untuk nilai total ketakteraturan titik yang baru sebagaimana dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 4 [4]

Misalkan G adalah suatu graf berorde n dan memiliki derajat minimum $\delta > 0$, maka $tvs(G) \leq 3 \left\lceil \frac{n}{\delta} \right\rceil + 1$.

Selain nilai total ketakteraturan titik dari beberapa jenis graf yang diperoleh oleh M. Baca, S. Jendrol, M. Miller, J. Ryan pada [7], juga ada penelitian lain yang membahas nilai total ketakteraturan titik dari jenis graf yang lain. Diantaranya, Anholcer M. dkk. [5] telah mendapatkan nilai total ketakteraturan titik dari graf hutan sebagaimana yang dipaparkan pada teorema berikut.

Teorema 5 [5]

Untuk setiap graf hutan F dengan n_1 titik berderajat satu dan tidak ada titik berderajat dua dan titik isolasi, berlaku $tvs(F) = \left\lceil \frac{n_1+1}{2} \right\rceil$.

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema berikut menjelaskan nilai total ketakteraturan titik dari graf $P_m \triangleright C_4$.

Teorema 6

Misalkan $P_m \triangleright C_4$ adalah graf hasil kali comb dari graf lintasan P_m dan graf lingkaran C_4 , maka $tvs(P_m \triangleright C_4) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$.

Bukti:

Pertama-tama, akan dibuktikan $tvs(P_m \triangleright C_4) \geq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$. Perhatikan bahwa derajat titik terkecil dari graf

$P_m \triangleright C_4$ adalah 2 dan jumlah titik yang berderajat dua pada $P_m \triangleright C_4$ adalah $3m$. Agar mendapatkan pelabelan yang optimal, maka bobot setiap titik yang berderajat 2 kita beri label yang dimulai dari $3, 4, 5, \dots, 3m + 2$. Sementara bobot titik graf $P_m \triangleright C_4$ yang berderajat 2 adalah jumlah dari 3 buah bilangan bulat positif yang disebut label, yaitu 1 label titik itu sendiri dan 2 label sisi yang terkait dengan titik tersebut. Oleh sebab itu, diperoleh label terbesar minimum yang digunakan adalah $\lceil \frac{3m+2}{3} \rceil$ dan tidak mungkin kurang dari $\lceil \frac{3m+2}{3} \rceil$. Jadi, didapatkan untuk $tvs(P_m \triangleright C_4) \geq \lceil \frac{3m+2}{3} \rceil$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $tvs(P_m \triangleright C_4) \leq \lceil \frac{3m+2}{3} \rceil$ dengan menunjukkan adanya pelabelan total tak teratur titik pada graf $P_m \triangleright C_4$ menggunakan label terbesar $\lceil \frac{3m+2}{3} \rceil$.

Misalkan himpunan titik dari graf $P_m \triangleright C_4$ adalah: $V(P_m \triangleright C_4) = \{x_j, y_i^j \mid 1 \leq j \leq m \text{ dan } 1 \leq i \leq 3\}$, dan himpunan sisi dari graf $P_m \triangleright C_4$ adalah: $E(P_m \triangleright C_4) = \{x_j y_i^j \mid 1 \leq j \leq m \text{ dan } i = 2, 3\} \cup \{y_i^j y_{i+2}^j \mid i = 1 \text{ dan } 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_1^j y_2^j \mid 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_j x_{j+1} \mid 1 \leq j \leq m-2\} \cup \{x_m x_1\}$.

Berikut akan ditunjukkan adanya pelabelan- r_j total tak teratur titik pada graf $P_m \triangleright C_4$ dengan $r_j = \lceil \frac{3j+2}{3} \rceil$ untuk $1 \leq j \leq m$, yaitu :

Untuk bilangan genap $m \geq 6$, definisikan pelabelan λ sebagai berikut:

Pelabelan titiknya adalah:

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} 3m - 2r_m & ; \text{jika } i = 1 \\ 3m + i - 2r_i - 2r_m + 3 & ; \text{jika } 2 \leq i \leq \frac{m-2}{2} \\ \frac{7m+6}{2} - 3r_m & ; \text{jika } i = m \\ 3m + i - 2r_m - 2r_i + 5 & ; \text{jika } \frac{m}{2} \leq i \leq m-2 \\ \frac{5m+8}{2} - r_{m-1} - r_m & ; \text{jika } i = m-1, \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k) = i \quad ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 3$$

Pelabelan sisinya adalah:

$$\lambda(x_i y_i^k) = \begin{cases} i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 3 \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k y_i^{k+1}) = \begin{cases} i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 2 \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_j) = r_m \quad ; \text{jika } 1 \leq i \leq m$$

Untuk bilangan ganjil $m \geq 7$, definisikan pelabelan λ sebagai berikut:

Pelabelan titiknya adalah:

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} 3m - 2r_m & ; \text{jika } i = 1 \\ 3m + i - 2r_i - 2r_m + 3 & ; \text{jika } 2 \leq i \leq \frac{m-1}{2} \\ \frac{7m+7}{2} - 3r_m & ; \text{jika } i = m \\ 3m + i - 2r_m - 2r_i + 5 & ; \text{jika } \frac{m+1}{2} \leq i \leq m-2 \\ \frac{5m+9}{2} - r_{m-1} - r_m & ; \text{jika } i = m-1, \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k) = i \quad ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 3$$

Pelabelan sisinya adalah:

$$\lambda(x_i y_i^k) = \begin{cases} i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 3 \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k y_i^{k+1}) = \begin{cases} i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 2 \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = r_m \quad ; \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{m-3}{2} \text{ atau } \frac{m+1}{2} \leq i \leq m-2$$

$$\lambda\left(x_1 x_{\frac{m+1}{2}}\right) = r_m$$

$$\lambda\left(x_{\frac{m-1}{2}} x_m\right) = r_m$$

Berdasarkan pelabelan λ , diperoleh bobot titik sebagai berikut.

- Bobot titik untuk bilangan genap $m \geq 6$,

$$wt(x_i) = \begin{cases} 3m+3 & ; \text{jika } i = 1 \\ 3m+i+2 & ; \text{jika } 2 \leq i \leq \frac{m-4}{2} \\ \frac{7m}{2}+1 & ; \text{jika } i = \frac{m-2}{2} \\ \frac{7m}{2}+2 & ; \text{jika } i = m \\ \frac{7m}{2}+3 & ; \text{jika } i = m-1 \\ \frac{7m}{2}+4 & ; \text{jika } i = \frac{m}{2} \\ 3m+i+4 & ; \text{jika } \frac{m+2}{2} \leq i \leq m-2 \end{cases}$$

$$wt(y_i^k) = \begin{cases} 3i & ; 1 \leq i \leq m \text{ dengan } k = 1 \\ 3i+1 & ; 1 \leq i \leq m \text{ dengan } k = 2 \\ 3i+2 & ; 1 \leq i \leq m \text{ dengan } k = 3 \end{cases}$$

- Bobot titik untuk bilangan ganjil $m \geq 7$,

$$wt(y_i^k) = \begin{cases} 3i & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1 \\ 3i+1 & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 2 \\ 3i+2 & ; \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 3 \end{cases}$$

$$wt(x_i) = \begin{cases} 3m+3 & ; \text{jika } i = 1 \\ 3m+2i-r_i+3 & ; \text{jika } 2 \leq i \leq \frac{m-1}{2} \\ \frac{7m+7-2r_i+2i}{2} & ; \text{jika } i = m \\ 3m+2i-r_i+5 & ; \text{jika } \frac{m+1}{2} \leq i \leq m-2 \\ \frac{3m+4i+11}{2} & ; \text{jika } i = m-1, \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $wt(y_i^k)$ adalah bilangan bulat positif berurutan $3i, 3i+1, 3i+2$ dengan $1 \leq i \leq m$. Sedangkan $wt(x_i)$ adalah bilangan bulat positif berurutan yang dimulai dari $3i+3, 4i+1, 4i+2$ dengan $1 \leq i \leq m$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik pada graf $P_m \triangleright C_4$ dengan pelabelan λ memiliki bobot yang berbeda, sehingga λ adalah pelabelan total tak teratur titik dari graf $P_m \triangleright C_4$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $tvs(P_m \triangleright C_4) \leq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$.

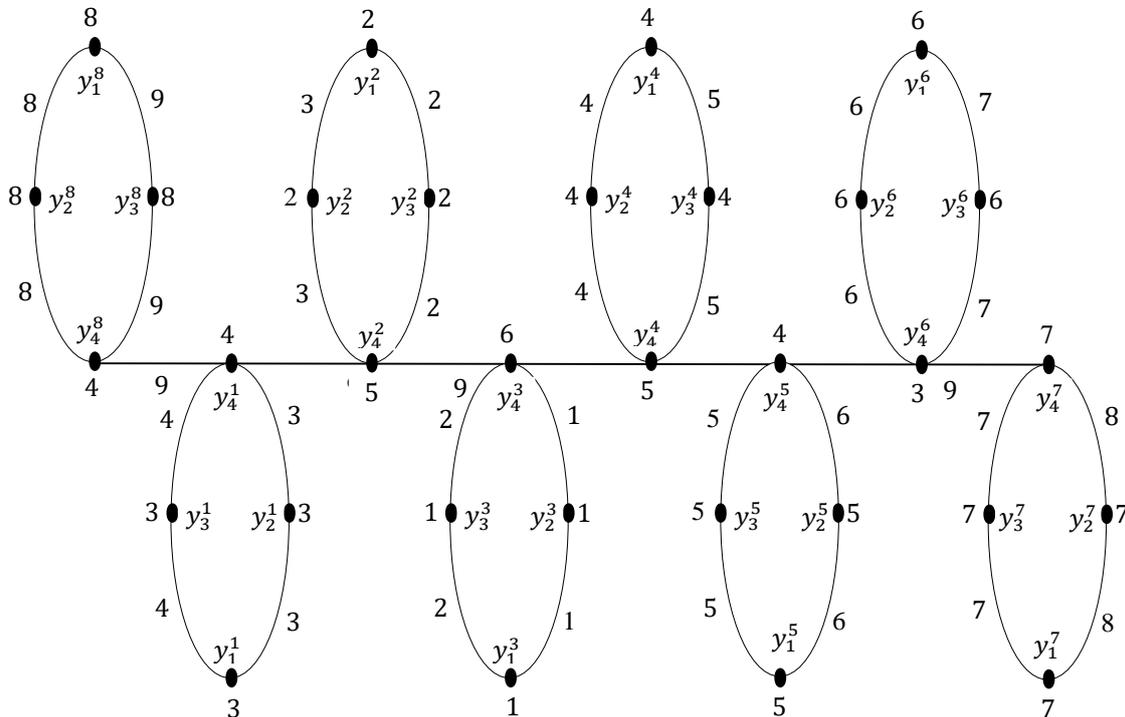
Telah didapatkan bahwa $tvs(P_m \triangleright C_4) \leq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ dan $tvs(P_m \triangleright C_4) \geq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$, jadi terbukti bahwa

$$tvs(P_m \triangleright C_4) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil.$$



Sebagai ilustrasi dari Teorema di atas, diberikan contoh pelabelan total tak teratur titik untuk graf $P_8 \triangleright C_4$ dengan $tvs(P_8 \triangleright C_4) = \left\lceil \frac{3(8)+2}{3} \right\rceil = 9$.

Dengan menggunakan rumus λ pada Persamaan (1) s.d. (7), diperoleh pelabelan untuk $P_8 \triangleright C_4$ sebagai berikut:



Gambar 2. Pelabelan-9 Total Tak Teratur Titik pada Graf $P_8 \triangleright C_4$

Label terbesar yang digunakan adalah 9 dan bisa diperiksa bahwa pelabelan tersebut mengakibatkan setiap titik mempunyai bobot yang berbeda. Jadi, pelabelan ini adalah pelabelan-9 total tak teratur titik pada $P_8 \triangleright C_4$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari makalah ini dapat disimpulkan bahwa terbukti nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf $P_m \triangleright C_4$ untuk $m \geq 3$ adalah $tvs(P_m \triangleright C_4) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$.

Daftar Pustaka

- [1] Ahmad A., Awan K.M., Javaid I., dan Slamin. Total Vertex Irregularity Strength of Wheel Related Graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 51(2011).147-156.
- [2] Ahmad A., Baca M., dan Bashir Y., Total Vertex Irregularity Strength of Certain Classes of Unicyclic Graphs, *Bull. Math. Roumanie Tome 57(105)No.2,2014,147-152*
- [3] Ahmad A., Ahtsham S., Hasni R., dan Slamin, Total Vertex Irregularity Strength of Ladder Related Graphs, *Sci.Int(Lahore)*,26(1),1-5,2014
- [4] Anholcer, M., Kalkowski, M., dan Przybylo, J. A New Upper Bound for The Total Vertex Irregularity Strength of Graphs, *Discrete Math*. Vol.309.Hal. 6316-6317(2009)
- [5] Anholcer, M., dkk. Total Vertex Irregularity Strength of Forest, *Discrete Math*. Vol. 312. Hal. 229-237(2012)
- [6] Majerski, P. dan Przybylo, J., Total Vertex Irregularity Strength of Dense Graphs. *J. Graph Theory*.76(1),34-41(2014)

- [7] M. Baca, S. Jendrol, M. Miller, dan J. Ryan. On Irregular Total Labelings, *Discrete Math.* Vol. 307 Hal. 1378-1388. (2007)
- [8] Mega, Kristina, dkk. Dimensi Metrik Lokal pada Graf Hasil Kali Comb dari Graf Siklus dan Graf Bintang. *Jurnal Matematika* Vol. 1 Hal. 1-9. (2014)
- [9] Nurdin, Baskoro, E.T., Salman A.N.M., dan Gaos, N.N., On the Total Vertex Irregularity Strength of Trees. *Discrete Math.* 310, 3043-3048 (2010)
- [10] Nurdin, Baskoro, E.T., Salman A.N.M., dan Gaos, N.N., On the Total Vertex Irregular Labelings for Several Types of Trees. *Util. Math.* 83. 277-290 (2010)
- [11] Nurdin, Salman A.N.M., Gaos, N.N., dan Baskoro, E.T., On the Total Vertex Irregular-Strength of Disjoint Union of t Copies of a Path. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 71, 227-233 (2009)
- [12] Wijaya K. dan Slamir, Total Vertex Irregular Labeling of Wheel, Fans, Suns, and Friendship Graphs. *J. Comb. Math. Comb. Comput.* 65, 103-112 (2008)

PROGRAM LINEAR MULTI OBJEKTIF INTEGER FUZZY DENGAN VARIABEL KEPUTUSAN FUZZY

Listy Vermana

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Bung Hatta
listyvermana@yahoo.com

Abstrak

Program linear multiobjektif integer fuzzy dengan variabel keputusan fuzzy adalah program linear integer yang memiliki banyak fungsi tujuan dengan koefisien fungsi tujuan dan koefisien di bagian kiri fungsi kendala dinyatakan dengan bilangan crisp, sedangkan variabel keputusan dan konstanta di bagian kanan fungsi kendala dinyatakan dengan bilangan fuzzy. Metode yang sudah ada sebelumnya adalah metode untuk menentukan solusi optimal dari program linear integer fuzzy dengan variabel keputusan fuzzy yang memiliki satu fungsi tujuan. Oleh karena itu, pada makalah ini akan diberikan tentang metode untuk menentukan solusi optimal Pareto dari program linear multiobjektif integer fuzzy dengan variabel keputusannya dinyatakan dengan bilangan fuzzy. Bilangan fuzzy yang digunakan pada makalah ini adalah bilangan fuzzy segitiga.

Kata Kunci: fuzzy, multiobjektif, ranking, score, segitiga.

1. Pendahuluan

Program linear memiliki aplikasi yang cukup banyak dalam kehidupan sehari-hari, baik program linear biasa maupun program linear *integer*. Program linear *integer* digunakan untuk permasalahan yang menginginkan solusi dalam bentuk bilangan bulat. Namun, dalam kehidupan sehari-hari nilai dari suatu parameter atau variabel yang ada pada program linear *integer* tersebut belum diketahui dengan pasti, sehingga bisa dinyatakan dengan bilangan *fuzzy* yang disebut dengan program linear *integer fuzzy*.

Metode untuk menentukan solusi optimal program linear *integer fuzzy* dengan variabel keputusan *fuzzy* yang memiliki satu fungsi tujuan yang sudah ada sebelumnya adalah metode dikemukakan oleh Sudhagar dan Ganesan [1]. Sebelumnya Lai dan Hwang [2] telah mengemukakan tentang program linear *fuzzy*, sedangkan Sakawa [3] telah mengemukakan tentang program linear *fuzzy* dan program linear multiobjektif *fuzzy* berikut dengan metode untuk menentukan solusi optimalnya, namun disini variabel keputusan dari program linear multiobjektif *fuzzy* yang diberikan masih berbentuk bilangan *crisp*. Selanjutnya, Program linear *integer* telah diberikan oleh Taha [4] berikut juga dengan metode untuk menentukan solusi optimalnya, namun disini semua koefisien dan konstantanya masih berupa bilangan *crisp*.

Untuk menentukan solusi optimal dari program linear multiobjektif *integer fuzzy* dengan variabel keputusan *fuzzy*, terlebih dahulu program linear multiobjektif *integer fuzzy* dirubah menjadi program linear *integer fuzzy* yang memiliki satu fungsi tujuan. Sebelumnya Zitzler [5] telah memberikan tentang merubah masalah optimisasi *multiobjective crisp* menjadi masalah optimisasi *single objective crisp* dengan metode pembobot. Metode pembobot ini akan digunakan untuk merubah program linear multiobjektif *integer fuzzy* menjadi program linear multiobjektif *integer fuzzy* yang memiliki satu fungsi tujuan. Selanjutnya akan diberikan teorema yang menjamin hal ini boleh dilakukan dengan merujuk pada teorema yang telah dikemukakan oleh Vermana dan Salmah [6].

Setelah diperoleh program linear *integer fuzzy* yang memiliki satu fungsi tujuan, selanjutnya solusi optimal program linear *integer fuzzy* ini ditentukan dengan menggunakan metode yang telah dikemukakan oleh Sudhagar dan Ganesan [1]. Setelah itu, diberikan tentang kriteria solusi optimal dari program linear multiobjektif *integer fuzzy* awal dalam bentuk teorema. Terakhir akan diberikan contoh numerik dari permasalahan ini.

2. Himpunan dan Bilangan Fuzzy

2.1. Himpunan Fuzzy

Himpunan *fuzzy* adalah himpunan yang setiap anggotanya memiliki nilai keanggotaan. Nilai keanggotaan dari himpunan *fuzzy* berada dalam interval tertutup $[0,1]$. Berikut diberikan definisi dari himpunan *fuzzy*.

Definisi 1. (Sakawa, [3]) Diberikan X adalah himpunan semesta. Himpunan bagian fuzzy A dari X adalah himpunan bagian dari X yang keanggotaannya didefinisikan melalui fungsi keanggotaan (*membership function*) sebagai berikut:

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]. \quad (1)$$

Fungsi keanggotaan menghubungkan setiap $x \in X$ ke bilangan real $\mu_A(x)$ di dalam interval $[0,1]$. Nilai $\mu_A(x)$ menunjukkan derajat keanggotaan x dalam A . Himpunan fuzzy A ditulis sebagai $A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$ dengan $(x, \mu_A(x))$ menyatakan elemen x mempunyai derajat keanggotaan $\mu_A(x)$.

Sebelum diberikan tentang definisi bilangan *fuzzy* terlebih dahulu diberikan definisi himpunan *fuzzy* konveks yaitu seperti definisi di bawah ini.

Definisi 2. (Sakawa, [3]) Himpunan $A \subseteq X \subseteq \mathfrak{R}^n$ dikatakan himpunan fuzzy konveks jika dan hanya jika himpunan α -level A konveks, atau himpunan fuzzy A dikatakan konveks jika dan hanya jika

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \quad (2)$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in X$ dan $\lambda \in [0,1]$.

2.2. Bilangan Fuzzy

Bilangan *fuzzy* adalah himpunan *fuzzy* konveks normal dengan semesta bilangan real yang fungsi keanggotaannya kontinu sepotong-sepotong. Berikut diberikan definisi bilangan *fuzzy*.

Definisi 3. (Chandran dan Kandaswamy, [7]) Himpunan fuzzy konveks normal $A \subseteq \mathfrak{R}$ dengan fungsi keanggotaan kontinu sepotong-sepotong adalah bilangan fuzzy, dengan

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in \mathfrak{R}\}.$$

Salah satu bilangan *fuzzy* yang umum digunakan dalam kehidupan sehari-hari adalah bilangan *fuzzy* segitiga. Berikut diberikan definisi bilangan *fuzzy* segitiga.

Definisi 4. (Bede, [8]) Bilangan fuzzy A dikatakan bilangan fuzzy segitiga ditulis (a_1, a_2, a_3) dimana a_1, a_2 dan a_3 adalah bilangan real dan fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$ diberikan oleh:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } a_3 < x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{untuk } a_1 \leq x < a_2 \\ 1 & \text{untuk } x = a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{untuk } a_2 < x \leq a_3 \end{cases} \quad (3)$$

Sama halnya dengan bilangan *crisp*, pada bilangan *fuzzy* juga terdapat operasi aritmatika untuk bilangan *fuzzy* segitiga yaitu seperti definisi dibawah ini.

Definisi 5. (Lai dan Hwang, [2]) Diberikan $A = (a_1, a_2, a_3)$ dan $B = (b_1, b_2, b_3)$ adalah dua bilangan fuzzy segitiga dengan $\tilde{A} > 0$ dan $\tilde{B} > 0$, maka fuzzy arithmetic didefinisikan sebagai berikut:

(i) Penjumlahan dari $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

(ii) Pengurangan dari $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$

(iii) Perkalian dari $AB = (a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$

(iv) Perkalian skalar

$$k > 0, a \in R : kA = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

$$k < 0, a \in R : kA = (ka_3, ka_2, ka_1)$$

(v) Pembagian $\frac{A}{B} = \left(\frac{a_1}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_1} \right)$.

3. Ranking Score Method (RSM)

RSM adalah suatu metode yang digunakan untuk menentukan *ranking* dari suatu bilangan *fuzzy* melalui suatu nilai yang disebut *score*. Berikut diberikan definisi *score*.

Definisi 6. (Chandran dan Kandaswamy, [9]) *Score* dari bilangan *fuzzy* A_i didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{Score } A_i = S_i * e^{U_i} * h_i * \alpha; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4)$$

$$S_i = \frac{\sum_{k=1}^r \int_{a_1}^{a_4} x_i f_{ki} dx}{\sum_{k=1}^r \int_{a_1}^{a_4} f_{ki} dx}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

$$T_i = \frac{\sum_{k=1}^r \int_{a_1}^{a_4} f_{ki} (x_i - S_i)^2 dx}{\sum_{k=1}^r \int_{a_1}^{a_4} f_{ki} dx}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6)$$

$$U_i = 1 - T_i e^{(-S_i)}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

dengan k adalah indeks dari *polynomial* yang berbeda yang mendefinisikan fungsi keanggotaan pada interval $[0,1]$, h_i adalah *height* dari bilangan *fuzzy* A_i , dan $\alpha \in (0,1]$. Bilangan *fuzzy* dengan *score* yang lebih tinggi akan memiliki *ranking* lebih tinggi.

Berikut diberikan definisi yang menyatakan hubungan nilai S_i dan T_i bilangan *fuzzy* yang lebih besar dari bilangan *fuzzy* lainnya.

Definisi 7. (Sudhagar dan Ganesan, [1]) Diberikan A_i dan A_j adalah dua bilangan *fuzzy* sebarang dengan fungsi keanggotaan f_{A_i} dan f_{A_j} yang terdefinisi pada interval $[a,b]$. Jika $A_i < A_j$ maka paling tidak satu dari ketaksamaan berikut berlaku.

$$(i) S_i \leq S_j, \quad (ii) T_i \geq T_j. \quad (8)$$

Selanjutnya diberikan teorema yang berkaitan dengan nilai S_i dan T_i sebagai berikut:

Teorema 8. (Sudhagar dan Ganesan, [1]) Diberikan A_i, A_j dan A_k adalah tiga bilangan *fuzzy* sebarang dengan fungsi keanggotaan f_{A_i}, f_{A_j} dan f_{A_k} yang terdefinisi pada interval $[a,b]$. Jika S_i dan T_i adalah parameter rata-rata dan sebaran dari A_i maka untuk bilangan *fuzzy* mA_i parameter masing-masingnya adalah mS_i dan m^2T_i dengan m adalah bilangan *real crisp*.

Teorema 9. (Sudhagar dan Ganesan, [1]) Diberikan A_i, A_j dan A_k tiga bilangan fuzzy sebarang dengan fungsi keanggotaan f_{A_i}, f_{A_j} dan f_{A_k} yang terdefinisi pada interval $[a, b]$. Jika $lA_i + mA_j \leq nA_k$ maka paling tidak satu dari ketaksamaan berikut berlaku.

$$\begin{aligned} (i) \quad & l\tilde{S}_i + m\tilde{S}_j \leq n\tilde{S}_k, \\ (ii) \quad & l^2\tilde{T}_i + m^2\tilde{T}_j \geq n^2\tilde{T}_k. \end{aligned} \quad (9)$$

4. Program Linear *Integer Fuzzy* dengan Variabel Keputusan *Fuzzy*

Berikut diberikan definisi program linear *integer fuzzy* (PLIF) dengan variabel keputusan *fuzzy*.

Definisi 10. (Sudhagar dan Ganesan, [1]) Program linear *integer fuzzy* dengan variabel keputusan *fuzzy* didefinisikan sebagai berikut:

$$\max (\text{ormin}) \quad \tilde{z} = c\tilde{x} \quad (10)$$

$$\text{Subject to } A\tilde{x} \leq \tilde{b}, \quad \tilde{x} \geq 0 \text{ dan integer}$$

dengan $A = (a_{ij})$ matrik bilangan real crisp, vektor $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ adalah vektor crisp dan $\tilde{x} = (\tilde{x})_{n \times 1}, \tilde{b} = (\tilde{b})_{m \times 1}$ vektor fuzzy non negatif sedemikian sehingga $\tilde{x}, \tilde{b} \in F$ untuk semua $1 < j < n$ dan $1 < i < m$.

Selanjutnya diberikan teorema yang menjamin solusi optimal dari PLIF (10) sebagai berikut.

Teorema 11. (Sudhagar dan Ganesan, [1]) Vektor fuzzy $\tilde{x} = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \dots, \tilde{x}_n^*)$ adalah solusi optimal dari permasalahan

$$\max (\text{ormin}) \quad \tilde{z} = c\tilde{x} \quad (11)$$

$$\text{Subject to } A\tilde{x} \leq \tilde{b}, \quad \tilde{x} \geq 0 \text{ dan integer}$$

jika dan hanya jika (S_i) dan (T_i) adalah vektor solusi dari program linear integer crisp berikut.

$$(i) \quad \max (\text{ormin}) \quad \tilde{z} = cS_i(\tilde{x}) \quad (12)$$

$$\text{Subject to } AS_i(\tilde{x}) \leq S_i(\tilde{b}),$$

$$S_i(\tilde{x}) \geq 0 \text{ dan integer}$$

$$(ii) \quad \min (\text{ormax}) \quad \tilde{z} = cT_i(\tilde{x}) \quad (13)$$

$$\text{Subject to } DT_i(\tilde{x}) \geq T_i(\tilde{b}),$$

$$T_i(\tilde{x}) \geq 0 \text{ dan integer}$$

Dengan $\tilde{x}_i^* = (\max[0, S_i - T_i], S_i, S_i + T_i)$, $A = (a_{ij})$ dan $D = (a_{ij}^2)$.

Berikut diberikan contoh numerik dari program linear *integer fuzzy* dengan variabel keputusan *fuzzy*.

Contoh 12. (Sudhagar dan Ganesan, [1]) Diberikan program linear *integer fuzzy* dengan variabel keputusan *fuzzy* sebagai berikut.

$$\max \quad \tilde{z} = 10\tilde{x}_1 + 20\tilde{x}_2$$

$$\text{Subject to } 6\tilde{x}_1 + 8\tilde{x}_2 \leq (46, 48, 60) \quad (14)$$

$$\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 \leq (7, 12, 20)$$

$$\tilde{x}_i \geq 0 \text{ dan integer}$$

Penyelesaian. Parameter rata-rata dan sebaran dari bilangan *fuzzy* adalah $S(46,48,60)=51,33$, $T(46,48,60)=9,56$ dan $S(7,12,20)=13$, $T(7,12,20)=7,17$. Dengan menggunakan Teorema 11 PLIF (14) dirubah menjadi dua program linear *integer crisp* berikut.

$$\begin{aligned} (i) \quad & \max \tilde{z} = 10S_1 + 20S_2 \\ & \text{Subject to } 6S_1 + 8S_2 \leq 51,33 \\ & S_1 + 3S_2 \leq 13 \\ & S_i \geq 0 \text{ dan integer} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad & \min \tilde{z} = 10T_1 + 20T_2 \\ & \text{Subject to } 36T_1 + 64S_2 \geq 9,56 \\ & T_1 + 9T_2 \geq 7,17 \\ & T_i \geq 0 \text{ dan integer} \end{aligned} \quad (16)$$

Dua program linear *integer crisp* (15) dan (16) dapat diselesaikan menggunakan software Lindo, solusinya adalah $S_1 = 4, S_2 = 3, T_1 = 0$ dan $T_2 = 1$. Menggunakan Teorema 11 diperoleh vektor solusi *integer fuzzy* adalah $\tilde{x}_1 = (4 - 0, 4, 4 + 0) = (4, 4, 4)$ dan $\tilde{x}_2 = (3 - 1, 3, 3 + 1) = (2, 3, 4)$. Selanjutnya nilai \tilde{x}_1 dan \tilde{x}_2 disubstitusikan ke fungsi tujuan yang diberikan diperoleh

$$\max \tilde{z} = 10\tilde{x}_1 + 20\tilde{x}_2 = (80, 100, 120) \quad (17)$$

5. Program Linear Multiobjektif *Integer Fuzzy* dengan Variabel Keputusan *Fuzzy*

Program linear multiobjektif *integer fuzzy* (PLMIF) dengan variabel keputusan *fuzzy* adalah program linear *integer fuzzy* dengan variabel keputusan *fuzzy* yang mempunyai banyak fungsi tujuan. Berikut diberikan definisi program linear *integer fuzzy* dengan variabel keputusan *fuzzy*.

Definisi 13. Program linear multiobjektif *integer fuzzy* dengan variabel keputusan *fuzzy* didefinisikan sebagai berikut:

$$\max (\text{ormin}) \tilde{z}^{(k)} = c_{ij}\tilde{x}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (18)$$

$$\text{Subject to } A\tilde{x} \leq \tilde{b}, \quad \tilde{x} \geq 0 \text{ dan integer}$$

dengan $A = (a_{ij})$ matrik bilangan real *crisp*, vektor $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ adalah vektor *crisp* dan $\tilde{x} = (\tilde{x})_{m \times 1}, \tilde{b} = (\tilde{b})_{m \times 1}$ vektor *fuzzy non negatif sedemikian* sehingga $\tilde{x}, \tilde{b} \in F$ untuk semua $1 < j < n$ dan $1 < i < m$.

Solusi optimal PLMIF (18) adalah berupa solusi optimal Pareto, yaitu solusi optimal kompromi dari beberapa fungsi tujuan yang diberikan. Berikut diberikan definisi solusi optimal lengkap dan solusi optimal Pareto dari PLMIF.

Definisi 14. (Solusi Optimal Lengkap) PLMIF dikatakan mempunyai solusi optimal lengkap jika $\exists \tilde{X}^* \in \mathfrak{S}, \exists \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}^*) \leq \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}), k = 1, 2, \dots, p$ untuk semua $\tilde{X}^* \in \mathfrak{S}$. Dalam hal ini \tilde{X}^* disebut solusi optimal lengkap.

Definisi 15. (Solusi Optimal Pareto) \tilde{X}^* dikatakan solusi optimal pareto PLMIF jika tidak ada $\tilde{X}^* \in \mathfrak{S}$ yang lain sedemikian sehingga $\tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}^*) \leq \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}), k = 1, 2, \dots, p$ dan $\tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}^*) \neq \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X})$ untuk paling sedikit suatu j .

Solusi optimal pareto dari PLMIF dapat ditentukan dengan mengubah PLMIF menjadi PLIF *crisp* berikut.

$$\begin{aligned} \max (\text{ormin}) \quad & \tilde{z} = w^1 z^1 + w^2 z^2 + \dots + w^p z^p \\ & \text{subject to } A\tilde{x} \leq \tilde{b}, \quad \tilde{x} \geq 0 \text{ dan integer} \end{aligned} \quad (19)$$

dengan $\sum_{k=1}^p w_k = 1$ Matrik $A = (a_{ij})$ adalah matrik bilangan real crisp, vektor $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ adalah vektor crisp dan $\tilde{x} = (\tilde{x})_{n \times 1}, \tilde{b} = (\tilde{b})_{m \times 1}$ vektor fuzzy non negatif sedemikian sehingga $\tilde{x}, \tilde{b} \in F$ untuk semua $1 < j < n$ dan $1 < i < m$, sedangkan w_1, w_2, \dots, w_p adalah bilangan *crisp*. Selanjutnya PLIF (19) dapat diselesaikan dengan menggunakan Teorema 11 sehingga diperoleh solusi optimalnya yang merupakan solusi optimal Pareto dari PLMIF (18). Berikut diberikan teorema yang menjamin hal tersebut.

Teorema 16. Jika \tilde{X}^* adalah solusi optimal PLIF (19) maka \tilde{X}^* adalah solusi optimal Pareto PLMIF (18).

Bukti. Diketahui \tilde{X}^* adalah solusi optimal PLIF (19). Andaikan \tilde{X}^* bukan solusi optimal Pareto PLMIF (18) maka terdapat $\tilde{X}^* \in \mathfrak{T}$ yang lain sehingga $\tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}^*) \leq \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}), k = 1, 2, \dots, p$ dan $\tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}^*) \neq \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X})$ paling sedikit untuk suatu j . Karena ini diperoleh

$$\sum_{k=1}^p \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}^*) \leq \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}). \quad (20)$$

Untuk suatu $w_k, k = 1, 2, \dots, p$ diperoleh

$$\sum_{k=1}^p w_k \cdot \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}^*) \leq \sum_{k=1}^p w_k \cdot \tilde{Z}^{(k)}(\tilde{X}) \quad (21)$$

dengan kata lain \tilde{X}^* bukan solusi optimal PLIF (19). Hal ini kontradiksi dengan diketahui bahwa \tilde{X}^* adalah solusi optimal PLIF (19). Jadi \tilde{X}^* adalah solusi optimal Pareto PLMIF (18).

Berikut diberikan contoh numerik dari program linear *integer fuzzy* dengan variable keputusan *fuzzy*.

Contoh 17. Diberikan program linear *integer fuzzy* dengan variable keputusan *fuzzy* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{z}^{(1)} = 10\tilde{x}_1 + 20\tilde{x}_2 \\ & \tilde{z}^{(2)} = 4\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 \\ \text{Subject to} \quad & 6\tilde{x}_1 + 8\tilde{x}_2 \leq (46, 48, 60) \\ & \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 \leq (7, 12, 20) \\ & \tilde{x}_i \geq 0 \text{ dan integer.} \end{aligned} \quad (22)$$

Penyelesaian. Parameter rata-rata dan sebaran dari bilangan *fuzzy* adalah $S(46, 48, 60) = 51,33$, $T(46, 48, 60) = 9,56$ dan $S(7, 12, 20) = 13$, $T(7, 12, 20) = 7,17$. Dengan menggunakan Teorema 16 dan memilih $w_1 = 0,6$ dan $w_2 = 0,4$ diperoleh PLIF berikut.

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{z} = 7,6\tilde{x}_1 + 13,2\tilde{x}_2 \\ \text{Subject to} \quad & 6\tilde{x}_1 + 8\tilde{x}_2 \leq (46, 48, 60) \\ & \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 \leq (7, 12, 20) \\ & \tilde{x}_i \geq 0 \text{ dan integer.} \end{aligned} \quad (23)$$

Dengan menggunakan Teorema 11 PLIF (23) dirubah menjadi dua program linear *integer crisp* berikut.

$$\begin{aligned} (i) \quad \max \quad & \tilde{z} = 7,6S_1 + 13,2S_2 \\ \text{Subject to} \quad & 6S_1 + 8S_2 \leq 51,33 \\ & S_1 + 3S_2 \leq 13 \\ & S_i \geq 0 \text{ dan integer} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \min \quad & \tilde{z} = 7,6T_1 + 13,2T_2 \\ \text{Subject to} \quad & 36T_1 + 64S_2 \geq 9,56 \\ & T_1 + 9T_2 \geq 7,17 \\ & T_i \geq 0 \text{ dan integer} \end{aligned} \quad (25)$$

Dua program linear *integer crisp* (24) dan (25) dapat diselesaikan menggunakan software Lindo, solusinya adalah $S_1 = 4, S_2 = 3, T_1 = 0$ dan $T_2 = 1$. Menggunakan Teorema 11 diperoleh vektor solusi *integer fuzzy* adalah $\tilde{x}_1 = (4 - 0, 4, 4 + 0) = (4, 4, 4)$ dan $\tilde{x}_2 = (3 - 1, 3, 3 + 1) = (2, 3, 4)$. Selanjutnya nilai \tilde{x}_1 dan \tilde{x}_2 disubstitusikan ke fungsi tujuan yang diberikan diperoleh

$$\max \tilde{z} = 10\tilde{x}_1 + 20\tilde{x}_2 = (80, 100, 120). \quad (26)$$

6. Kesimpulan

Program linear *integer* dalam kehidupan sehari-hari tidak hanya memiliki satu fungsi tujuan namun memiliki beberapa fungsi tujuan. Oleh karena itu, dibentuklah program linear *integer* dengan beberapa fungsi tujuan yang disebut dengan program linear multiobjektif *integer*. Karena dalam kehidupan sehari-hari nilai parameter maupun variabel dari program linear multiobjektif *integer* tidak selalu dapat diketahui dengan pasti maka program linear multiobjektif *integer* dapat dinyatakan sebagai program linear multiobjektif *integer fuzzy*. Selanjutnya, penyelesaian dari program linear multiobjektif *integer fuzzy* adalah berupa solusi optimal Pareto yang dapat ditentukan dengan menggunakan metode yang diberikan dalam makalah ini.

Ucapan Terima Kasih

Pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Chandran, S. dan Ganesan. K. (2010). *Fuzzy Integer Linear Programming with Fuzzy Decision Variables*. Applied Mathematical Sciences. Vol.4, no.70, p. 3493-3502.
- [2] Lai, Y. J. dan Hwang, C. L. (1992). *Fuzzy Mathematical Programming*. Springer-Verlag. New York.
- [3] Sakawa, M. (1993). *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*. Plenum Press. New York.
- [4] Taha, H.A. (2007). *Operation Research: An Introduction*. Eighth Editions. Pearson Education, Inc, United States of America.
- [5] Zitzler, E. (1999). *Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization : Methods and Applications*. Zurich : Institute für Technische Informatik und Kommunikationsnetze.
- [6] Vermana, L dan Salmah. (2014). *Masalah Transportasi Multiobjektif Fuzzy dengan Variabel Keputusan Fuzzy*. Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII, ITS, Surabaya.
- [7] Chandran, S. and Kandaswamy, G. (2012). *A Fuzzy Approach to Transport Optimization Problem*. Optimisasi Engineering, Springer.
- [8] Bede, B. (2013). *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer, USA.
- [9] Chandran, S. dan Kandaswamy, G. (2009). *Ranking Fuzzy Number based on Their Score*. In: Nagoor Gani A (ed) Proceeding of International Conference on Mathematical Methods and Computation, Allied, New Delhi, p. 383-392.

PENERAPAN FORMULASI PROGRAM LINEAR BILANGAN BULAT *SINGLE DEPOT MULTIPLE TRAVELING SALESMAN PROBLEM* PADA KASUS *DEPOSIT CARRYING* (STUDI KASUS : BANK BTN YOGYAKARTA)

Rahmawati¹, Irwan Endrayanto Aluicius²

¹Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim

²Universitas Gadjah Mada

Endrayanto@ugm.ac.id, Rahmawati.math12@gmail.com

Abstrak

Pendistribusian beberapa pekerja dari suatu tempat ke tempat lain tepat satu kali merupakan salah satu penerapan dari *multiple Traveling Salesman Problem* (mTSP) yang berbasis penugasan. Formulasi mTSP berbasis penugasan ini merupakan suatu formulasi program linear bilangan bulat yang terbagi atas dua kasus yaitu kasus *single depot* ataupun kasus multi depot. Dalam artikel ini akan dijelaskan aplikasi dari formulasi bilangan bulat untuk kasus *single depot* mTSP berbasis penugasan yaitu masalah *deposit carrying* yang selanjutnya akan diselesaikan menggunakan algoritma aditif. Prosedur yang digunakan dalam mencari solusi optimal pada metode ini adalah dengan enumerasi implisit.

Kata Kunci: mTSP, program linear, algoritma aditif.

1. Pendahuluan

Permasalahan mTSP merupakan suatu masalah menentukan himpunan rute untuk m -salesman yang mengunjungi beberapa kota atau tempat tepat satu kali yang dimulai dan berakhir di kota (depot) asal dengan $m \geq 2$, yang berarti dalam penyelesaiannya boleh lebih dari satu salesman yang menjadi solusi yang dijelaskan oleh Bektas [1]. Menurut Kara dan Bektas [5], formulasi mTSP memiliki banyak variasi, tetapi dalam artikel ini hanya akan dijelaskan mengenai formulasi *single depot* mTSP yang berbasis penugasan. Sedangkan beberapa variasi mTSP lainnya dapat dilihat pada [1], [2],[7], dan [9]. Adapun perbedaan artikel ini dengan [5] yaitu pada artikel ini dijelaskan mengenai aplikasi yang sesuai dengan formulasi *single depot* mTSP yakni masalah *deposit carrying* dan selanjutnya untuk prosedur solusi program linier bilangan bulat 0-1 nya diselesaikan dengan algoritma aditif.

2. Deskripsi Umum Masalah mTSP

Persoalan mTSP merupakan suatu persoalan yang lebih mendekati persoalan dunia nyata. Seperti halnya pendistribusian beberapa salesman dari suatu perusahaan untuk melakukan tugas tertentu ke berbagai tempat (kota). Selain itu, masalah mTSP dapat juga dipandang dalam aplikasi pendistribusian barang. Seperti halnya diperlukan lebih dari satu kendaraan pengangkut barang untuk mendistribusikan barang ke berbagai kota. Dalam hal ini, kendaraan berkorespondensi dengan salesman. Pada mTSP kendaraan yang berjumlah m akan mengunjungi semua node (kota) yang ada dengan biaya minimum. Masalah pendistribusian barang dengan sejumlah kendaraan lebih dikenal sebagai permasalahan *Vehicle Routing Problem* (VRP). Masalah mTSP dapat dianggap sebagai relaksasi dari masalah VRP tanpa adanya kendala kapasitas (*capacity constraints*). Ini berarti bahwa semua formulasi dan solusi pendekatan yang diusulkan untuk VRP juga berlaku untuk mTSP, dengan menetapkan kapasitas yang cukup besar untuk para salesman (kendaraan) sehingga kendala kapasitas dapat diabaikan. Permasalahan mTSP memiliki banyak variasi, salah satunya adalah formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan. Kara dan Bektas [5] menjelaskan mengenai definisi permasalahan mTSP berbasis penugasan sebagai berikut.

Definisi 2.1 Masalah *single* depot mTSP didefinisikan pada graf lengkap berarah $G = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, n\}$ merupakan himpunan n -node, $A = \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$ adalah himpunan sisi-sisi (*arcs*) dan $C = c_{ij}$ merupakan matriks biaya yang berhubungan dengan setiap $(i, j) \in A$. Matriks biaya C dapat simetris, asimetris, ataupun *euclidean*. Misalkan terdapat m -*salesman* yang berada di satu depot kemudian akan dicari perjalanan (tur) sedemikian sehingga semua *salesman* berawal dan berakhir di depot, setiap node yang lain tepat dikunjungi sekali dalam satu tur, jumlah node yang dikunjungi oleh *salesman* telah ditentukan dalam suatu interval, dan biaya keseluruhan mengunjungi node diminimalkan.

Definisi 2.1 x_{ij} suatu variabel biner yang bernilai 1 jika $(i, j) \in A$ solusi optimal dan bernilai 0 jika lainnya. Untuk sebarang tur, u_i adalah jumlah node yang dikunjungi pada lintasan pengunjung dari node asal ke node- i , L adalah jumlah maksimum node yang boleh dikunjungi oleh *salesman*, sehingga $1 \leq u_i \leq L$ untuk $i \geq 2$. Selanjutnya, misalkan terdapat K yaitu jumlah minimum node yang harus dikunjungi oleh *salesman*, jika $x_{i1} = 1$ maka syarat $K \leq u_i \leq L$ harus dipenuhi.

3. Formulasi Program Linear Bilangan Bulat Kasus *Single* Depot mTSP Berbasis Penugasan

Formulasi program bilangan bulat untuk *Single* Depot mTSP diberikan sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad i \neq j, (i, j) \in A \quad (1)$$

dengan kendala :

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = m, \quad (2)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{j1} = m, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 2, \dots, n \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 2, \dots, n \quad (5)$$

$$u_i + (L-2)x_{1i} - x_{i1} \leq L-1, \quad i = 2, \dots, n \quad (6)$$

$$u_i + x_{1i} + (2-K)x_{i1} \geq 2, \quad i = 2, \dots, n \quad (7)$$

$$x_{1i} + x_{i1} \leq 1, \quad i = 2, \dots, n \quad (8)$$

$$u_i - u_j + Lx_{ij} + (L-2)x_{ji} \leq L-1, \quad 2 \leq i \neq j \leq n \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (10)$$

Menurut Gavish [4], kendala (2) menjamin bahwa terdapat m -*salesman* yang berangkat dari depot asal (node-1) ke node- j sedangkan kendala (3) menjamin bahwa terdapat m -*salesman* yang kembali dari node ke- j ke depot asal (node-1). Kendala (4) menjamin bahwa setiap node ke- i tepat dikunjungi *salesman* satu kali dan kendala (5) yang menjamin bahwa setiap node ke- i tepat ditinggalkan satu kali. Sama halnya pada TSP, kendala (10) merupakan kendala *integrality* (*integrality constraints*) pada mTSP yang mengharuskan semua variabel dalam masalah adalah bilangan bulat 0-1. Karena akan dicari $x_{ij} = 1$ yang merupakan solusi bila sisi $(i, j) \in A$ dilewati, maka kendala (10) merupakan kendala yang menjamin bahwa x_{ij} solusi ataupun bukan solusi. Kendala (4), (5) dan (10) ini kadang disebut juga sebagai kendala penugasan (*assignment constraints*).

Kendala eliminasi subtur merupakan kendala yang menghilangkan (mengeliminasi) subtur yang terbentuk antara node *intermediate* dan tidak terhubung ke node asal. Kara dan Bektas [5] menjelaskan mengenai beberapa kendala eliminasi subtur lainnya dengan menambahkan batas bawah jumlah node suatu kunjungan *salesman* yaitu K . Batas bawah seperti mungkin timbul dalam kasus tertentu, di mana

masing-masing *salesman* mungkin diminta untuk berhenti oleh setidaknya K pelanggan untuk mengambil beberapa barang, dan lain sebagainya. Kendala-kendalanya tersebut adalah kendala (6), (7), (8), dan (9). Kendala-kendala subtur ini telah dikaji oleh Dantzig [3].

Formulasi ini berlaku ketika $2 \leq K \leq \lfloor n-1/m \rfloor$ dan $L \geq K$. Ketika $K \geq 4$ kendala (6) dan (7) menjamin tidak diperbolehkannya situasi $x_{ij} = x_{ji} = 1$ dan kendala (8) menjadi *redundant* atau tidak diperlukan untuk kasus ini. Kendala (8) diperlukan hanya untuk kasus $K = 2$ atau $K = 3$. Kendala (6) dan (7) disebut sebagai kendala batas atas dan batas bawah jumlah node yang dikunjungi masing-masing *salesman*, dan inialisasi nilai $u_i = 1$ jika dan hanya jika i adalah node pertama pada tur untuk sebarang *salesman*. Kendala (6) dan (7) disebut juga sebagai kendala batas (*bounding constraints*), dan merupakan kendala baru dalam TSP. Kendala (8) menjamin adanya larangan *salesman* dalam kunjungan hanya dari satu node. Ketaksamaan yang diberikan pada kendala (9) menjamin bahwa $u_j = u_i + 1$ jika dan hanya jika $x_{ij} = 1$. Dengan demikian, kendala (6) sampai dengan kendala (9) melarang pembentukan setiap subtur antara node di $V \setminus \{1\}$. Bektas dan Kara [5] menjelaskan kendala batas yakni kendala (6) dan (7) seperti pada proposisi berikut.

Proposisi 3.1 Kendala batas yang diberikan pada (6) dan (7) merupakan ketaksamaan yang berlaku untuk mTSP pada kasus $K \geq 2$.

Bukti Karena situasi $x_{ij} = x_{ji} = 1$ tidak diperbolehkan (x_{ij} dan x_{ji} kedua-duanya tidak boleh solusi), maka dipertimbangkan tiga kasus berikut:

- (i) Jika $x_{ij} = x_{ji} = 0$, maka dari ketaksamaan (6) dan (7) diperoleh $2 \leq u_i \leq L-1$.
- (ii) Jika $x_{ij} = 1$ dan $x_{ji} = 0$, maka dari ketaksamaan (6) diperoleh $u_i \leq 1$ dan dari ketaksamaan (7) diperoleh $u_i \geq 1$ sehingga mengakibatkan $u_i = 1$.
- (iii) Jika $x_{ij} = 0$ dan $x_{ji} = 1$ maka dari ketaksamaan (6) diperoleh $u_i \leq L$ dan dari ketaksamaan (7) diperoleh $u_i \geq K$ sehingga mengakibatkan $K \leq u_i \leq L$. ■

Selanjutnya diberikan proposisi yang menunjukkan hubungan yang ada antara kendala eliminasi subtur pada mTSP yang dijelaskan oleh Kara dan Bektas [5].

Proposisi 3.2 Kendala (9) yaitu dengan $u_i, u_j \in [1, n-1]$ merupakan kendala eliminasi subtur Kulkarni-Bhave untuk mTSP.

Bukti Lihat Kulkarni dan Bhave [6].

4. Algoritma Aditif

Program bilangan bulat 0-1 dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan, salah satunya masalah minimisasi. Dengan menggunakan algoritma aditif dapat dicari solusi optimal z dari masalah minimisasi tersebut. Langkah-langkah yang digunakan dalam algoritma aditif seperti pencabangan ($x = 0$ dan $x = 1$), adanya solusi parsial, dan penghentian. Prosedur yang dipakai dalam mencari solusi optimalnya adalah enumerasi implisit, yang secara sistematis memeriksa hanya sebagian dari semua kombinasi variabel yang ada. Pada tahun 1965, Balas mengusulkan metode enumerasi implisit yang secara langsung memecahkan masalah program linear 0-1. Salah satu keuntungan dari algoritma aditif adalah bahwa tidak ada *roundoff error* yaitu kesalahan dalam pembulatan bilangan. Algoritma aditif dianggap menjadi dasar bagi perkembangan selanjutnya dari berbagai metode enumerasi implisit untuk masalah program bilangan bulat (*integer programming*). Dalam artikel ini digunakan pengembangan Algoritma aditif ini telah dikaji oleh Li dan Xiaoling [8].

Dipertimbangkan masalah program linear 0-1:

$$(0-1LP) \quad \min f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (11)$$

dengan kendala :

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b, \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \quad (12)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N = \{1, 2, \dots, n\} \quad (13)$$

Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan bahwa $c_j \geq 0$ untuk setiap $j \in N$. Dengan menambahkan m variabel slack, masalah (0-1LP) dapat ditulis sebagai berikut.

$$(0-1LP_s) \quad \min f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (14)$$

dengan kendala:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \leq b, \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\} \quad (15)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N = \{1, 2, \dots, n\} \quad (16)$$

$$y_i \geq 0, \quad i \in M, \quad (17)$$

dengan y_i variabel slack non-negatif. Dalam algoritma aditif ini sangat jelas diasumsikan bahwa semua kendala harus berbentuk “kurang dari atau sama dengan (\leq)”. Jika pada masalah (0-1LP) tidak dalam bentuk ini, maka dilakukan transformasi sebagai berikut.

a. Jika kendala ke- i berbentuk ketaksamaan “lebih dari atau sama dengan (\geq)”, maka lakukan substitusi berikut.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^n -a_{ij} x_j \leq -b_j \quad (18)$$

b. Jika kendala ke- i berbentuk persamaan “(=)”, maka lakukan substitusi berikut.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_j \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j \\ \sum_{j=1}^n -a_{ij} x_j \leq -b_j \end{cases} \quad (19)$$

Transformasi juga akan dilakukan jika terdapat koefisien c_j pada fungsi objektif bernilai non-positif. Dalam masalah minimalisasi (0-1LP) dilakukan pengaturan sebagai berikut.

$$x_j \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}_j & \text{untuk } c_j \geq 0 \\ 1 - \hat{x}_j & \text{untuk } c_j < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Algoritma aditif dimulai dengan solusi parsial $J_0 = \{\}$ dan batas atas dari nilai minimum fungsi objektif $f^* = \sum_{j=1}^n c_j$. Pada iterasi t , solusi parsial adalah J_t . Misalkan x^t adalah penyelesaian khas dari

J_t dan $y_t \in R^m$ bersesuaian dengan vektor variabel slack.

Apabila $f(x^t) \geq f^*$, solusi parsial dari J_t dapat *fathomed*, tidak peduli jika x^t layak atau tidak pada (0-1LP), karena tidak ada penyelesaian dari J_t yang memiliki nilai fungsi tujuan kurang dari f^* . Proses algoritma kemudian kembali ke prosedur kilas balik.

Apabila $f(x^t) < f^*$ dan $y_t \geq 0$ yang berarti $y_t \in R^m, y_i^t \in R, \forall y_i^t \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ maka x^t adalah solusi layak yang lebih baik. Perbaharui *incumbent* dengan mengatur $f^* = f(x^t)$. Solusi parsial J_t dapat *fathomed*, karena tidak ada penyelesaian dari J_t yang dapat menghasilkan nilai fungsi tujuan kurang dari $f(x^t)$. Proses algoritma kemudian kembali ke prosedur kilas balik.

Apabila $f(x^t) < f^*$ dan $y_t \not\geq 0$, maka x^t adalah penyelesaian khas dari J_t, x^t tidak layak (*infeasible*) pada (0-1LP) dan perlu menambahkan J_t dengan setidaknya satu variabel bebas (jika ada). Prinsip dari augmentasi (perluasan) J_t adalah untuk memperkecil nilai fungsi tujuan dan tingkat ketidaklayakan. Pada iterasi t , misalkan $J_t = \{j \text{ atau } -j \mid j \in I_t \subseteq N\}$ menunjukkan solusi parsial dengan $x_j = 1$ bila $j \in J_t$ dan $x_j = 0$ bila $-j \in J_t$, dengan I_t merupakan indeks himpunan dari J_t . Untuk

mengidentifikasi kandidat augmentasi diantara semua variabel bebas, dikonstruksi himpunan T^t sebagai berikut :

$$T^t = \{j \in N \setminus I_t \mid f(x^t) + c_t < f^*, \exists i \in M \ni a_{ij} < 0, y_i^t < 0\}. \quad (21)$$

Hal ini jelas bahwa hanya x^t dengan j dalam T^t yang perlu dipertimbangkan sebagai kandidat untuk perluasan J_t pada sebelah kanan karena menugaskan 1 hingga beberapa variabel bebas yang tidak berada dalam T^t akan menyebabkan nilai fungsi tujuan terendah menjadi lebih besar dari f^* atau meningkatkan derajat ketidaklayakan (*infeasibility*) dari x^t . Jika T^t kosong, diketahui bahwa tidak ada penyelesaian layak dari J_t yang lebih baik dari *incumbent*, dan J_t kemudian *fathomed*. Apabila J_t tidak kosong, periksa lebih lanjut ketaksamaan berikut untuk $i \in M$ dengan $y_i^t < 0$:

$$y_i^t - \sum_{j \in T^t} \min\{0, a_{ij}\} \geq 0 \quad (22)$$

Jika ketaksamaan (22) tidak berlaku untuk setiap $i \in M$ dengan $y_i^t < 0$, maka variabel slack dari kendala ke- i akan tetap negatif untuk solusi apapun yang diperluas dari J_t dengan menetapkan 1 sampai beberapa variabel dalam T^t . Dengan kata lain, tidak mungkin t memiliki penyelesaian layak yang dapat dipilih untuk meningkatkan nilai *incumbent* saat ini dan dengan demikian J_t *fathomed*. Tapi, jika persamaan (22) berlaku untuk setiap $i \in M$ dengan $y_i^t < 0$, maka dapat ditambahkan J_t disebelah kanan. Sebuah kriteria yang cocok dalam memilih variabel bebas dari T^t adalah dengan menggunakan formula berikut:

$$j^t = \arg \max_{j \in T^t} \sum_{i=1}^m \min\{y_i^t - a_{ij}, 0\} \quad (23)$$

Jika J_t dipilih sesuai dengan formula di atas, maka $J_{t+1} = J_t \cup \{j^t\}$ memiliki paling sedikit derajat pelanggaran dari kendala. Algoritma aditif dapat dijelaskan melalui *flowchart* algoritma aditif seperti pada Gambar 1.

Berikut diberikan contoh masalah pemrograman linear 0-1 yang diselesaikan dengan menggunakan algoritma aditif.

Contoh Diberikan masalah (0-1LP) seperti di bawah ini.

$$\min 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 &\leq -2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 &\leq 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &\leq -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

dengan menambahkan variabel slack dihasilkan perumusan kedua sebagai berikut:

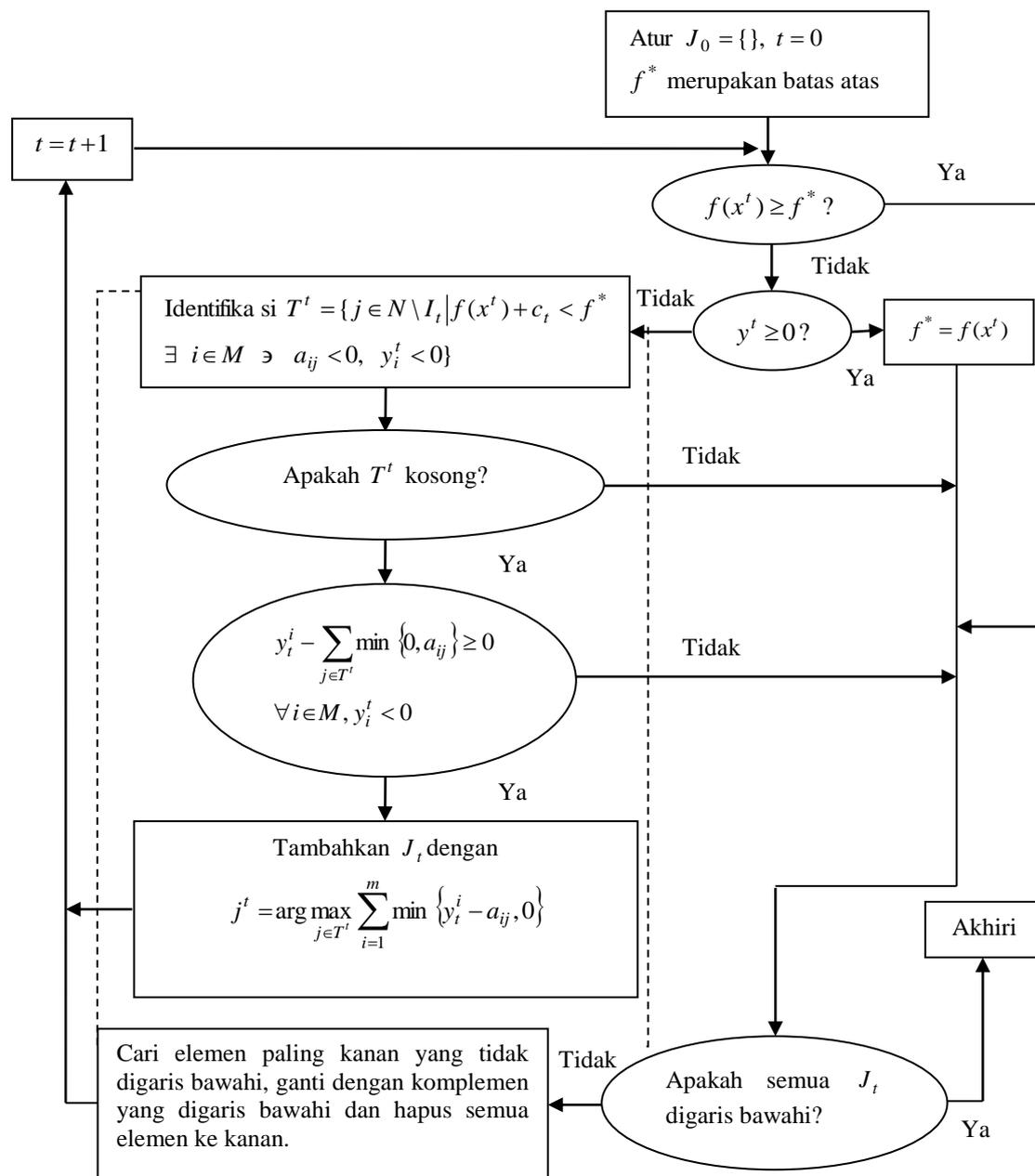
$$\min 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 + x_5$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 + 4x_5 + y_1 &= -2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + y_2 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + y_3 &= -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}, y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Iterasi Awal

$$\text{Langkah 0 : Atur } J_0 = \{ \} \text{ dan } f^* = \sum_{j=1}^5 c_j = 26.$$



Gambar 1. Flowchart Algoritma Aditif

Iterasi 1 ($t = 0$)

Langkah 1 :

 $x^0 = (0,0,0,0,0)^T$, $f(x^t) = 0 < f^* = 26$ dan $y^0 = (-2, 0, -1)^T \not\geq 0$ maka perluas J_0 .

Langkah 2 :

Perhatikan bahwa semua x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 adalah variabel bebas dan $T^0 = \{1, 3, 4\}$.

Langkah 3 :

Untuk $i = 1$, $y_1^0 - \sum_{j \in T^0} \min\{0, a_{1j}\} = -2 - (-1 - 5 - 1) = 5 \geq 0$;untuk $i = 3$, $y_3^0 - \sum_{j \in T^0} \min\{0, a_{3j}\} = -1 - (-2) = 1 \geq 0$;

Langkah 4 :

$$j^0 = \arg \max_{j \in T^0} \left\{ \sum_{i=1}^3 \min (y_i^0 - a_{ij}, 0) \right\} = \arg \max \{-1-2-1, -3, -1-2-2\} = 3 \text{ maka bentuk } J_1 = \{3\}.$$

Iterasi 2 ($t = 1$)

Langkah 1 :

$$x^1 = (0,0,1,0,0)^T, f(x^1) = 10 < f^* = 26 \text{ dan } y^1 = (3, -3, 1)^T \geq 0 \text{ maka perluas } J_1.$$

Langkah 2 : Perhatikan bahwa semua x_1, x_2, x_4, x_5 adalah variabel bebas dan $T^1 = \{2, 5\}$

$$\text{Langkah 3 : Untuk } i = 2, y_2^1 - \sum_{j \in T^1} \min \{0, a_{2j}\} = -3 - (-6 - 2) = 5 \geq 0;$$

$$\text{Langkah 4 : } j^1 = \arg \max_{j \in T^1} \left\{ \sum_{i=1}^3 \min (y_i^1 - a_{ij}, 0) \right\} = \arg \max \{0, -1-1\} = 2 \text{ maka perluas } J_2 = \{3, 2\}.$$

Iterasi 3 ($t = 2$)

Langkah 1 :

$$x^2 = (0,1,1,0,0)^T, f(x^2) = 17 < f^* = 26 \text{ dan diperoleh } y^2 = (0, 3, 0)^T \geq 0 \Rightarrow x^* = \{0, 1, 1, 0, 0\} \text{ atur } f^* = 17 \text{ dan } J_2 \text{ fathomed.}$$

Langkah 2: Perhatikan bahwa semua x_1, x_2, x_4, x_5 adalah variabel bebas dan $T^1 = \{2, 5\}$. Lacak kembali dan temukan $J_2 = \{3, -2\}$.

Iterasi 4 ($t = 3$)

Langkah 1 :

$$x^3 = (0,0,1,0,0)^T, f(x^3) = 10 < f^* = 17 \text{ dan } y^3 = (3, -3, 1)^T \geq 0 \text{ maka perluas } J_3.$$

Langkah 2:

Perhatikan bahwa semua x_1, x_4, x_5 adalah variabel bebas dan $T^3 = \{5\}$.

Langkah 3:

$$\text{Untuk } i = 2, y_2^3 - \sum_{j \in T^3} \min \{0, a_{2j}\} = -3 - (-2) = -1 \not\geq 0 \text{ maka } J_3 \text{ fathomed.}$$

Lacak kembali dan temukan himpunan $J_4 = \{-3\}$.

Iterasi 5 ($t = 4$)

Langkah 1 :

$$x^4 = (0,0,0,0,0)^T, f(x^4) = 0 < f^* = 17 \text{ dan hitung } y^4 = (-2, 0, -1)^T \geq 0 \text{ maka perlu } J_4.$$

Langkah 2:

Perhatikan bahwa semua x_1, x_2, x_4, x_5 variabel bebas dan $T^4 = \{1, 4\}$.

Langkah 3:

$$\text{Untuk } i = 3, y_3^4 - \sum_{j \in T^4} \min \{0, a_{3j}\} = -1 - (0) = -1 < 0 \text{ maka } J_4 \text{ fathomed.}$$

Langkah 4:

Tidak ada elemen dalam J_4 yang tidak digaris bawah. Algoritma berakhir dengan solusi optimal

$$x^* = \{0, 1, 1, 0, 0\} \text{ dan } f^* = 17.$$

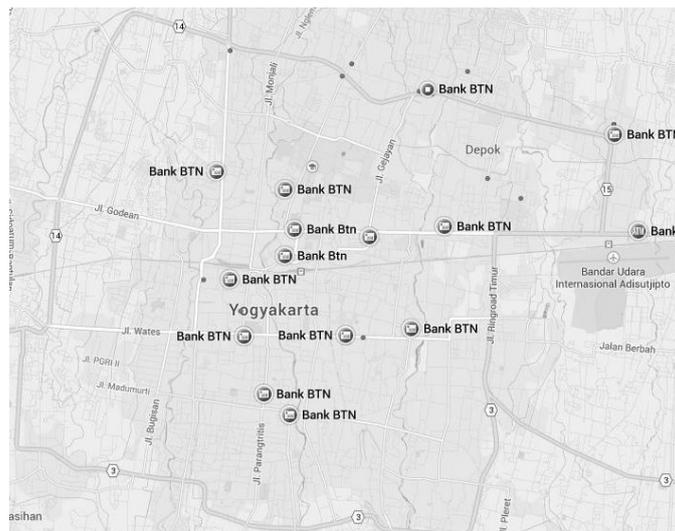
5. Aplikasi Model *Single Depot mTSP* Berbasis Penugasan Dalam Masalah *Deposit Carrying*

Dalam dunia perbankan terdapat banyak produk dan jenis pelayanan jasa yang diberikan pihak bank kepada nasabah. Tujuan dari pemberian jasa-jasa bank adalah untuk mendukung dan memperlancar kegiatan usaha menghimpun dana dan menyalurkan dana dari dan kepada masyarakat. Dana-dana nasabah yang terkumpul disetiap kantor cabang bank harus dihimpun dan dilakukan proses pengelolaannya di kantor pusat bank tersebut. Langkah yang dilakukan untuk dapat menghimpun dana nasabah di kantor bank pusat adalah dengan mengatur penjadwalan kru/pekerja yang akan ditugaskan dari

kantor bank pusat untuk mengambil deposit yang dalam hal ini disebut dengan *deposit carrying* ke berbagai kantor cabangnya.

Perencanaan penjadwalan kru yang efisien untuk mengambil deposit merupakan langkah penting dalam proses perencanaan operasional perusahaan bank tersebut. Penjadwalan kru yang mengunjungi kantor-kantor cabang bank diharapkan dapat mengambil lintasan-lintasan perjalanan yang tepat sehingga dapat meminimalkan biaya perjalanan yang dikeluarkan perusahaan bank tersebut. Penjadwalan kru/pekerja dalam hal ini terdiri dari dua tahapan yaitu tahap penentuan jumlah pekerja/kru dan penugasan kru. Penentuan jumlah pekerja yang akan ditugaskan ditetapkan *fixed* dari awal dan penugasan kru didasarkan atas adanya batas bawah kunjungan dalam lintasan perjalanan yang diambil. Batas bawah ini muncul dikarenakan masing-masing pekerja diminta untuk berhenti oleh setidaknya K kantor cabang untuk mengambil deposit. Jika m menyatakan banyak pekerja, dan n (yang cukup besar) menyatakan banyaknya *node intermediate* (kantor-kantor cabang yang akan dikunjungi), maka batas bawah kunjungan node yang boleh dilalui pekerja yakni $2 \leq K \leq \lfloor (n-1)/m \rfloor$ dan batas atas kunjungan yakni L dalam hal ini selalu lebih besar atau sama dengan K .

Dalam bagian ini akan dijelaskan mengenai aplikasi dari *single depot mTSP* yang berbasis penugasan. Aplikasi yang diangkat adalah masalah menentukan jalur yang diambil oleh para karyawan Kantor Pusat Bank Tabungan Negara (BTN) Yogyakarta untuk mengambil deposit (*deposit carrying*) ke kantor-kantor cabangnya di kota Yogyakarta. Pada penelitian ini, terdapat 14 kantor Bank BTN di kota Yogyakarta dengan rincian 1 kantor pusat dan 13 kantor cabang. Berikut ini diberikan Gambar 2 yang menjelaskan gambaran lokasi sebaran kantor Bank Tabungan Negara (BTN) di kota Yogyakarta yang diambil menggunakan *Google Maps*.



Gambar 2. Sebaran lokasi bank BTN di Yogyakarta.

Dalam upaya meminimumkan biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan bank BTN Kota Yogyakarta untuk mengambil deposit kesetiap kantor cabangnya, dilakukan penjadwalan kru/pekerja yang efisien dan optimal, sehingga diperlukan metode penjadwalan kru berdasarkan teori pemodelan *single depot mTSP* berbasis penugasan. Untuk mempermudah penentuan rute terpendek yang akan dilalui oleh para pekerja bank BTN Yogyakarta, maka dilakukan pengkonstruksian model *single depot mTSP* direpresentasikan pada graf lengkap berarah $G = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, 14\}$ merupakan himpunan node-node sebaran bank BTN di kota Yogyakarta dengan $n = 1, 2, \dots, 14 \in N$. Dalam hal ini, node 1 dianggap sebagai node asal (kantor bank pusat) dan node-node $i = 2, 3, \dots, 14$ merupakan node *intermediate* yang merupakan kantor-kantor cabangnya yang akan dikunjungi para kru/karyawan. Oleh karena itu, perlu dilakukan terlebih dahulu pengurutan nomor node dari sebaran kantor bank BTN di kota Yogyakarta.

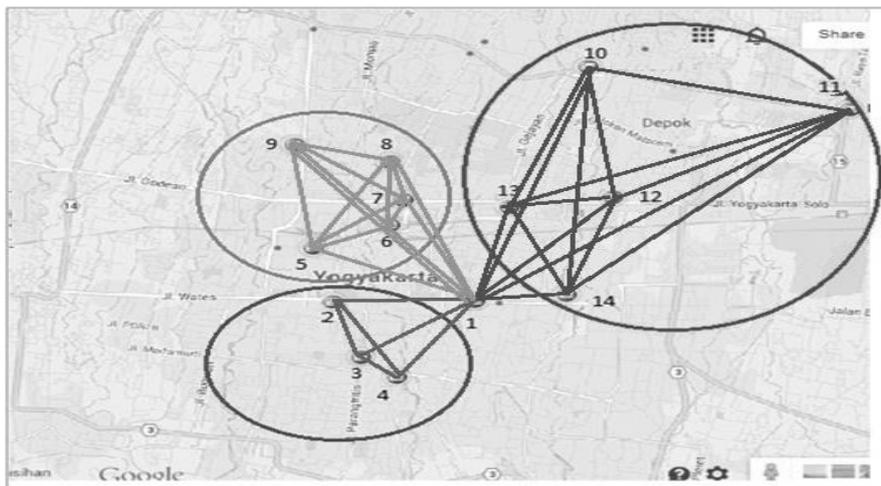
Dalam kasus ini, sisi (*arc*) yang menghubungkan satu node ke node lain merupakan sisi berbobot. Bobot ini menyatakan jarak tempuh (dalam Km) yang dilalui oleh pekerja dengan menggunakan mobil Xenia 1000cc yang dipilih secara efisien sehingga bobot jarak antara kantor- i ke kantor- j yakni c_{ij}

memenuhi syarat $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$, $i, j, k \in V$. Bobot masing-masing arcs A yang menghubungkan antar dua node yang berbeda dihimpun dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Bobot jarak (dalam km) antar node bank BTN di kota Yogyakarta.

No. Node	Kantor BTN	BTN Kas Kusuma Negara	BTN Senopati	BTN Brig. Katamso	BTN Sisinga mangaraja	BTN Sosrowijayan	BTN Sunaryo	BTN Jend. Sudirman	BTN Doktor Sardjito	BTN Jambon	BTN Condong Catur	BTN Maguwoharjo	BTN Babarsari	BTN Laksada Adi Sucipto	BTN Gondokusuman
1.	BTNKas Kusumanegara	0	2,1	2,7	2,5	3,6	3,1	3,3	4,3	6	7,3	10,1	3,9	2,3	1,5
2	BTN Senopati	2,1	0	1,7	2,5	1,5	2,6	3,1	5,3	4,5	7,9	12,2	6,1	4,5	3,6
3.	BTN Brig. Katamso	2,8	1,6	0	0,85	3,2	3,2	3,8	4,9	6,1	8,6	12,8	6,8	5,2	4,2
4.	BTN Sising mangaraja	2,5	2,5	0,85	0	4	4,1	4,7	5,7	6,8	8,4	12,2	6,4	5	4
5.	BTN Sosrowijayan	3,5	1,5	3,2	4	0	1,6	2,4	3,5	2,9	7,1	13,3	5,3	3,7	5
6.	BTN Sunaryo	3,1	2,2	3,2	4,1	1,5	0	0,85	1,9	3	5,7	10,1	3,8	2,1	4
7.	BTN Jend.Sudirman	3,3	3,6	4,6	5,4	2,8	0,8	0	1,2	2,7	5,1	11,6	4	2,4	4,8
8	BTN Doktor Sardjito	4,5	4,1	5,2	6	3,4	1,6	1,2	0	2,4	4,7	11,1	4	3,3	5,4
9.	BTN Jambon	7,4	5,9	5,9	8	4,8	4,8	4,1	4,9	0	6,6	10,6	8	6,5	8,9
10	BTNCondong Catur	6,9	7,9	8,4	8,7	7,1	5,6	4,8	4,6	7,1	0	4,5	4	4,1	7
11.	BTN Maguwoharjo	9,1	11,2	11,9	11,6	10,5	9	8,2	8,4	10,9	4,6	0	6,1	6,8	8
12.	BTN Babarsari	4,2	6,3	7	6,7	5,7	4,2	3,4	4,5	6,1	4	5,7	0	2	3,1
13.	BTN Laksada Adi Sucipto	3,8	4,7	5,3	5,5	3,9	2,4	1,6	2,7	4,3	3,4	7,1	1,6	0	3,8
14.	BTN Gondokusuman	1,5	3,6	4,2	4	5,1	3,9	4,1	5,2	8	6,4	8,9	3,2	2,8	0

Pada kasus ini telah ditetapkan banyak pekerja yang diutus dari kantor pusat bank BTN Yogyakarta (depot) sebanyak 3 orang ($m=3$) yang akan ditugaskan untuk mengambil deposit ke setiap kantor cabangnya di Yogyakarta. Untuk mempermudah penyelesaian masalah ini, diasumsikan Manager kantor pusat bank BTN, membagi wilayah-wilayah yang akan dikunjungi oleh setiap pekerjanya menjadi 3 bagian. Bagian pertama menghimpun 3 node *intermediate* yaitu node 2,3, dan 4. Bagian kedua menghimpun 5 node *intermediate* yaitu node 5,6,7,8 dan 9. Sedangkan bagian ketiga menghimpun node 10,11,12,13, dan 14. Berarti dalam hal ini, jumlah node *intermediate* yang akan dikunjungi masing-masing pekerja tidak sama. Dalam pengkontruksian model aplikasi *deposit carrying* ini, wilayah-wilayah yang telah terbagi dikatakan sebagai wilayah *tercover*. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3. Graf lengkap dari setiap wilayah *tercover*.

Karena adanya perbedaan jumlah node *intermediate* yang dikunjungi masing-masing pekerja, maka ditetapkan batas bawah node yang boleh dikunjungi pekerja yaitu berada pada selang $2 \leq K \leq \lfloor (14-1)/3 \rfloor$ sehingga $2 \leq K \leq 4$ dan dipilih $K=3$. Sedangkan batas atas node yang harus

dikunjungi pekerja yakni $L \geq K$ dan dipilih $L=5$. Selanjutnya inisialisasi nilai variable u_i yaitu jumlah node yang dikunjungi pada lintasan pengunjung dari node asal ke node i sebagai berikut: $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 2, u_4 = 1, u_5 = 5, u_6 = 1, u_7 = 2, u_8 = 3, u_9 = 4, u_{10} = 2, u_{11} = 1, u_{12} = 4, u_{13} = 3$ dan $u_{14} = 5$.

Formulasi *single depot* mTSP yang terbentuk untuk kasus ini adalah sebagai berikut.

$$\text{Minimumkan} \quad \sum_{i=1}^{14} \sum_{j=1}^{14} c_{ij} x_{ij}, \quad i \neq j, (i, j) \in A$$

dengan kendala :

$$\sum_{j=2}^{14} x_{1j} = 3,$$

$$\sum_{j=2}^{14} x_{j1} = 3,$$

$$\sum_{i=1}^{14} x_{ij} = 1, \quad j = 2, 3, \dots, 14$$

$$\sum_{j=1}^{14} x_{ij} = 1, \quad j = 2, 3, \dots, 14$$

$$u_i + 3x_{i1} - x_{i1} \leq 4, \quad i = 2, 3, \dots, 14$$

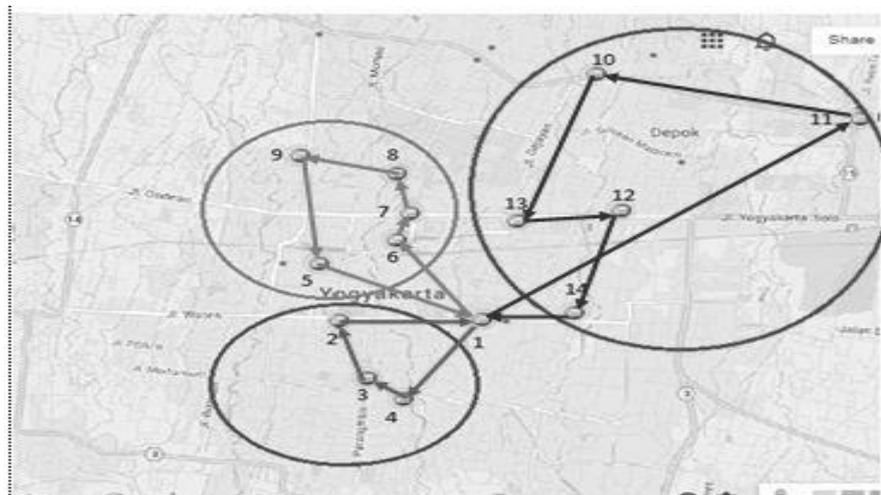
$$u_i + x_{i1} - 1x_{i1} \geq 2, \quad i = 2, 3, \dots, 14$$

$$x_{ii} + x_{i1} \leq 1, \quad i = 2, 3, \dots, 14$$

$$u_i - u_j + 5x_{ij} + 3x_{ji} \leq 4, \quad 2 \leq i \neq j \leq 14$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A$$

dengan menyelesaikan formulasi di atas, diperoleh gambaran solusi dari masalah ini diberikan pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. Graf solusi model *single depot* mTSP.

Dari solusi yang diberikan, diperoleh bobot minimum jarak yang ditempuh oleh semua pekerja sebesar 47,9 km sehingga untuk menentukan biaya minimum yang dikeluarkan perusahaan cukup dengan menghitung biaya bahan bakar kendaraan yang digunakan oleh para pekerja dalam melakukan penugasan masalah *deposit carrying* ini. Sebagai ilustrasi perhitungan numerik, jika jarak minimal yang dikunjungi para pekerja sebesar 47,9 km dan jika diasumsikan mobil yang digunakan adalah Xenia 1000cc yang diperkirakan dapat menempuh jarak 15km/liter dan apabila mobil tersebut menggunakan

bahan bakar Pertamina (Rp. 11.300,/liter), maka besar biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan Bank BTN kota Yogyakarta adalah sebesar:

$$\frac{47,9 \text{ km}}{15 \text{ km}} \times \text{Rp } 11.300,00 = \text{Rp } 36.084,67 .$$

6. Kesimpulan

Pada tulisan ini membahas mengenai model *multiple Traveling Salesman Problem* (mTSP) dapat digunakan untuk memodelkan masalah program linear yang bertujuan untuk mencari rute minimum yang akan dilalui para pekerja untuk mengunjungi beberapa tempat tepat sekali yang bermula pada satu depot dengan jumlah pekerja lebih dari 2 orang. Dalam model *single* depot mTSP ini, adanya batas bawah pada model *single* depot mTSP disebabkan masing-masing pekerja diminta untuk berhenti oleh setidaknya K pelanggan yang untuk mengambil barang dan lain sebagainya. Untuk beberapa kasus, batas bawah boleh ada tapi tidak ada pembatasan untuk batas atas. Akhir dari penelitian ini, model *single* depot mTSP dapat diterapkan dalam suatu aplikasi nyata yaitu masalah *deposit carrying* pada bank BTN di kota Yogyakarta.

Daftar Pustaka

- [1] Bektas, T., The Multiple Traveling Salesman Problem: An Overview of Formulations and Solution Procedures, *Omega The International Journal of The Management Science*, **34**, 209-219, 2006.
- [2] Christofides N., Mingozzi A., dan Toth P., Exact Algorithms For The Vehicle Routing Problem, Based On Spanning Tree and Shortest Path Relaxations, *Mathematical Programming*, **20**, 255–282, 1981.
- [3] Dantzig, G. B., Fulkerson, D. R., dan Johnson, S. M., 1954, Solution of A LargeScale Traveling Salesman Problem, *Operations Research*, **2**, pp 393–410, 1954.
- [4] Gavish, B., A Note On The Formulation of The m-salesman Traveling Salesman Problem, *Management Science*, **22(6)**, 704–705, 1976.
- [5] Kara, I., dan Bektas, T., Integer Programming Formulations of Multiple Salesman Problems and its Variations, *European Journal of Operational Research*, **174**, 1449–1458, 2006.
- [6] Kulkarni, R.V., dan Bhave, P.R., Integer Programming Formulations of Vehicle Routing Problems, *European Journal of Operational Research*, **20**, pp 58–67, 1985.
- [7] Laporte, G., dan Nobert, Y., A Cutting Planes Algorithm for The m-salesmen Problem, *Journal of the Operational Research Society*, **31**, 1017–1023, 1980.
- [8] Li Duan, dan Xiaoling, S., Nonlinear Integer Programming, *Springer*, 2006.
- [9] Mitrović-Minić, S., Krishnamurti, R., dan Laporte G., Double-horizon Based Heuristics for The Dynamic Pickup and Delivery Problem With Time Windows, *Transportation Research*, **28 (8)**, 669–85, 2004.

PENERAPAN MODEL REGRESI NONPARAMETRIK SPLINE PADA DATA ANGKA GIZI BURUK DI PROVINSI MALUKU

F. Kondo Lembang¹, M. M. Gardjalay², K. J. Poceratu³, N. Lalurmele⁴

^{1,2,4}Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Pattimura

³Program Studi Pendidikan Dokter Fakultas Kedokteran, Universitas Pattimura
ferrykondolembang@gmail.com

Abstrak

Salah satu isu strategis dari lima isu yang menjadi agenda dalam Rapat Kerja Kesehatan Nasional (RAKERKESNAS) tahun 2014 adalah peningkatan status gizi masyarakat Indonesia di tahun 2015 sampai 2019. Angka kematian bayi yang tinggi menjadi problem yang harus dipecahkan oleh Pemerintah saat ini. Salah satu indikator penyebab meningkatnya kematian balita adalah keadaan ekonomi di Indonesia yang saat ini terpuruk sehingga mengakibatkan kebutuhan gizi masyarakat menjadi tidak terpenuhi. Berdasarkan data Riset Kesehatan Dasar (Riskesdas) tahun 2013, prevalensi balita gizi buruk dan kurang di Indonesia mencapai 19,6 persen. Angka tersebut meningkat dibandingkan data Riskesdas 2010 sebesar 17,9 persen dan Riskesdas 2007 sebesar 18,4 persen. Menurut data Riskesdas untuk tiga tahun berturut-turut yakni tahun 2007, 2010, dan 2013 maka Provinsi Maluku merupakan salah satu provinsi yang tidak pernah absen dengan prevalensi gizi kurang selain Provinsi Nusa Tenggara Timur, Papua Barat, Aceh, Gorontalo, dan Nusa Tenggara Timur. Oleh karena itu, tujuan penelitian ini yaitu menggunakan pendekatan regresi nonparametrik spline untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap angka gizi buruk balita di Provinsi Maluku. Hasil penelitian yang diperoleh menunjukkan bahwa berdasarkan deskripsi kejadian balita Gizi buruk tiap Kabupaten/kota di Maluku, diperoleh persentase angka gizi buruk tertinggi adalah Kabupaten Buru dan Kabupaten Buru Selatan sebesar 16,1 persen. Selanjutnya pemodelan dengan menggunakan pendekatan regresi nonparametrik spline, diperoleh nilai GCV minimum yaitu sebesar 3,97 dan R^2 sebesar 90,88 persen. Kesimpulan lain diidentifikasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap kejadian balita gizi buruk di Provinsi Maluku adalah persentase ibu yang memeriksakan kehamilannya, persentase balita yang mendapatkan vitamin A, persentase rumah tangga yang mengakses air bersih, dan persentase rumah tangga miskin.

Kata Kunci : Prevalensi Gizi Kurang, GCV

1. Pendahuluan

Salah satu isu strategis dari lima isu yang menjadi agenda dalam Rapat Kerja Kesehatan Nasional (RAKERKESNAS) tahun 2014 adalah meningkatkan status gizi masyarakat di tahun 2015 sampai 2019 (www.depkes.go.id, 2015). Peningkatan status gizi ini pada setiap tahap kehidupan mulai dari bayi hingga lanjut usia. Semakin meningkatnya angka kematian balita sekarang ini menjadi problem yang harus segera diatasi oleh pemerintahan lewat program kerja Kementerian Kesehatan. Salah satu indikator penyebab meningkatnya kematian balita adalah keadaan ekonomi di Indonesia yang saat ini terpuruk sehingga mengakibatkan kebutuhan gizi masyarakat menjadi tidak terpenuhi. Status gizi balita turut mempengaruhi tingkat kesehatan dan harapan hidup yang merupakan salah satu bagian utama dalam penentuan keberhasilan pembangunan negara yang dikenal dengan istilah *Human Development Index* (HDI). Kekurangan gizi pada balita akan menyebabkan kegagalan pertumbuhan fisik dan perkembangan kecerdasan dan produktifitas dimasa dewasa. Balita hidup penderita gizi buruk dapat mengalami penurunan kecerdasan (IQ) hingga sepuluh persen. Selain itu, penyakit yang dapat diderita balita gizi buruk adalah diabetes (kencing manis) dan penyakit jantung koroner. Dampak paling buruk yang diterima adalah kematian pada umur yang sangat dini.

Berdasarkan data Riset Kesehatan Dasar (Riskesdas) tahun 2013, prevalensi balita gizi buruk dan kurang di Indonesia mencapai 19,6 persen. Angka tersebut meningkat dibandingkan data Riskesdas 2010

sebesar 17,9 persen dan Riskesdas 2007 sebesar 18,4 persen. Bila dilakukan konversi dalam jumlah absolutnya, maka ketika jumlah balita tahun 2013 adalah 23.708.844 mengakibatkan jumlah balita dengan gizi buruk berjumlah 4.646.933 orang. Hal ini mengakibatkan Indonesia menduduki peringkat 6 (enam) pemilik gizi buruk balita di tingkat negara-negara ASEAN (Bappenas, 2007). Berdasarkan data SUSENAS tahun 2005, sebagian besar status kekurangan gizi balita terjadi di Indonesia Bagian Timur dan salah satunya provinsi Maluku. Menurut data Riskesdas untuk tiga tahun berturut-turut yakni tahun 2007, 2010, dan 2013 maka Provinsi Maluku merupakan salah satu provinsi yang tidak pernah absen dengan prevalensi gizi kurang selain Provinsi Nusa Tenggara Timur, Papua Barat, Aceh, Gorontalo, dan Nusa Tenggara Timur.

Merujuk informasi diatas, penelitian ini dilakukan untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang mempengaruhi gizi buruk balita di provinsi Maluku dengan menggunakan model regresi nonparametrik spline. kelebihan dari metode regresi nonparametrik spline adalah dapat mengidentifikasi hubungan variabel respon dengan variabel prediktor yang tidak diketahui bentuk fungsinya, hanya diasumsikan *smooth* (mulus) dalam arti termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu. Model ini sangatlah fleksibel dan tepat untuk memodelkan pola data yang bersifat acak.

1.1. Regresi Nonparametrik Spline

Dalam analisis regresi terdapat dua pendekatan estimasi model, yaitu regresi parametrik dan regresi nonparametrik. Apabila dalam analisis regresi bentuk kurva regresi (pola hubungan variabel respon dan variabel prediktor) diketahui, maka pendekatan model regresi tersebut dinamakan model regresi parametrik (Budiantara, 2006). Namun jika pola hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon tidak diketahui bentuknya, maka pendekatan regresi nonparametrik merupakan solusi yang dapat dipakai untuk menyelesaikan kasus tersebut. Dalam kasus ini, analisis regresi yang digunakan yaitu analisis regresi nonparametrik. Regresi Nonparametrik menggambarkan pola hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor dengan asumsi pola hubungan antara kedua variabel tersebut tidak diketahui bentuk fungsinya. Secara visual bentuk pola kedua variabel tersebut mempunyai pola yang tidak teratur atau menyebar. Regresi nonparametrik ada beberapa macam diantaranya adalah *k-Nearest Neighbour*, *kernel*, *Spline* dan lain-lain.

Secara umum regresi nonparametrik dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$y = f(x) + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

diberikan data $(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{pi}, y_i)$ dan hubungan antara $(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{pi})$ dan y_i diasumsikan mengikuti model regresi nonparametrik $y_i = g(t_{1i}, t_{2i}, \dots, t_{pi}) + \varepsilon_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dengan y_i variabel respon, f kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya. Apabila g merupakan model aditif dan dihipotesiskan dengan fungsi spline maka diperoleh model regresi

$$\begin{aligned} y_i &= g(t_{1i}) + g(t_{2i}) + \dots + g(t_{pi}) + \varepsilon_i \\ &= \sum_{j=1}^p f(t_{ji}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2)$$

dimana

$$\begin{aligned} g_j(t_{ji}) &= \sum_{h=1}^q \alpha_{hj} t_{ji}^h + \sum_{l=1}^m \beta_{lj} (t_{ji} - K_{lj})_+^q \\ &= \alpha_{1j} t_{ji} + \dots + \alpha_{qj} t_{ji}^q + \beta_{1j} (t_{ji} - K_{1j})_+^q + \dots + \beta_{mj} (t_{ji} - K_{mj})_+^q, \quad \text{dengan} \\ (t_{ji} - K_{lj})_+^q &= \begin{cases} (t_{ji} - K_{lj})^q & t_{ji} \geq K_{lj} \\ 0 & t_{ji} < K_{lj} \end{cases} \end{aligned}$$

dan $K_{1j}, K_{2j}, \dots, K_{mj}$ adalah titik-titik knot yang memperlihatkan pola perubahan perilaku dari fungsi pada sub-sub interval yang berbeda. Nilai q pada persamaan di atas merupakan derajat polinomial. Kurva polinomial derajat satu disebut kurva linear, derajat dua disebut sebagai kurva kuadratik, serta derajat tiga disebut sebagai kurva kubik. Agar diperoleh spline yang optimal perlu dipilih titik knot yang optimal. Salah satu metode untuk memilih titik knot yang optimal adalah dengan metode GCV (*Generalized Cross Validation*) (Budiantara, 2000). Model spline yang sesuai berkaitan dengan titik knot yang optimal didapat dari nilai GCV terkecil. Fungsi GCV didefinisikan sebagai

$$GCV(K_1, K_2, \dots, K_m) = \frac{MSE(K_1, K_2, \dots, K_m)}{(n^{-1} \text{tr}[I - A(K_1, K_2, \dots, K_m)])^2} \quad (3)$$

Dimana,

$$MSE(K_1, K_2, \dots, K_m) = n^{-1} \sum_{j=1}^n \left(y_j - \hat{f}_{(K_1, K_2, \dots, K_m)}(t_j) \right)^2$$

K_1, K_2, \dots, K_m adalah titik knot dan matriks $A(K_1, K_2, \dots, K_m)$ diperoleh dari persamaan $\hat{y} = A(K_1, K_2, \dots, K_m)y$. Setelah diperoleh model spline terbaik, selanjutnya akan dilakukan pengujian parameter yang terdiri dari uji serentak dan uji individu serta pengujian distribusi normal pada residual.

1.2. Pengujian Serentak

Uji signifikansi parameter variabel prediktor dalam model secara bersama-sama dilakukan untuk mengetahui peranan masing-masing variabel prediktor terhadap variabel respon dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Hipotesis

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_p \neq 0, p = 1, 2, \dots, k$$

Statistik uji yang digunakan adalah uji F :

$$F_{hitung} = \frac{MS_{regresi}}{MS_{residual}} \quad (4)$$

Tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{\alpha; (k, n-k-1)}$

1.3. Pengujian Parsial

Setelah dilakukan pengujian serentak, apabila ada variabel prediktor yang signifikan maka dilanjutkan pengujian individu terhadap variabel prediktor yang berpengaruh saja terhadap variabel respon. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut

Hipotesis

$$H_0 : \beta_p = 0$$

$$H_1 : \beta_p \neq 0; p = 1, 2, \dots, k$$

Statistik uji yang digunakan adalah uji t :

$$t_{hitung} = \frac{\hat{\beta}_p}{se(\hat{\beta}_p)} \quad (5)$$

Tolak H_0 jika $|t_{hitung}| > t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-k\right)}$, dimana n adalah jumlah pengamatan dan k adalah jumlah parameter.

1.4. Pengujian Normalitas Residual

Uji normalitas dimaksud untuk menguji apakah nilai residual yang telah distandarisasi pada model regresi berdistribusi normal atau tidak. Untuk mendeteksi apakah nilai residual terstandarisasi berdistribusi normal atau tidak, maka dapat digunakan metode analisis grafik yakni melihat normal Q-Q Plot. Secara teoritis, suatu set data mempunyai sebaran normal apabila residual data tersebar disekitar garis.

1.5. Metodologi Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari data Riset Kesehatan Dasar (Riskesdas) tahun 2013 dan Survei Sosial Ekonomi Nasional (Susenas) tahun 2013. Riskesdas tahun 2013 mempunyai desain sampling yang sama dengan Susenas Tahun 2013 dimana datanya dapat mengestimasi kesehatan masyarakat kabupaten/kota, provinsi, ataupun nasional. Variabel yang diambil

dari Riskesdas adalah persentase balita gizi buruk, persentase ibu yang memeriksakan kehamilannya, persentase balita yang mencukupi kebutuhan protein, persentase balita yang mendapatkan vitamin A, persentase rumah tangga yang mengakses air bersih dan persentase bayi berat lahir rendah. Sedangkan variabel yang diambil dari Susenas adalah persentase rumah tangga miskin. Lokasi penelitian adalah di Provinsi Maluku yang terdiri atas 11 Kabupaten/Kota.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis data adalah sebagai berikut :

1. Mendeskripsikan kejadian balita gizi buruk di Maluku
 - i. Mendeskripsikan kejadian balita gizi buruk, ibu yang memeriksakan kehamilannya, balita yang mencukupi kebutuhan protein, balita yang mendapatkan vitamin A, Rumah Tangga yang mengakses air bersih, BBLR, Rumah Tangga miskin.
 - ii. Menginterpretasikan hasil analisis dan mengambil kesimpulan
2. Memodelkan kejadian balita gizi buruk di Provinsi Maluku dengan pendekatan Spline
 - i. Membuat *Scatterplot* antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor yang dijadikan sebagai deteksi awal mengenai pola hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor
 - ii. Memodelkan variabel respon dengan menggunakan spline linear dan berbagai titik knot.
 - iii. Menentukan titik-titik knot optimal yang didasarkan pada nilai GCV Minimum.
 - iv. Menetapkan model spline terbaik
 - v. Menguji signifikansi parameter secara serentak dan individu.
 - vi. Melakukan uji normalitas residual
 - vii. Menginterpretasikan hasil analisis
 - viii. Mengambil kesimpulan

2. Tabel dan Gambar

2.1. Tabel Statistika Deskriptif

Provinsi Maluku memiliki 11 Kabupaten/Kota secara administratif. Setiap Kabupaten/Kota cenderung memiliki kondisi sosial ekonomi yang berbeda. Berikut dibawah ini analisis deskriptif dari setiap variabel penelitian yang digunakan.

Tabel 1: Statistika Deskriptif

Variabel	Mean	Variance	Min	Max
Y	10,24	12,89	4,40	16,10
X ₁	71,16	461,59	15,50	92,80
X ₂	42,19	545,79	0,00	93,00
X ₃	39,45	82,65	19,90	52,10
X ₄	67,54	80,40	55,00	77,50
X ₅	0,81	0,88	0,00	3,20
X ₆	22,36	50,96	4,42	29,75

Berdasarkan tabel 1, rata-rata persentase balita dengan gizi buruk di 11 kabupaten/kota di Maluku menunjukkan angka sebesar 10,24 persen. Hal ini berarti, rata-rata balita dengan gizi buruk pada 1000 balita di 11 kabupaten/kota di Maluku terdapat sekitar 102 balita dengan gizi buruk dimana keragaman data sebesar 12,89. kemudian, persentase balita dengan gizi buruk terbesar yaitu menunjukkan angka 16,10 persen dan persentase terendah yaitu sebesar 4,40 persen. Artinya, diantara 1000 balita terdapat 44 hingga 161 balita dengan gizi buruk.

2.2. Tabel Nilai Knot dan GCV Untuk Satu Titik Knot

Model regresi spline linier dengan satu titik knot adalah sebagai berikut.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 (x_1 - K_1)_+^1 + \dots + \hat{\beta}_{11} x_6 + \hat{\beta}_{12} (x_6 - K_6)_+^1$$

Nilai GCV untuk model regresi spline linier 1 knot disajikan pada tabel 2 dibawah ini :

Tabel 2 :Nilai Knot dan GCV Untuk Satu titik Knot

No	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	GCV
1	76	61	47	25	17	25	7,42
2	85	52	72	41	5	23	7,16

3	55	50	65	44	9	5	7,13
4	95	54	81	18	14	5	8,93
5	77	45	45	46	15	19	6,15
6	83	57	67	46	11	11	5,23
7	83	62	53	12	6	26	7,35
8	80	48	78	42	6	32	7,40
9	58	57	52	35	5	34	8,31
10	71	56	49	33	18	45	7,21

2.3. Tabel Nilai Knot dan GCV Untuk Dua Titik Knot

Model regresi spline linier dengan dua titik knot adalah sebagai berikut :

$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 (x_1 - K_1)_+^1 + \hat{\beta}_3 (x_1 - K_2)_+^1 + \dots + \hat{\beta}_{16} x_6 + \hat{\beta}_{17} (x_6 - K_{11})_+^1 + \hat{\beta}_{18} (x_6 - K_{12})_+^1$ Nilai GCV untuk model regresi spline linier dengan dua titik knot disajikan pada tabel 3 dibawah ini

Tabel 3 :Nilai Knot dan GCV Untuk Dua titik Knot

No	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	GCV
1	82	50	59	9	14	10	11,13
	85	51	73	18	34	19	
2	92	59	54	28	3	15	11,50
	95	64	77	31	13	39	
3	66	50	45	16	1	7	12,65
	70	51	70	17	12	40	
4	64	50	68	14	9	28	10,35
	71	56	80	19	15	32	
5	85	54	61	18	3	16	8,13
	100	60	79	27	5	23	
6	82	49	77	12	3	26	10,23
	92	55	82	36	12	29	
7	80	57	57	15	11	15	9,83
	97	58	68	32	14	18	
8	84	52	52	40	6	6	9,15
	83	59	58	43	18	37	
9	81	53	77	12	15	32	9,90
	93	57	81	36	19	40	
10	75	46	51	28	1	27	9,65
	85	52	74	34	13	31	

Berdasarkan hasil pemodelan regresi spline linier dengan dua titik knot pada tabel 3 diperoleh nilai GCV minimum sebesar 8,13. Perubahan perilaku pola data dari GCV minimum terjadi pada saat knot pada $K_1=85$; $K_2=100$; $K_3=54$; $K_4=60$; $K_5=61$; $K_6=79$; $K_7=18$; $K_8=27$; $K_9=3$; $K_{10}=5$; $K_{11}=16$; $K_{12}=23$.

2.4. Tabel Nilai Knot dan GCV Untuk Tiga Titik Knot

Model regresi linier dengan tiga titik knot.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 (x_1 - K_1)_+^1 + \hat{\beta}_3 (x_1 - K_2)_+^1 + \hat{\beta}_4 (x_1 - K_3)_+^1 + \dots + \hat{\beta}_{21} x_6 + \hat{\beta}_{22} (x_6 - K_{16})_+^1 + \hat{\beta}_{23} (x_6 - K_{17})_+^1 + \hat{\beta}_{24} (x_6 - K_{18})_+^1$$

Nilai GCV untuk model regresi spline linier dengan tiga titik knot disajikan pada tabel 4 dibawah ini:

Tabel 4 :Nilai Knot dan GCV Untuk Tiga titik Knot

No	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	GCV
1	68	50	43	30	12	17	12,21
	82	54	62	45	13	30	
	90	61	82	46	12	35	
2	57	50	42	15	1	19	1203,84
	60	55	43	21	4	26	

	75	59	76	23	10	35	
	80	45	54	34	5	20	
3	79	45	77	32	9	21	20,42
	89	59	85	48	12	41	
	60	44	51	23	2	42	
4	73	48	63	23	4	43	1425,23
	80	56	81	34	12	43	
	57	52	57	10	3	25	
5	59	66	65	12	12	28	1013,56
	60	56	40	39	20	43	
	70	42	32	45	5	11	
6	75	54	33	46	13	23	13,43
	91	67	65	56	14	26	
	57	53	53	12	11	2	
7	54	55	68	15	17	8	11,87
	90	67	69	21	18	9	
	65	54	39	12	5	23	
8	86	55	56	14	15	36	110,14
	92	66	63	16	18	50	
	59	52	50	32	5	43	
9	65	52	65	33	6	43	1345,34
	76	54	86	43	14	47	
	53	55	45	10	2	9	
10	75	63	55	17	3	25	16,45
	87	64	65	38	8	26	

Nilai GCV minimum dan letak titik knot yang bersesuaian pada model regresi spline linier dengan tiga titik knot ditunjukkan pada tabel 4. Pada tabel 4 diperoleh nilai GCV minimum sebesar 11,87 dimana saat $K_1=57$; $K_2=54$; $K_3=90$; $K_4=53$; $K_5=55$; $K_6=67$; $K_7=53$; $K_8=68$; $K_9=69$; $K_{10}=12$; $K_{11}=15$; $K_{12}=21$; $K_{13}=11$; $K_{14}=17$; $K_{15}=18$; $K_{16}=2$; $K_{17}=8$; $K_{18}=9$.

Nilai GCV untuk model regresi spline linier dengan ketiga kombinasi titik knot disajikan pada tabel 5 dibawah ini :

2.5. Tabel Nilai Knot dan GCV Untuk Kombinasi Ketiga Titik Knot

Tabel 5 : Nilai Knot dan GCV untuk kombinasi ketiga titik knot

No	Variabel Prediktor	Jumlah Titik Knot Optimum	Titik-titik Knot	GCV
	X ₁	1	75	
	X ₂	1	45	
1	X ₃	1	74	6,76
	X ₄	3	12,36,37	
	X ₅	1	8	
	X ₆	1	24	
	X ₁	1	84	
	X ₂	1	57	
2	X ₃	3	3,16,20	7,82
	X ₄	1	29	
	X ₅	1	5	
	X ₆	1	11	
	X₁	3	68,83,84	
	X₂	1	45	
3	X₃	3	67,74,76	3,97
	X₄	1	9	

	X₅	1	5	
	X₆	3	2,11,23	
4	X ₁	1	42	7,98
	X ₂	2	85,95	
	X ₃	1	54	
	X ₄	1	12	
	X ₅	1	3	
	X ₆	2	8,15	
5	X ₁	1	60	6,53
	X ₂	1	53	
	X ₃	3	12,15,20	
	X ₄	1	3	
	X ₅	1	12	
	X ₆	1	50	

Berdasarkan hasil pemodelan dengan menggunakan kombinasi dari ketiga titik knot yang disajikan pada tabel 5 diperoleh nilai GCV yang paling minimum yaitu sebesar 3,97. Setelah diperoleh nilai GCV minimum dari pemodelan masing-masing knot baik menggunakan 1,2,3, dan kombinasi ketiga titik knot, dapat disimpulkan bahwa model dengan nilai GCV paling minimum adalah model yang dihasilkan dari kombinasi ketiga titik knot. Sehingga estimasi parameter dari untuk model spline terbaik dapat disajikan pada tabel 6 sebagai berikut :

Tabel 6 : Estimasi parameter untuk model spline terbaik

Variabel	Parameter	Estimasi
Intersep	β_0	123,3426
	β_1	0,0243
X ₁	β_2	-0,3347
	β_3	3,5214
	β_4	-2,5402
	β_5	1,1178
X ₂	β_6	-0,8634
	β_7	-1,4341
X ₃	β_8	2,5889
	β_9	0,9021
	β_{10}	-1,0082
X ₄	β_{11}	0,4356
	β_{12}	-0,2315
X ₅	β_{13}	0,0231
	β_{14}	-0,2893
X ₆	β_{15}	-12,562
	β_{16}	21,001
	β_{17}	-13,287
	β_{18}	-21,675

Dari tabel 6 diperoleh nilai-nilai estimasi parameter dari model spline terbaik yang dapat ditulis ke dalam bentuk persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 123,3426 + 0,0243x_1 - 0,3347(x_1 - 68)_+^1 + 3,5214(x_1 - 83)_+^1 - 2,5402(x_1 - 84)_+^1 + 1,1178x_2 + \\ & -0,8634(x_2 - 45)_+^1 - 1,4341x_3 + 2,5889(x_3 - 67)_+^1 + 0,9021(x_3 - 74)_+^1 - 1,0082(x_3 - 76)_+^1 + \\ & + 0,4356x_4 - 0,2315(x_4 - 9)_+^1 + 0,0231x_5 - 0,2893(x_5 - 5)_+^1 - 12,562x_6 + 21,001(x_6 - 2)_+^1 + \\ & -13,287(x_6 - 11)_+^1 - 21,675(x_6 - 13)_+^1 \end{aligned}$$

Berdasarkan model model tersebut didapatkan nilai R^2 sebesar 90,88 persen yang berarti keenam variabel prediktor mampu menjelaskan sebesar 90,88 persen terhadap kejadian angka gizi buruk di Maluku Tahun 2013. Selanjutnya akan dilakukan pengujian residual model apakah berdistribusi normal atau tidak dan kesignifikansian setiap parameter-parameter model.

2.6. Tabel Pengujian Serentak

Untuk mengetahui pengaruh parameter secara serentak terhadap model maka dilakukan uji serentak dengan hipotesis :

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{18} = 0$$

$$H_1 : \text{minimal ada satu } \beta_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, 18$$

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan didapatkan hasil ANOVA model regresi spline linier. Berikut adalah tabel ANOVA model regresi spline linier yang disajikan pada tabel 7 berikut ini :

Tabel 7: ANOVA Model Regresi Spline Linier

Source Of Variation	df	SS	MS	F_{Hitung}	F_{Tabel}
Regression	18	275,4624	15,3035	7,7478	2,2172
Error	19	37,5278	1,9752		
Total	37	312,9902			

2.7. Tabel Pengujian Parsial

Dari hasil pengujian serentak diperoleh hasil bahwa minimal terdapat satu parameter model berpengaruh signifikan terhadap model regresi spline linier. Oleh sebab itu, perlu diidentifikasi parameter-parameter model mana saja yang berpengaruh signifikan dengan pengujian secara parsial (individu) dengan hipotesis sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, 18$$

Berikut adalah hasil pengujian parameter secara individu.

Tabel 8 : Hasil Pengujian Parameter secara Individu/Parsial

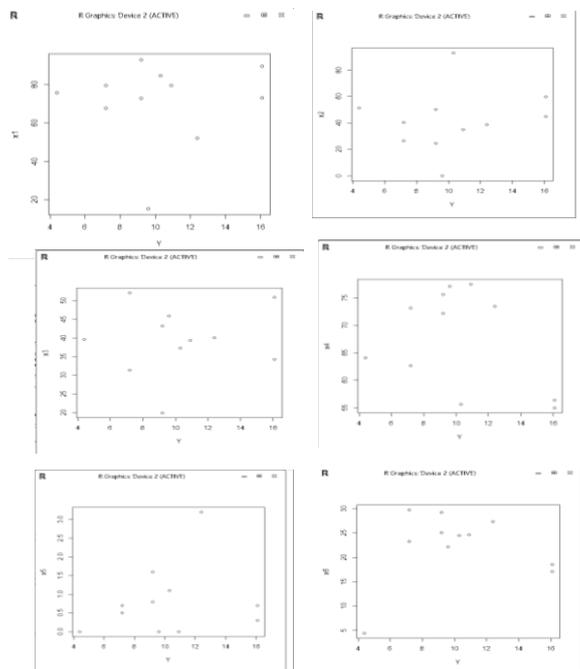
Variabel	Parameter	Coeff.	p-value	Keterangan
X ₁	β_1	-1,01	0,0006	Signifikan
	β_2	1,55	0,0004	Signifikan
	β_3	0,34	0,7081	Tidak Signifikan
	β_4	0,11	0,0898	Tidak Signifikan
X ₂	β_5	-2,89	0,3267	Tidak Signifikan
	β_6	25,00	0,1808	Tidak Signifikan
X ₃	β_7	-32,78	0,0017	Signifikan
	β_8	21,97	0,0011	Signifikan
	β_9	1,12	0,0094	Signifikan
X ₄	β_{10}	-7,29	0,0001	Signifikan
	β_{11}	9,46	0,0003	Signifikan
X ₅	β_{12}	-0,87	0,0002	Signifikan
	β_{13}	-14,43	0,0534	Tidak Signifikan
	β_{14}	10,23	0,6130	Tidak Signifikan
X ₆	β_{15}	-8,26	0,0003	Signifikan
	β_{16}	6,31	0,2498	Tidak Signifikan

β_{17}	1,82	0,0002	Signifikan
β_{18}	7,09	0,0979	Tidak Signifikan

Berdasarkan tabel 8, dari keseluruhan parameter model yang didapatkan ternyata parameter-parameter yang signifikan yaitu $\beta_1, \beta_2, \beta_7, \beta_8, \beta_9, \beta_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{15}$, dan β_{17} . Sehingga dapat disimpulkan bahwa faktor-faktor yang mempengaruhi angka gizi buruk di Maluku tahun 2013 antara lain persentase ibu yang memeriksakan kehamilannya (X_1), persentase balita yang mendapatkan vitamin A (X_3), persentase rumah tangga yang mengakses air bersih (X_4), dan persentase rumah tangga miskin (X_6). Sehingga model spline dari faktor-faktor yang mempengaruhi angka gizi buruk di Maluku adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 0,0243x_1 - 0,3347(x_1 - 68)_+^1 - 1,4341x_3 + 2,5889(x_3 - 67)_+^1 \\ & + 0,9021(x_3 - 74)_+^1 - 1,0082(x_3 - 76)_+^1 + 0,4356x_4 - 0,2315(x_4 - 9)_+^1 \\ & - 12,562x_6 - 13,287(x_6 - 11)_+^1 \end{aligned}$$

2.8. Gambar Scatterplot Untuk Variabel Respon dan Variabel Prediktor

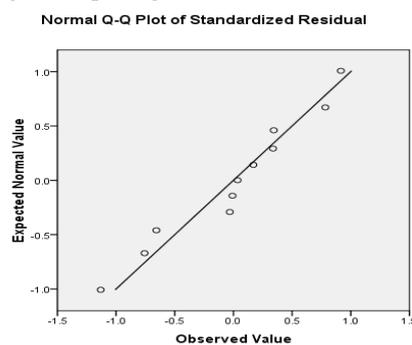


Gambar 1. Scatter Plot Variabel Respon VS Variabel Prediktor

Gambar 1 menunjukkan bahwa pola hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor memiliki pola menyebar, sehingga tidak memiliki kecenderungan membentuk suatu pola tertentu. Oleh karena itu, data ini sangat tepat apabila digunakan pendekatan regresi nonparametrik bukan regresi parametrik.

2.9. Gambar Grafik Q-Q Plot

Grafik normal Q-Q Plot dari residual dilakukan untuk menguji asumsi kenormalan. Adapun grafik normal Q-Q Plot dari residual data ditunjukkan pada gambar 2 dibawah ini :



Gambar 2. Q-Q Plot Residual Model

Berdasarkan gambar 2 diperoleh informasi bahwa residual telah berdistribusi normal dimana sebaran data berada pada posisi sekitar garis lurus membentuk garis miring dari arah kiri bawah ke kanan atas.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada pimpinan Fakultas MIPA Universitas Pattimura atas bantuan dana perjalanan mengikuti KNM XVIII di Pekanbaru Riau sehingga makalah ini dapat dipresentasikan dan dapat dimuat dalam prosiding.

Daftar Pustaka

- [1] Ayunin, L., (2001). Pemodelan Balita Gizi Buruk di Kabupaten Ngawi Dengan *Geographically Weighted Regression*, Tugas Akhir, Jurusan Statistika ITS Surabaya.
- [2] Dewi, R. K., (2012). Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Angka Gizo Buruk Di Jawa Timur Dengan Pendekatan Regresi Nonparametrik Spline. Tugas Akhir, Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [3] Eubank, R. L., (1988). *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*. New York : Marcel Deker.
- [4] Paramita, L., (2008). *Bagging Regresi Logistik Ordinal Pada Klasifikasi Status Gizi Balita (studi kasus: Kabupaten Nganjuk)*. Tugas Akhir, Jurusan Statistika ITS Surabaya.
- [5] Shao, J., (1993). *Linear Model Selection by Cross Valiation*, *Journal of The American Statistical Association.*, 88, 486 – 494.
- [6] www.depkes.go.id, (2015). Rapat Kerja Kesehatan Nasional Tahun 2014. (diakses tanggal 03 Oktober 2015).

FAKTOR INFLASI DALAM ESTIMASI CADANGAN KLAIM

Lienda Noviyanti¹, Achmad Zanbar Soleh²

^{1,2}Statistika FMIPA Universitas Padjadjaran,
lienda@unpad.ac.id, a.zanbar.soleh@unpad.ac.id

Abstrak

Cadangan klaim merupakan dana yang harus disiapkan oleh setiap perusahaan asuransi untuk memenuhi kewajiban kepada pemegang polis. Ketidaktepatan dalam estimasi cadangan klaim dapat menimbulkan kerugian yakni mengganggu stabilitas perusahaan asuransi dan berkurangnya layanan optimal kepada pemegang polis. Terkait waktu penyelesaian klaim, terdapat beberapa kasus di mana proses pembayaran klaim memakan waktu sampai bertahun-tahun, sehingga faktor inflasi dapat mempengaruhi nilai uang baik yang akan disiapkan perusahaan maupun yang akan diterima oleh pemegang polis. Penelitian ini menggunakan metoda *Inflation-adjusted Chain Ladder* yang khusus digunakan untuk data klaim yang tahun perkembangannya dipengaruhi faktor inflasi, dimana fluktuasi inflasi dimodelkan model Cox-Ingersoll-Ross.

Kata kunci: Cadangan Klaim, *Run-Off Triangle*, *Inflation-adjusted Chain Ladder*, Model Cox-Ingersoll-Ros.

1. Pendahuluan

Menaksir jumlah uang yang harus disiapkan pada masa mendatang untuk membayar klaim-klaim yang telah terjadi dan belum dibayarkan merupakan suatu pekerjaan yang rutin dan sangat penting bagi perusahaan asuransi. Metode yang biasa digunakan adalah *Run-Off Triangle*, yakni metoda yang menganalisis hubungan antara pembayaran klaim yang telah dilakukan selama beberapa periode terakhir untuk memprediksi besar pembayaran klaim yang harus dilakukan di masa yang akan datang. Penelitian terkait dapat dilihat pada Noviyanti dan Soleh [8], Mack [9], Merz, M., Wuthrich, M.V., dan Hashorva, E. [7], Renshaw and Verrall [11], Salzmann, R., dan Wuthrich, M.V [13] serta Soleh dan Noviyanti [14].

Cadangan klaim merupakan dana yang harus disiapkan oleh setiap perusahaan asuransi untuk memenuhi kewajiban kepada pemegang polis. Ketidaktepatan dalam estimasi cadangan klaim dapat menimbulkan kerugian yakni mengganggu stabilitas perusahaan asuransi dan berkurangnya layanan optimal kepada pemegang polis.

Terkait waktu penyelesaian klaim, terdapat beberapa kasus di mana proses pembayaran klaim memakan waktu yang cukup lama. Lamanya waktu tergantung pada rentang waktu antara kerugian terjadi sampai dilaporkan, waktu antara saat pelaporan sampai klaim tersebut diproses, dan waktu antara selesainya klaim diproses sampai klaim tersebut dibayarkan. Karena jangka waktu yang menahun ini faktor inflasi dapat mempengaruhi nilai uang baik yang harus disiapkan perusahaan maupun yang akan diterima oleh pemegang polis. Penaksiran cadangan klaim dimana faktor inflasi dimodelkan dengan Vasicek dilakukan Bohnert, et al. [1], sedangkan Richards and Woll [12] mengevaluasi pengaruh inflasi pada cadangan klaim dengan mengskenarioikan perubahan inflasi mulai 5% sampai dengan 15%. Taylor [15] menggunakan metoda *separation* yang mengasumsikan bahwa *incremental claim amounts* merupakan faktor perkalian yang bergantung pada *accident year*, *development year* dan *calendar year*. Fluktuasi inflasi dalam penelitian ini dimodelkan melalui Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Tidak seperti model Vasicek pada Bohnert, et al. [1] yang memungkinkan tingkat bunga bernilai negatif, model CIR mengeliminasi. Sisa dari makalah ini disusun sebagai berikut. *Run-Off Triangle* dibahas pada Bagian 2. Bagian 3 menguraikan model Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Bagian terakhir berisikan contoh numerik.

2. Run-Off Triangle

Data besar klaim yang dikumpulkan membentuk matriks segitiga (*Run-Off Triangle*). Matriks segitiga ini mengklasifikasikan data menurut sebuah indeks untuk periode pelaporan tahun ke- i , dan sebuah indeks untuk periode pembayaran tahun ke- j yang dinotasikan sebagai $X_{i,j}$ dan dikenal sebagai *incremental claim amounts* (*settlement claims, outstanding claims, atau incurred claims*) dimana $\{X_{i,j} ; i=1,2,\dots,n ; j=0,1,\dots,n-i+1\}$ (Brown [4], Hossack [5] dan Renshaw [10]).

Besar klaim yang terdapat pada periode pelaporan klaim dan periode pembayaran klaim yang sama akan dijumlahkan. Dalam matriks *incremental claim amounts* yang disajikan pada Tabel 1, terdapat sel-sel kosong yang disebabkan belum adanya pembayaran pada periode tersebut.

Tabel 1. *Incremental Claim Amounts Run-Off Triangle*

Periode Pelaporan Klaim	Periode Pembayaran Klaim				
	0	1	N
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	$X_{1,N}$
2	$X_{2,0}$	$X_{2,1}$...	$X_{2,N-1}$	
...	...				
n	$X_{n,0}$				

Membentuk Matriks Cumulative Claim Amounts

Data matriks *incremental claim amounts* diakumulasikan berdasarkan Tabel 1, kemudian dinotasikan sebagai $C_{i,j}$, menjadi (Hossack, I. B., J. H. Pollard, dan B. Zenwirth [5]) :

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^j X_{i,k}. \quad (1)$$

Jumlah klaim kumulatif tersebut dapat dilihat pada Tabel 2. Berdasarkan matriks kumulatif tersebut, akan diestimasi daerah segitiga kosong yang disebut sebagai target teknik *chain-ladder* (diarsir). Notasi $C_{1,0}$ merepresentasikan besar *cumulative claim amounts* pada periode pelaporan klaim ke-1 dan periode pembayaran klaim ke-0 (pada tahun itu juga).

Tabel 2. *Cumulative Claim Amounts Run-Off dan target Triangle*

Periode Pelaporan Klaim	Periode Pembayaran Klaim				
	0	1	N
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	$C_{1,N}$
2	$C_{2,0}$	$C_{2,1}$...	$C_{2,N-1}$	
...	...				
n	$C_{n,0}$				

Penyesuaian Nilai Klaim

Besar nilai klaim yang terdapat dalam Tabel 1 belum melibatkan nilai inflasi. Berdasarkan metode *Inflation Adjusted Chain Ladder*, besar klaim harus disesuaikan berdasarkan nilai inflasi dengan menggunakan persamaan berikut (Booth, P., Chadburn, R., dan Haberman, S [2]).

$$C_{ij}^* = C_{ij} * \prod_{j=0}^n (1 + \lambda_{i+j}) \quad (2)$$

Keterangan:

- C_{ij} : Besar klaim pada periode ke- i yang dibayarkan pada periode pembayaran ke- j .
- C_{ij}^* : Besar klaim pada periode ke- i yang dibayarkan pada periode pembayaran ke- j setelah penyesuaian nilai klaim berdasarkan nilai mata uang
- λ_{i+t} : Laju inflasi

Menghitung Akumulasi Klaim

Setelah membentuk penyesuaian nilai klaim berdasarkan inflasi, maka perlu dibentuk matriks klaim kumulatif untuk memperoleh estimasi dari $\{D_{i,j} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, dimana:

$$D_{i,j} = \sum_{j=0}^n C_{i,j}^* , \quad (3)$$

$$C_{i,j} = D_{i,j} - D_{i,j-1}, \quad (4)$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, n-1$, dengan $D_{i,j}$ merupakan kumulasi pembayaran klaim yang terjadi pada tahun kejadian ke- i yang baru dibayarkan pada tahun ke- j (Hossack, I. B., J. H. Pollard, dan B. Zenwirth [5]).

Menghitung Proyeksi Akumulasi Klaim

Untuk menghitung proyeksi akumulasi klaim digunakan rumus sebagai berikut (Booth, P., Chadburn, R., dan Haberman, S [2]).

$$\hat{F}_j = \frac{\sum_{i=1}^n D_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-1} D_{i,j-1}}, \quad (5)$$

dengan \hat{F}_j merupakan *factor development*.

Menghitung Estimasi Besar Klaim

Menghitung estimasi besar klaim dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut (Booth, P., Chadburn, R., dan Haberman, S [2]).

$$\hat{D}_{i,j} = D_{i,n-i} \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \hat{F}_j, \quad (6)$$

dengan $\hat{D}_{i,j}$ merupakan estimasi besar klaim kumulatif sebuah yang terjadi pada tahun ke- i dan dibayarkan pada tahun ke- j .

Estimasi Besar Klaim Berdasarkan *Development Year*

Untuk memisahkan estimasi besar klaim berdasarkan *development year* dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut (Hossack, I. B., J. H. Pollard, dan B. Zenwirth [5])

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{D}_{i,j} - \hat{D}_{i,j-1} , \quad (7)$$

dengan $\hat{C}_{i,j}$ merupakan estimasi besar klaim yang terjadi pada tahun ke- i berdasarkan *development year* ke- j .

Estimasi Besar Klaim dengan Memperhatikan Inflasi

Untuk menentukan estimasi besar klaim dengan memperhatikan inflasi dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut (Booth, P., Chadburn, R., dan Haberman, S [2]).

$$P_{i,j} = \hat{C}_{i,j} * (1 + \lambda)^{i+j-n-0.5} \quad (8)$$

dengan $P_{i,j}$ merupakan estimasi besar klaim setelah inflasi.

Menghitung Besar Cadangan

Cadangan adalah sejumlah dana yang harus disediakan oleh perusahaan untuk menutupi besar klaim yang harus dibayarkan perusahaan. Besarnya cadangan dapat dihitung berdasarkan rumus sebagai berikut (Booth, P., Chadburn, R., dan Haberman, S [2]).

$$R = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n P_{i,j}, \quad (9)$$

dengan R merupakan besar cadangan yang harus disediakan perusahaan.

3. Model Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Dalam pemodelan tingkat bunga derivatif, tingkat bunga lazim dinotasikan dengan $r(t)$, yakni suatu proses yang didefinisikan oleh proses Ito. Bila diberikan kondisi awal $r(0)$, persamaan tersebut merupakan proses stokastik. Apabila tingkat bunga $r(t)$ pada selang waktu infinitesimal atau biasa disebut tingkat bunga spot (*instantaneous spot rate / short rate*) merupakan satu-satunya sumber ketidakpastian pada model tingkat bunga derivatif maka instrumen tersebut dikategorikan sebagai model *spot rate* satu faktor. Model ini menunjukkan bahwa pada setiap selang waktu infinitesimal terdapat gerakan tingkat bunga yang searah meskipun dengan nilai perubahan yang berbeda-beda.

Model-model Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross dan Hull-White merupakan model-model tingkat bunga derivatif dimana masing-masing mempunyai satu karakteristik yang sama yaitu *mean reverting process* yang artinya manakala tingkat bunga terlalu tinggi maka akan ada suatu mekanisme yang menarik ke bawah sehingga tingkat bunga menurun atau kembali ke level rata-rata dalam waktu yang lama (*long-run rate*) dan begitu pula sebaliknya. Tidak seperti model Vasicek yang memungkinkan tingkat bunganya bernilai negatif, model CIR mengeliminasi (Brigo dan Mercurio, [2]). Sesuai dengan penelitian Bohnert, et al. [1], tingkat $i(t)$ dapat pula dimodelkan dengan menggunakan model CIR sbb.

$$di(t) = k(\theta - i(t))dt + \sigma\sqrt{i(t)}dW(t), \quad (10)$$

dengan

- $i(t)$: tingkat inflasi pada saat t ,
- k : faktor *drift*,
- θ : rata-rata dimana terjadi *mean reverting*,
- σ : volatilitas dari tingkat inflasi,
- $W(t)$: proses Wiener; $\{W(t), t \geq 0\}$.

Penentuan Tingkat Suku Bunga Model CIR

Model CIR dapat dinyatakan dalam bentuk integral sebagai berikut

$$i(t) - i(u) = k \int_u^t (\theta - i(s)) ds + \sigma \int_u^t \sqrt{i(s)} dW(s), \quad \forall u \leq t, \quad (11)$$

atau

$$i(t) = i(u) + k \int_u^t (\theta - i(s)) ds + \sigma \int_u^t \sqrt{i(s)} dW(s), \quad \forall u \leq t, \quad (12)$$

Jika $u = 0$, maka Persamaan (12) menjadi :

$$i(t) = i(0) + k \int_0^t (\theta - i(s)) ds + \sigma \int_0^t \sqrt{i(s)} dW(s), \quad \forall u \leq t, \quad (13)$$

Dengan menghitung ekspektasi dari bentuk integral pada Persamaan (13) dan ekspektasi dari integral Ito adalah nol, maka diperoleh:

$$E(i(t)) = i(0) + k \int_0^t (\theta - E(i(s))) ds, \quad (14)$$

sehingga diperoleh rata-rata dan varians dari $i(t)$ adalah masing-masing sebagai berikut :

$$E(i(t)) = \theta + e^{-kt}(i(0) - \theta). \quad (15)$$

$$Var i(t) = E(i^2(t)) - (E(i(t)))^2 = \frac{\theta\sigma^2}{2k} + (i(0) - \theta) \frac{\sigma^2}{k} e^{-kt} + \frac{\sigma^2}{k} \left(\frac{\theta}{2} - i(0)\right) e^{-2kt}, \quad (16)$$

dengan $i(0) = \theta$, $E(i(t)) = \theta$ untuk setiap t . Jika $i(0) \neq \theta$, maka $\lim_{t \rightarrow \infty} E(i(t)) = \theta$. Hal ini membuktikan sifat *mean reversion*, yaitu jika t menunjukkan waktu jangka panjang maka rata-rata dari tingkat inflasi akan menuju *mean reversion level*.

Estimasi Parameter Model CIR

Untuk mengestimasi parameter model CIR dinyatakan dalam bentuk diskrit sebagai berikut:

$$i(t + \Delta t) - i(t) = k(\theta - i(t))\Delta t + \sigma\sqrt{i(t)}\varepsilon(t), \quad (17)$$

dimana $\varepsilon(t)$ merupakan suatu proses *white noise*, $\varepsilon(t) \sim N(0, \Delta t)$.

Untuk estimasi parameter model CIR digunakan metode *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE). Untuk MLE dari vektor parameter $\alpha = (k, \theta, \sigma)$ dibutuhkan fungsi densitas transisi (Kladivko, [5]). Fungsi densitas untuk $i(t)$ pada waktu t adalah:

$$p(i(t + \Delta t)|i(t); \alpha, \Delta t) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}); \quad t > 0, \quad (18)$$

dengan

$$\begin{aligned} c &= \frac{2k}{\sigma^2(1 - e^{-k\Delta t})}, \\ u &= ci_t e^{-k\Delta t}, \\ v &= ci_t + \Delta t, \\ q &= \frac{2k\theta}{\sigma^2} - 1, \end{aligned}$$

dan $I_q(2\sqrt{uv})$ adalah modifikasi fungsi Bessel I dengan order q . Fungsi densitas tersebut merupakan fungsi densitas dari distribusi non-sentral chi kuadrat, $\chi^2[2ci(t); 2q + 2, 2u]$. Fungsi *likelihood* yang diperoleh untuk tingkat inflasi dengan N observasi $\{i_t, i = 1 \dots N\}$ adalah sebagai berikut.

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{N-1} p(i(t + \Delta t)|i(t); \alpha, \Delta t). \quad (19)$$

Fungsi *log-likelihood* dari Persamaan (19) adalah:

$$\ln L(\alpha) = \sum_{i=1}^{N-1} \ln p(i(t + \Delta t)|i(t); \alpha, \Delta t), \quad (20)$$

sehingga diperoleh fungsi *log-likelihood* untuk model CIR adalah sebagai berikut.

$$\ln L(\alpha) = (N - 1) \ln c + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ -u(t)_i - v(t)_{i+\Delta t} + 0.5q \ln \left(\frac{v(t)_{i+\Delta t}}{u(t)_i} \right) + \ln \{I_q(2\sqrt{u(t)_i v(t)_{i+\Delta t}})\} \right\}, \quad (21)$$

dengan $u(t)_i = ci_{t_i} e^{-k\Delta t}$ dan $v_{t_{i+1}} = ci_{t_{i+1}}$.

Tahapan selanjutnya adalah menurunkan persamaan tersebut terhadap parameternya, yang kemudian di sama dengan nol agar diperoleh solusi dari persamaan tersebut. Namun dikarenakan fungsi tersebut merupakan fungsi implisit yang tidak dapat diselesaikan secara langsung, untuk mengestimasi parameter $\alpha = (k, \theta, \sigma)$ dengan metode MLE dapat dilakukan dengan memaksimalkan fungsi *log-likelihood* terhadap parameternya yakni (Kladivko, [5]) :

$$\hat{\alpha} = (\hat{k}, \hat{\theta}, \hat{\sigma}) = \arg \max \alpha \ln L(\alpha), \quad (22)$$

Penyelesaian optimal dari fungsi parameter loglikelihood tersebut tidak dapat diselesaikan secara eksplisit, sehingga dalam penelitian ini digunakan metode optimasi algoritma *Nelder-Mead Simplex* melalui fungsi *fminsearch* dalam *software* Matlab. Algoritma *Nelder-Mead Simplex* diterapkan untuk menentukan nilai minimum dari suatu fungsi tanpa harus menentukan nilai diferensialnya terlebih dahulu. Untuk dapat menentukan solusi optimasi dari Persamaan (22), diperlukan nilai inisialisasi yang dapat diperoleh dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS), sehingga untuk mendapatkan OLS, Persamaan (17) menjadi:

$$\frac{i_{t+\Delta t} - i_t}{\sqrt{i_t}} = \frac{k\theta\Delta t}{\sqrt{i_t}} - k\sqrt{i_t}\Delta t + \sigma\epsilon_t. \quad (23)$$

Dengan meminimalkan jumlah kuadrat dari bagian *error* $\sum_{i=1}^{N-1} (\sigma\epsilon_t)^2$ terhadap k dan θ akan didapatkan estimator untuk \hat{k} dan $\hat{\theta}$ sebagai berikut :

$$\hat{k} = \frac{N^2 - 2N + 1 + \sum_{i=1}^{N-1} i_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i_t} - \sum_{i=1}^{N-1} i_t \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_i} - (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i_{t_{i+1}}}{r_{i_t}}}{\left(N^2 - 2N + 1 - \sum_{i=1}^{N-1} r_i \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i_t} \right) \Delta t}, \quad (24)$$

dan

$$\hat{\theta} = \frac{(N-1) + \sum_{i=1}^{N-1} i_{t_{i+1}} - \sum_{i=1}^{N-1} i \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i_t}}{N^2 - 2N + 1 + \sum_{i=1}^{N-1} i_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{r_i} - \sum_{i=1}^{N-1} i_t \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i_t} - (N-1) \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i_{t_{i+1}}}{i_t}}. \quad (25)$$

Untuk mendapatkan estimasi parameter $\hat{\sigma}$ diperoleh dari standar deviasi dari residual dengan bantuan *software* MATLAB.

Simulasi Tingkat Suku Bunga Model CIR

Pada penelitian ini metode yang akan digunakan dalam simulasi tingkat inflasi CIR adalah Metode Milstein dengan menyelesaikan skema Milstein dari Persamaan (12) sebagai berikut:

$$i(t) = i(t-1) + \hat{k}\Delta t (\hat{\theta} - i(t-1)) + \hat{k}\sqrt{i(t-1)}(W(\tau_t) - W(\tau_{t-1})) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}\sqrt{i_{t-1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{i(t-1)}} \right) \left((W(\tau_t) - W(\tau_{t-1}))^2 - \Delta t \right), \quad (26)$$

dimana $t = 1, 2, 3, \dots, L$.

Simulasi ini berdasarkan pada proses Wiener yang didiskritisasi dengan membangkitkan sederetan variabel acak berdistribusi normal yang menyatakan proses Wiener ($W(t)$) di waktu t yang diskrit. Dapat tentukan bahwa $\Delta t = \frac{T}{L}$ dengan L merupakan bilangan bulat positif yang menyatakan jumlah data; $\tau_t = t\Delta t$; $W(\tau_t) - W(\tau_{t-1}) = dW_k$ dengan $dW_k = \sqrt{\Delta t}N(0,1)$.

4. Contoh numerik

Dalam bagian ini akan diilustrasikan contoh numerik dalam menghitung cadangan untuk data klaim yang tahun perkembangannya dipengaruhi faktor inflasi, dan fluktuasi inflasi dimodelkan model Cox-Ingersoll-Ross. Data pada Tabel 3 berikut ini merupakan besar klaim (juta rupiah) yang dicatat berdasarkan tahun pelaporan klaim ke- i dan tahun pembayaran klaim ke- j yang akan membentuk matriks segitiga.

Tabel 3. *Incremental Claim Amounts*

Periode Pelaporan Klaim	Periode Pembayaran						
	0	1	2	3	4	5	6
2009	266,800	150,645	53,725	42,365	28,080	12,285	7,800
2010	288,420	164,670	62,125	55,500	34,320	19,635	
2011	336,835	165,825	78,925	63,825	41,925		
2012	358,110	212,025	96,775	70,485			
2013	418,255	214,830	106,050				
2014	429,180	229,845					
2015	512,325						

Tabel 4 merupakan data tingkat inflasi dari tahun 2009 sampai dengan 2015, sedangkan tingkat inflasi pada tahun 2016 sebesar 3.30 diperoleh dari hasil simulasi tingkat inflasi dengan menggunakan model CIR.

Tabel 4: Tingkat Inflasi

Tahun	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Tingkat Inflasi	2.78	6.69	3.79	4.30	8.38	8.36	3.35	3.30

Persamaan (2) digunakan untuk mendapatkan Tabel 5 berdasarkan Tabel 3 dengan penyesuaian tingkat inflasi pada Tabel 4. Sedangkan Tabel 6 berasal dari Tabel 5, yakni nilai *cumulative payments* penyesuaian nilai klaim, sesuai dengan Persamaan (3) dan Persamaan (4).

Tabel 5: *Incremental Claim Amounts* dengan Penyesuaian Tingkat Inflasi

Periode Pelaporan Klaim	Periode Pembayaran						
	0	1	2	3	4	5	6
2009	384,403	211,177	70,590	53,632	34,082	13,758	8,061
2010	404,313	216,363	78,646	67,363	38,435	20,293	
2011	442,574	209,924	95,795	71,478	43,329		
2012	453,346	257,345	108,378	72,846			
2013	507,656	240,588	109,603				
2014	480,639	237,545					
2015	529,488						

Tabel 6. *Cumulative Payments* Penyesuaian Nilai Klaim

Periode Pelaporan Klaim	Periode Pembayaran						
	0	1	2	3	4	5	6
2009	384,403	595,580	666,170	719,802	753,884	767,642	775,703
2010	404,313	620,676	699,322	766,685	805,120	825,413	
2011	442,574	652,498	748,293	819,771	863,100		
2012	453,346	710,691	819,069	891,915			
2013	507,656	748,245	857,847				
2014	480,639	718,184					
2015	529,488						

Untuk menghitung proyeksi akumulasi klaim digunakan Persamaan (5) dengan hasil disajikan pada Tabel 7. Sedangkan untuk menentukan estimasi besar klaim dihitung dengan menggunakan Persamaan (6). Hasilnya disajikan pada Tabel 8.

Tabel 7. *Factor Development*

<i>Development factor</i>	m1/0	m2/1	m3/2	m4/3	m5/4	m6/5
<i>Ratio</i>	1.5136	1.1391	1.0905	1.0502	1.0218	1.0105

Tabel 8. Besar Klaim Berdasarkan *Development Year*

Periode Pelaporan Klaim	Periode Pembayaran						
	0	1	2	3	4	5	6
2010							834,081.06
2011						881,951.66	891,213.38
2012					936,717.31	957,176.48	967,228.16
2013				935,451.69	982,440.73	1,003,898.56	1,014,440.88
2014			818,111.46	892,121.28	936,933.77	957,397.66	967,451.66
2015		801,457.74	912,972.15	995,563.47	1,045,572.00	1,068,408.71	1,079,628.47

Untuk memisahkan estimasi besar klaim berdasarkan *development year*, dihitung dengan Persamaan (7) dan hasilnya disajikan pada Tabel 9. Nilai estimasi besar klaim dengan memperhatikan inflasi diperoleh dengan menggunakan Persamaan (8) dan hasilnya disajikan pada Tabel 10.

Tabel 9. Estimasi Besar Klaim

Periode Pelaporan Klaim	Periode Pembayaran						
	0	1	2	3	4	5	6
2010							8,667.98
2011						18,851.28	9,261.71
2012					44,802.13	20,459.17	10,051.68
2013				77,604.49	46,989.03	21,457.83	10,542.32
2014			99,927.71	74,009.83	44,812.49	20,463.90	10,054.00
2015		271,969.85	111,514.41	82,591.33	50,008.53	22,836.70	11,219.77

Tabel 10. Estimasi Besar Klaim (Tingkat Inflasi dengan simulasi Model CIR)

Periode Pelaporan Klaim	Periode Klaim						
	0	1	2	3	4	5	6
2010							8,809.84
2011						19,159.80	9,723.93
2012					45,535.37	21,480.21	10,901.58
2013				78,874.57	49,334.07	23,272.15	11,811.02
2014			101,563.13	77,703.37	48,601.52	22,926.59	11,635.64
2015		276,420.93	117,079.66	89,574.68	56,026.72	26,429.25	13,413.30

Langkah terakhir adalah menghitung cadangan berdasarkan Persamaan (9), yakni sejumlah dana yang harus disediakan oleh perusahaan, untuk menutupi besar klaim yang akan terjadi. Hasilnya disajikan pada Tabel 11.

Tabel 11. Estimasi Cadangan

Tahun	Estimasi Cadangan
2010	8,809.84
2011	28,883.72
2012	77,917.15
2013	163,291.82
2014	262,430.25
2015	578,944.54
Total	1,120,277.33

Daftar Pustaka

- [1] Bohnert, A., Gatzert, N., dan Kolb, A., Assessing Inflation Risk in Non-Life Insurance, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 66, No. 1, 2016.
- [2] Booth, P., Chadburn, R., dan Haberman, S. *Modern Actuarial Theory and Practice*. London: Chapman & Hall/CRC. 2005.
- [3] Brigo D. dan Mercurio, F. *Interest Rate Models - Theory and Practice*, 2nd Edition, Springer, Berlin, 2007.
- [4] Brown, Robert L. dan Leon, R. Gottlieb, *Introduction to Ratemaking and Loss Reserving for Property and Casualty Insurance* (third edition), ACTEX Publication, Inc., 2007.
- [5] Hossack, I. B., J. H. Pollard, dan B. Zenwirth, *Introductory Statistics with Applications in General Insurance* (second edition), The University of Cambridge, 1999.
- [6] Kladvko, K. Maximum Likelihood Estimation of the Cox-Ingersoll-Ross Process: The Matlab Implementation. Department of Statistics and Probability Calculus, University of Economics, 2007.
- [7] Merz, M., Wuthrich, M.V., Hashorva, E. Dependence Modelling in Multivariate Claims Run-Off Triangles, *Annals of Actuarial Science* 7(1), 3-25, 2013.
- [8] Noviyanti, L. dan Soleh, A.Z. Estimasi *Loss Reserving* Berdasarkan Metode *Stochastic Chain-Ladder*. *Prosiding Seminar Nasional Matematika UI-UNPAD*, 2015.
- [9] Mack, T. Distribution - free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserves Estimates. *ASTIN BULLETIN*, Vol. 23, No. 2: 213-225, 1993.
- [10] Renshaw, A. E., *Chain Ladder and Interactive Modeling (Claim Reserving and GLIM)*, London: The City University, 1989.
- [11] Renshaw, A.E. dan Verrall, R.J., *A Stochastic Model Underlying the Chain-Ladder Technique*, London: The City University, 1998.
- [12] Richards, W. F., dan Woll, R. G., Evaluating the Impact of Inflation on Loss Reserves, <https://www.casact.org/pubs/dpp/dpp81/81dpp384.pdf>

- [13] Salzmann, R., Wuthrich, M.V. Modelling Accounting Year Dependence in Run-Off Triangle. *European Actuarial Journal* 2(2),227-242, 2012.
- [14] Soleh, A.Z dan Noviyanti, L. Estimasi Cadangan Kekurangan pada Data Ekstrim Matriks *Run-Off Triangle* melalui Metode *Robust Chain-Ladder*. *Prosiding Seminar Nasional Matematika UI-UNPAD*, 2015.
- [15] Taylor, G.C., Separation of Inflation and Other Effects from the Distribution of Non-Life Insurance Claim Delays, *ASTIN Bull.*, Vol. 9, Issue C.,1997.

PERBANDINGAN PEMBOBOT *BISQUARE TUKEY* DAN *RAMSAY* PADA REGRESI *ROBUST-M*

Yuni Mafruroh, Rahmadeni

*Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
r4dieni@gmail.com, yunimafruroh14@gmail.com*

Abstrak

Analisis regresi merupakan analisis yang digunakan untuk melihat hubungan antar dua variabel yaitu variabel *dependent* dan variabel *independent*. Salah satu metode yang digunakan dalam analisis regresi adalah metode kuadrat terkecil yang harus memenuhi asumsi klasik yang meliputi kenormalan, non multikolinieritas, homoskedastisitas, non autokolerasi dan linieritas. Namun sering kali asumsi kenormalan tidak terpenuhi karena adanya pencilan pada data pengamatan yang menyebabkan metode kuadrat terkecil tidak begitu baik digunakan. Sehingga diperlukan metode yang kekar akan pencilan yaitu regresi *robust*. Salah satu estimasi yang digunakan dalam analisis regresi *robust* adalah estimasi-M dengan pembobot *Bisquare Tukey* dan *Ramsay*. Tujuan dari penelitian ini adalah membandingkan hasil estimasi-M dengan pembobot *Bisquare Tukey* dan *Ramsay*. Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh estimasi parameter regresi menggunakan pembobot *Bisquare Tukey* lebih baik dari pembobot *Ramsay* dengan $R^2 = 100\%$ dan standar deviasi sebesar 55.793.

Kata kunci: *Analisis Regresi, Asumsi Klasik, Bisquare Tukey, Pencilan, Ramsay, Regresi Robust*

Abstract

Regression analysis is an analysis that use to see the relationship between two variables that are dependent variable and independent variable. One of the methods that use in regression analysis is ordinary least squares which has to full classic assumption included normality, non multikolinieritas, homoskedastisitas, non autokolerasi and linierity. But often, normality assumption is not fulfilled because of outliers of observation data which cause the ordinary least squares is not so good to use. So it is needed a strong method for outlier that is called robust regression. One of the estimations that is used in robust regression analysis is M-estimation with weighted Bisquare Tukey and weighted Ramsay. The purpose of this research is to compare the result of M-estimation weighted Bisquare Tukey dan weighted Ramsay. According to the result of the discussion it is obtained the estimated parameters regression using weighted Bisquare Tukey is better than weighted Ramsay with $R^2 = 100\%$ and deviation standart as big as 55.793.

Keywords : Bisquare Tukey, Classic Assumption, Outliers, Ramsay, Regression Analysis, Robust Regression

1. Pendahuluan

Analisis regresi merupakan alat statistik yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara dua variabel atau lebih. Salah satunya adalah analisis regresi linier berganda yang melibatkan satu variabel *dependent* dan lebih dari satu variabel *independent*. Metode yang biasa digunakan untuk mencari parameter regresi yaitu metode kuadrat terkecil yang harus memenuhi asumsi klasik. Asumsi klasik yang harus dipenuhi yaitu normalitas, nonmultikolinieritas, homoskedastisitas, nonautokolerasi dan linieritas. Tapi pada saat asumsi tersebut tidak terpenuhi yang disebabkan adanya pencilan, maka metode kuadrat terkecil tidak begitu baik digunakan. Sehingga diperlukan metode alternatif yang kekar terhadap pencilan yaitu regresi *robust*. Menurut Chen (2002), terdapat empat metode estimasi pada regresi *robust* diantaranya estimasi-M, estimasi LTS (*Least Trimmed Squares*), estimasi S dan estimasi MM.

Penelitian sebelumnya, Elen Dwi Pradewi (2012) melakukan estimasi parameter dengan estimasi-M menggunakan pembobot *Huber* dan *Bisquare Tukey*. Dimana hasil yang diperoleh menunjukkan pembobot *Bisquare Tukey* lebih baik dari pembobot *Huber*. Selanjutnya Sepnandhi (2015), melakukan perbandingan pembobot *Ramsay*

dan pembobot *Andrew* pada estimasi-M dan kesimpulan yang diperoleh bahwa pembobot *Ramsay* lebih baik dari pembobot *Andrew*.

Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya yang membahas perbandingan pembobot dalam regresi *robust* pada estimasi-M. Sehingga akan dilakukan penelitian untuk membandingkan pembobot *Bisquare Tukey* dan *Ramsay* pada regresi *robust* dengan estimasi-M dengan melihat dari nilai koefisien determinasi (R^2) terbesar dan standar deviasi (s) terkecil.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian yang berkaitan dengan regresi *robust* menggunakan estimasi-M dengan pembobot *Bisquare Tukey* dan *Ramsay*. Data yang digunakan yaitu data sekunder yang diperoleh dari buku statistik PLN 2013 yang meliputi 35 satuan PLN/propinsi di Indonesia Tahun 2013. Variabel penelitian yang digunakan yaitu pendapatan pemakaian energi listrik di Indonesia tahun 2013 (y), jumlah pelanggan (x_1), daya tersambung (x_2), dan energi terjual (x_3).

Langkah-langkah dalam mengestimasi regresi *robust* dengan metode estimasi-M menggunakan pembobot *Bisquare Tukey* dan *Ramsay* adalah:

1. Melakukan estimasi koefisien regresi menggunakan MKT.
2. Pengujian signifikan model.
3. Menguji asumsi klasik model regresi.
4. Mendeteksi pencilan pada data.
5. Mengestimasi koefisien regresi *robust* menggunakan estimasi-M.
 - a. Menghitung parameter $\hat{\beta}^0$ menggunakan MKT.
 - b. Menghitung nilai sisaan $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$
 - c. Menghitung nilai $\hat{\sigma}_i = \frac{MAD}{0,6745}$
 - d. Menghitung nilai $u_i = \frac{\varepsilon_i}{\hat{\sigma}_i}$
 - e. Menghitung pembobot

1. Pembobot *Bisquare Tukey*

$$w(u_i) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{u_i}{c} \right)^2 \right]^2, & |u_i| \leq c \\ 0, & |u_i| > c \end{cases}$$

2. Pembobot *Ramsay*

$$w(u_i) = \begin{cases} \exp(-c|u_i|), & |u_i| \leq \infty \\ 0, & |u_i| > \infty \end{cases}$$

- f. Menghitung parameter $\hat{\beta}_M$ menggunakan metode *weighted least square* (WLS) dengan pembobot $w(u_i)$
- g. Mengulangi langkah b-f sampai diperoleh nilai $\hat{\beta}_M$ yang konvergen
6. Pengujian signifikansi model dengan uji-t.
7. Pemilihan model terbaik menggunakan R^2 dan standar deviasi.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Estimasi Koefisien Regresi Menggunakan MKT

Analisis dimulai dengan menganalisis data menggunakan metode kuadrat. Berikut model regresi linier berganda menggunakan MKT:

$$\hat{y}_i = -54.172 - 0,703x_{i1} + 1.084x_{i2} + 498x_{i3}$$

dengan $R^2 = 99,9\%$ dan standar deviasi 142.421.

3.2. Pengujian signifikansi model

- a. Uji Serentak (uji-F)

Pengujian serentak (Uji-F) bertujuan untuk mengetahui secara keseluruhan parameter signifikan dalam model. Dengan $\alpha = 0,05$ dan $n = 35$ didapatkan hasil $F_{hitung} = 14.954,05 > F_{tabel} = 2,92$. Sehingga ada

pengaruh antara jumlah pelanggan, daya tersambung dan energi terjual terhadap pendapatan pemakaian energi listrik di Indonesia Tahun 2013.

b. Uji Parsial (uji-t)

Uji parsial (Uji-t) dilakukan untuk mengetahui pengaruh signifikan variabel *independent* terhadap variabel *dependent* secara parsial.

Tabel 1: Hasil Uji-t Data PLN 2013

Variabel	Uji-t	
	<i>t_{hitung}</i>	<i>p - value</i>
x_1	-19,46	0,000
x_2	8,50	0,000
x_3	8,35	0,000

dengan $\alpha = 0,05$ berdasarkan Tabel 1 diperoleh untuk masing-masing variabel menunjukkan secara parsial ada pengaruh secara signifikan antara jumlah pelanggan, daya tersambung dan energi terjual terhadap pendapatan pemakaian energi listrik di Indonesia Tahun 2013.

3.3. Uji Asumsi Klasik dari Model Regresi

Analisis regresi berganda menggunakan metode kuadrat terkecil mempunyai asumsi klasik yaitu normalitas, nonmultikolinieritas, homoskedastisitas, nonautokolerasi dan linieritas.

Tabel 2 : Pengujian Asumsi Klasik

No	Asumsi	Keterangan
1	Normalitas	Tidak Terpenuhi
2	Nonmultikolinieritas	Tidak Terpenuhi
3	Homoskedastisitas	Tidak Terpenuhi
4	nonautokolerasi	Tidak Terpenuhi
5	Linieritas	terpenuhi

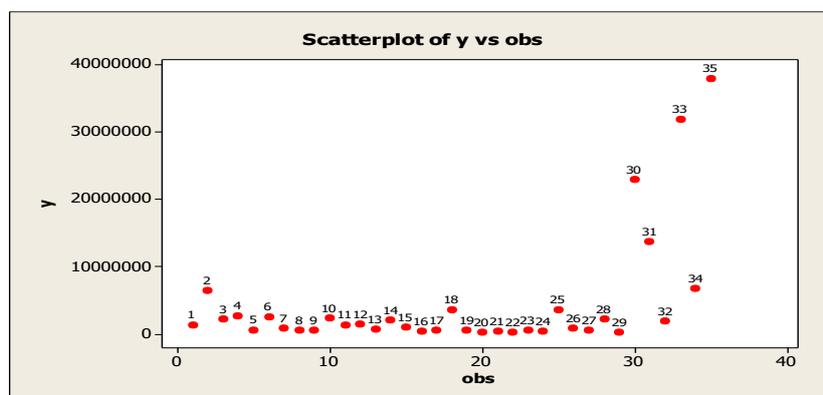
Berdasarkan Tabel 2 adanya asumsi klasik yang tidak terpenuhi membuat metode kuadrat terkecil tidak begitu baik digunakan disebabkan diduga adanya pengaruh pencilan, sehingga perlu dilakukan deteksi pencilan dalam data pengamatan.

3.4. Mendeteksi Pencilan

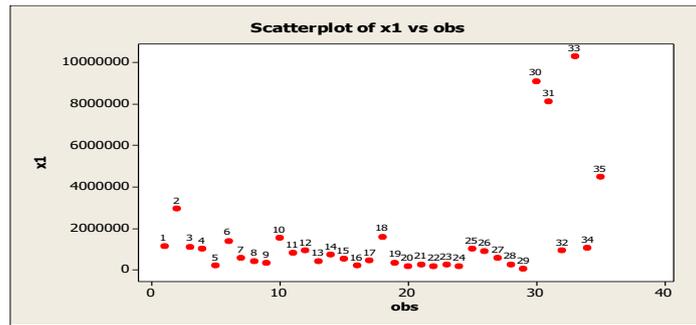
3.4.1. Metode Grafis

Metode grafis yang digunakan untuk mendeteksi pencilan yaitu diagram pencar (*scatter plot*) dan *boxplot* yang akan memperlihatkan pada masing-masing pengamatan.

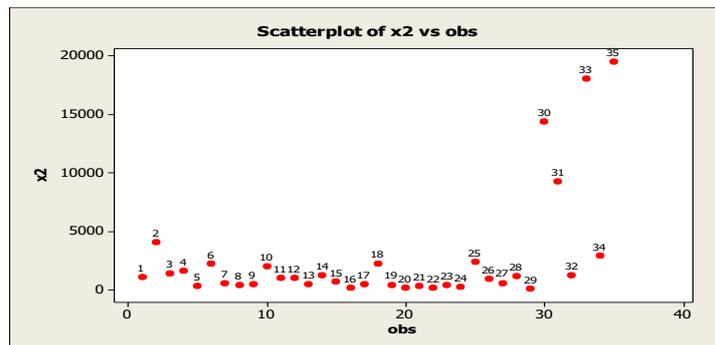
1. Diagram pencar (*scatter plot*)



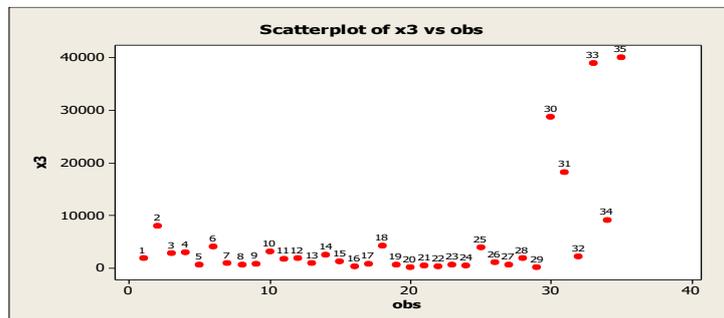
Gambar 1. Diagram Pencar Data Pendapatan Pemakaian Energi Listrik



Gambar 2. Diagram Pencar Data Jumlah Pelanggan



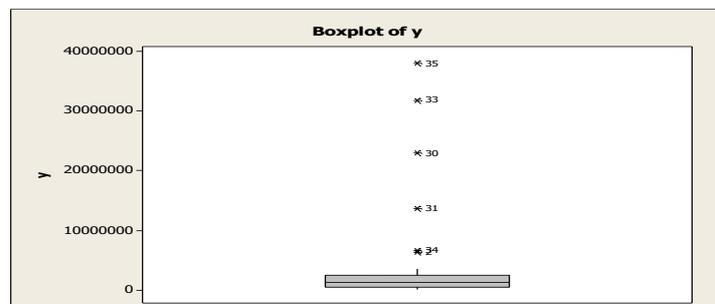
Gambar 3. Diagram Pencar Data Daya Tersambung



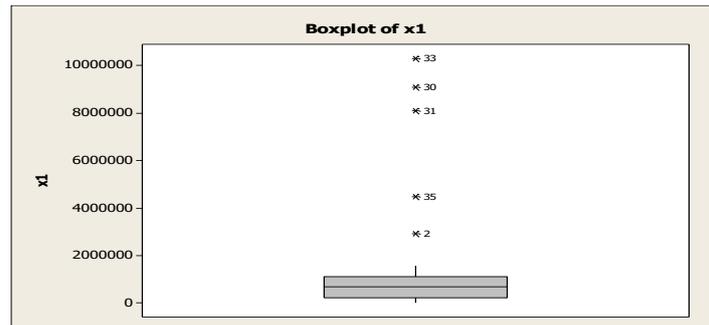
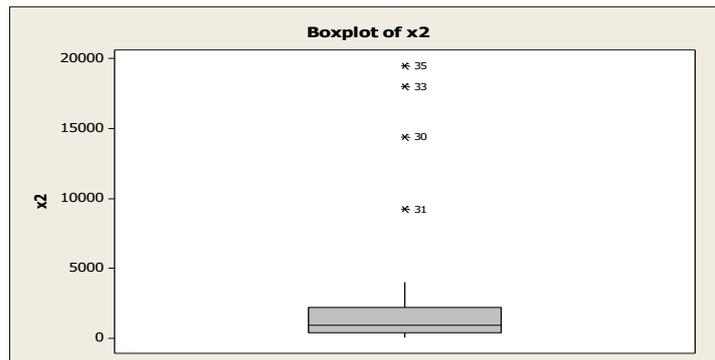
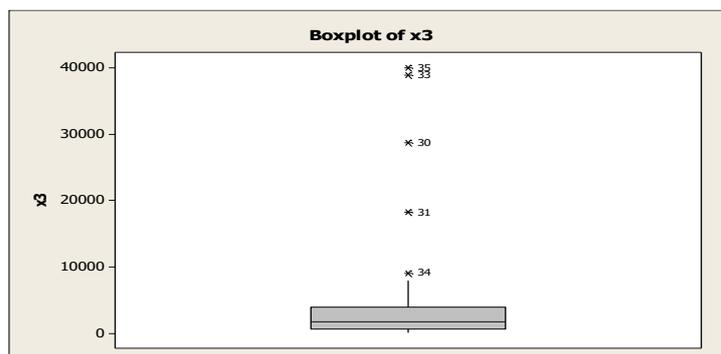
Gambar 4. Diagram Pencar Data Energi Terjual

Berdasarkan Gambar 1, Gambar 2, Gambar 3 dan Gambar 4 terlihat bahwa pada data pengamatan terdapat beberapa data yang jauh dari rata-rata kumpulan data pengamatan lainnya. Pencilan terdapat pada data ke-30, data ke-31, data ke-33 dan data ke-35.

2. *Boxplot*



Gambar 5. *Boxplot* Data Pendapatan Pemakaian Energi Listrik

Gambar 6. *Boxplot* Data Jumlah PelangganGambar 7. *Boxplot* Data Daya TersambungGambar 8. *Boxplot* Data Energi Terjual

Berdasarkan Gambar terlihat bahwa data pengamatan terdapat beberapa data yang melebihi $Q_3 + (1,5 \times IQR)$. Pada Gambar 5 pencilan terdapat pada data ke -2, data ke-30, data ke-31, data ke-33, data ke-34 dan data ke-35. Pada Gambar 6 pencilan terdapat pada data ke -2, data ke-30, data ke-31, data ke-33 dan data ke-35. Pada Gambar 7 pencilan pada data ke-30, data ke-31, data ke-33 dan data ke-35. Dan pada Gambar 8 pencilan terdapat pada data ke-30, data ke-31, data ke-33, data ke-34 dan data ke-35.

3.4.2. Pengujian Pencilan dengan Nilai *Leverage*, *Studentized Deleted Residual (TRES)* dan *The Difference In Fits Statistics (DFFITS)*.

Tabel 3: Nilai *Leverage*, *Studentized Deleted Residual (TRES)* dan *The Difference In Fits Statistics (DFFITS)*

Pengamatan	h_{ii}	$ TRES _i$	$ DFFITS _i$
6		5,51380	
30	0,350383	2,94464	2,1626
31	0,375674	2,08007	1,61353
33	0,547171	-	1,27081
34	0,643085	2,33268	3,13117
35	0,922244	2,12236	7,30931

Berdasarkan Tabel 3 menunjukkan bahwa pengamatan ke-30, 31, 33, 34 dan 35 merupakan pencilan yang berpengaruh dalam data pengamatan. Membuang begitu saja pencilan dalam pengamatan bukanlah prosedur yang bijaksana. Oleh karena itu diperlukan metode estimasi lain yang kekar akan pencilan. Estimasi-M salah satu metode alternatif yang dapat digunakan untuk mengatasi pencilan dalam pengamatan.

3.5. Estimasi Koefisien Regresi *Robust* Menggunakan Estimasi-M

Proses perhitungan estimasi-M dengan pembobot *Bisquare Tukey* dan *Ramsay* yang iteratif dimulai dari menentukan nilai estimasi awal koefisien regresi menggunakan metode kuadrat terkecil. Iterasi dihentikan nilai parameter regresi telah konvergen.

Tabel 4: Hasil Pendugaan Koefisien Parameter Regresi *Robust*-M

Pembobot	β_0	β_1	β_2	β_3
Bisquare Tukey	- 40.614	- 0,664	1.305	389
Ramsay	- 45.678	- 0,665	1.278	403

Pendugaan parameter dilakukan menggunakan regresi *robust* dengan metode estimasi-M menggunakan pembobot *bisquare tukey* dan *ramsay*. Pendugaan koefisien parameter untuk pembobot *bisquare tukey* telah konvergen pada iterasi ke-13 sedangkan pada pembobot *ramsay* telah konvergen pada iterasi ke-10.

3.6. Pengujian Signifikan Model dengan Uji-t

Pengujian dengan uji-t dilakukan pada model regresi yang telah diestimasi menggunakan estimasi-M dengan pembobot *Bisquare Tukey* dan *Ramsay*.

Tabel 5: Hasil Uji-t pada Pembobot Bisquare Tukey dan Ramsay

Variabel	<i>Bisquare Tukey</i>		<i>Ramsay</i>	
	t_{hitung}	$p - value$	t_{hitung}	$p - value$
x_1	-74,37	0,000	-60,16	0,000
x_2	40,42	0,000	29,73	0,000
x_3	25,52	0,000	19,79	0,000

Berdasarkan Tabel 5 diperoleh untuk masing-masing pembobot menunjukkan $p - value < 0,05$. Sehingga secara parsial setiap variabel *independent* memberi pengaruh yang signifikan terhadap variabel *dependent*.

3.7. Pemilihan Model Terbaik

Pemilihan model terbaik dilakukan dengan cara melihat hasil koefisien determinasi (R^2) terbesar dan standar deviasi (s) terkecil.

Tabel 6: Nilai R^2 dan Standar Deviasi (s)

Pembobot	R^2	s
MKT	99,9%	242.421
<i>Bisquare Tukey</i>	100%	55.793
<i>Ramsay</i>	100%	67.664

Berdasarkan Tabel 6 apabila dilihat dari nilai koefisien determinasi dan standar deviasi pembobot *Bisquare Tukey* menunjukkan lebih baik dari pembobot *Ramsay*, dan model regresi terbaik dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{y}_i = -40.614 - 0,664x_{i1} + 1.307x_{i2} + 389x_{i3}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa metode kuadrat terkecil tidak begitu baik digunakan karena asumsi klasik tidak terpenuhi yang disebabkan adanya pencilan dalam data pengamatan. Sehingga diperlukan metode alternatif yang kekar terhadap pencilan yaitu regresi *robust*-M dengan pembobot *Bisquare Tukey* dan *Ramsay*. Apabila dilihat dari koefisien determinasi dan standar deviasi didapatkan bahwa estimasi-M dengan pembobot *Bisquare Tukey* menunjukkan hasil yang lebih baik dari pembobot *Ramsay* dengan $R^2 = 100\%$ dan standar deviasi sebesar 55.793. pada contoh kasus

dalam penelitian ini berarti bahwa jumlah pelanggan, daya tersambung dan energi terjual mempengaruhi pendapatan pemakaian energi listrik di Indonesia tahun 2013 adalah sebesar 100 %. Sementara itu untuk nilai standar deviasi yang paling kecil adalah sebesar 55.793 . Semakin kecil nilai standar deviasi maka model regresi semakin tepat dalam memprediksi pendapatan pemakaian energi listrik di Indonesia.

Daftar Pustaka

- [1] Ardiyanti, Hanna. “Regresi Robust Estimasi-M dan Estimasi-MM Karena Pengaruh Outlies dalam Analisis Regresi Linier (Contoh Kasus Data Produksi Padi Jawa Tengah 2007)”. *Skripsi Universitas Negeri Semarang*, Semarang, 2011.
- [2] Candraningtyas, Sherly. “Regresi Robust MM-Estimator untuk Penanganan Pencilan pada Regresi Linier Berganda”. *Jurnal Gaussian*, Vol. 2, No.4, hlm.395-404, 2013.
- [3] Chen, C. “Robust Regression and Outlier Detection with the ROBUSTREG Procedure”. Paper hlm. 265-27, SAS Institute, North Carolina, 2002.
- [4] Draper, N. R Smith. “*Analisis Regresi Terapan*”. Gramedia Pustaka, Jakarta. 1992.
- [5] Gujarati, D. “*Dasar-Dasar Ekonometrika*”. Edisi ketiga, jilid 1. Erlangga, Jakarta. 2007.
- [6] Harman, Anggono. “Perbandingan Pembobot *Tukey Bisquare* dan Pembobot *Fair* dalam Regresi *Robust-M* (Studi Kasus Angka Buta Huruf di Jawa Timur Tahun 2011)”. Vol. 2, No. 4, 2014.
- [7] Manurung, Jonni J, dkk. “*Ekonometrika Teori dan Aplikasi*”. PT Gramedia, Jakarta. 2005.
- [8] Neter, John, dkk. “*Applied Linear Statistical Model, Fourth Ed*”. McGraw-Hill Companies. 1996.
- [9] Olive, David J. “*Applied Robust Statistics*”. Southern Illinois University, Carbondale. 2005.
- [10] Pradewi, Elen Dwi dan Sudarno. “Kajian Estimasi-M IRLS Menggunakan Fungsi Pembobot Huber dan Bisquare Tukey pada Data Ketahanan Pangan di Jawa Tengah”. *Jurnal Media Statistik*, Vol. 5, No. 1, hlm. 1-10, 2012.
- [11] Sarwoko. “*Dasar-Dasar Ekonometrika*”. Edisi ke-1. ANDI, Yogyakarta. 2005.
- [12] Sembiring. “*Analisis Regresi*”. Edisi ke-2. ITB Bandung, Bandung. 2003.
- [13] Setiawan dan Dwi. “*Ekonometrika*”. Edisi ke-1. ANDI, Yogyakarta. 2010.
- [14] Suliyanto. “*Ekonometrika Terapan-Teori dan Aplikasi dengan SPSS*”. ANDI, Yogyakarta. 2011.
- [15] Supangat, Andi. “*Statistika: dalam Kajian Deskriptif, Inferensi dan Nonparametrik*”. Kencana, Jakarta. 2007.
- [16] Wiyantara, Sepnandhi. “Perbandingan pembobot *Ramsay* dan *Andrew* dalam Regresi *Robust-M* pada Tingkat Kemiskinan Kabupaten/Kota Jawa Timur Tahun 2012”. Vol. 3, No.1, 2015.
- [17] Yuliana. “Penerapan Metode Regresi Linear Robust dengan Estimasi M pada Data Nilai Kalkulus II Mahasiswa Universitas Widya Klaten”. *Magistra* No. 90 Th. XXVI Desember 2014.

PENERAPAN MULTITRAIT-MULTIMETHOD (MTMM) UNTUK PENAKSIRAN KOEFISIEN RELIABILITAS DAN VALIDITAS INSTRUMEN PENGUKURAN

Achmad Bachrudin

*Departemen Statistika, Universitas Padjadjaran
achmad.bachrudin@unpad.ac.id*

Abstrak

Desain kuesioner sering kali digunakan setiap item kuesioner hanya satu metode penskalaan (misalnya, likert dengan skala 1-5) sehingga sumber variasi metode terhadap respons item tidak diperhitungkan. Saris dan Gallhofer [15] mengatakan bahwa, *different methods, different results* yang artinya bahwa metode penskalaan (efek metode) sangat berpengaruh terhadap kualitas pengukuran. Scherpenzeel dan Saris [15] mengaplikasikan multitrait-multimethod (MTMM) untuk menghitung efek metode terhadap respons item kuesioner, juga reliabilitas, dan validitas. Kelemahan pendekatan ini bahwa responden harus menjawab suatu item kuesioner dengan menggunakan beberapa metode penskalaan. Tujuan makalah ini adalah menaksir koefisien reliabilitas, validitas, dan besarnya efek metode suatu *traits*. Contoh kasus dalam penelitian ini adalah tentang tingkat kepuasan mahasiswa terhadap proses belajar mengajar (PBM) staf pengajar di lingkungan FMIPA-Unpad dengan tiga buah *traits* dan tiga buah metode penskalaan. Penaksiran reliabilitas, validitas, dan efek metode digunakan pendekatan pemodelan struktural dan paket program LISREL Metode penaksiran digunakan kemungkinan maksimum. Hasilnya menunjukkan bahwa terdapat ketidakkonsistenan responden dalam menjawab kuesioner jika digunakan lebih dari satu metode penskalaan, yang artinya metode penskalaan berpengaruh terhadap kualitas pengukuran. Berdasarkan koefisien validitas juga menunjukkan dalam contoh kasus ini bahwa metode penskalaan yang lebih tepat digunakan adalah M2 untuk ketiga pertanyaan kuesioner, sedangkan dengan validitas indikator hasilnya menunjukkan bahwa metode penskalaan M2, M1, dan M2 lebih baik digunakan pada pertanyaan kuesioner nomor 1, 2, dan 3.

Kata kunci: MTMM, metode penskalaan, reliabilitas, validitas, pemodelan persamaan structural

1. Pendahuluan

Persoalan-persoalan pengukuran merupakan hal yang sangat kritis dalam penelitian ilmiah karena analisis dan interpretasi pola-pola empiris dan prosesnya sangat tergantung kepada kemampuan untuk dikembangkan suatu alat ukur yang berkualitas tinggi sehingga mampu menaksir fenomena-fenomena yang menjadi perhatian peneliti (Alwin, D.F. [2]). Sering kali dalam penelitian ilmu-ilmu sosial dan perilaku bahwa fenomena yang menjadi perhatian peneliti tidak terspesifikasi dengan baik bahkan variabel-variabel sering sulit untuk mengamatinya secara langsung. Misalnya, konsep-konsep seperti religiusitas (*religiosity*), depresi, kecerdasan, dan lain sebagainya. Ketidakmampuan mengukur suatu konsep sosial yang menjadi perhatian peneliti ada kaitannya dengan kekeliruan pengukuran (*measurement error*). Berdasarkan Groves [10] bahwa dalam suatu survey terdapat empat jenis kekeliruan (*survey errors*), di antaranya adalah dalam proses pengukuran. Kekeliruan pengukuran terjadi jika nilai-nilai observasi berbeda dari nilai sebenarnya (*true value*). Penyimpangan hasil pengukuran dengan nilai sebenarnya menentukan kualitas data, yang secara umum diukur oleh koefisien reliabilitas dan validitas.

Salah satu Kualitas hasil pengukuran adalah penetapan metode penskalaan (misalnya Likert dengan skala 1-5). Secara umum, bahwa setiap pertanyaan atau pernyataan (sering disebut item) menggunakan metode penskalaan hanya satu buah, jarang sekali dalam item-item kuesioner menggunakan berbagai macam metode penskalaan (misalnya Likert, Thurstone dan lain sebagainya). Dengan hanya menggunakan satu buah metode penskalaan secara teoritis tidak mempertimbangkan variasi metode penskalaan. Lebih jauh lagi, Saris dan Gallhofer [15] dan Scherpenzeel dan Saris [18] bahwa penetapan

metode penskalaan berpengaruh kualitas hasil pengukuran dengan unkapannya yang terkenal yaitu, “*different methods, different results*”. Artinya, metode penskalaan berpengaruh terhadap respons responden untuk suatu item. Tujuan makalah ini adalah menaksir koefisien reliabilitas, validitas, dan besarnya efek metode suatu *traits* dan memilih metode penskalaan yang tepat. Contoh kasus dalam penelitian ini adalah tentang tingkat kepuasan mahasiswa terhadap proses belajar mengajar (PBM) staf pengajar di lingkungan FMIPA-Unpad dengan tiga buah *traits* dan tiga buah metode penskalaan.

Studi-studi kaitan antara metode penskalaan dengan kualitas alat ukur dapat ditelusuri dalam Reichardt dan Coleman [14], Scherpenzeel dan Saris [18], Saris dan Gallhofer [15], Raykov [13], Alhauser dan Heberlein [1], Zhang, et al. [20], dan Bachrudin [4], yang secara umum mereka menggunakan pendekatan *multitrait-multimethod* (MTMM) untuk mengevaluasi kualitas pengukuran yang dikaitkan dengan suatu metode (tidak harus penskalaan, misalnya bisa juga metode pengumpulan data, dan lain sebagainya). Pendekatan MTMM untuk pertama kali dikembangkan oleh Campbell dan Fiske [8], terdiri atas berbagai ukuran dari sekumpulan faktor (*traits*) dengan sekumpulan prosedur pengukuran (metode) yang sama untuk mengevaluasi kualitas pengukuran, yaitu validitas konvergen dan diskriminan. Umumnya, pendekatan ini dinyatakan dalam suatu matriks segitiga, di mana baris dan kolom masing-masing menyatakan *traits* dan metode.

MTMM yang dikembangkan oleh Campbell dan Fiske [] bersifat aditif antara *traits* dan metode terhadap respons, tetapi asumsi tersebut banyak dikritisi, misalnya oleh Reichardt dan Coleman [14], dan Zhang, et al. [20] sehingga MTMM dalam model multiplikatif menjadi pendekatan baru, sedangkan evaluasi validitas konvergen dan diskriminan oleh Raykov [13] karena dalam pendekatan MTMM klasik banyak asumsi-asumsi atau kriteria yang harus dipenuhi, yang kenyataannya jarang terpenuhi. Alhauser dan Heberlein [1] membahas tentang inferensi tentang validitas korelasi-korelasi dalam matriks MTMM karena MTMM oleh Campbell dan Fiske [8] analisis validitasnya hanya bersifat deskriptif.

Beberapa studi lainnya tentang MTMM oleh Scherpenzeel dan Saris [18]; Saris dan Gallhofer [15] dalam mengevaluasi metodologi pengukuran, misalnya tentang prosedur pengukuran *traits* (metode) dikaitkan dengan kualitas pengukuran. Studi ini tidak bertujuan untuk mengevaluasi validitas konvergen dan diskriminan, tetapi MTMM digunakan untuk pengembangan metodologi kualitas pengukuran, yaitu koefisien reliabilitas dan validitas. Studi ini terutama difokuskan kepada persoalan sejauhmana pengaruh metode penskalaan terhadap kualitas pengukuran tersebut atau respons responden. Secara statistik bahwa perlu dipertimbangkan variasi faktor “metode”, selain faktor “*traits*”, terhadap hasil kualitas pengukuran, yaitu reliabilitas dan validitas. Dalam pendekatan ini dikembangkan suatu konsep baru, yaitu *true score validity* (TV). Dalam konsep ini bahwa validitas suatu alat ukurnya terhadap *true value* sebagai pengembangan dari konsep umum, yaitu *indicator validity* (IV).

Hasil empiris menunjukkan bahwa metode memberikan efek yang sangat berarti terhadap koefisien reliabilitas dan validitas (Bachrudin, [4]). Hasil studi ini juga memberikan rekomendasi bahwa dalam suatu survey, dalam penetapan metode penskalaan item-item dalam kuesioner harus didasarkan kepada studi pendahuluan untuk memperoleh kualitas pengukuran yang lebih tinggi. Berikut ini akan dikemukakan lebih detil tentang MTMM, pemodelan statistiknya, contoh kasus, serta pengolahannya.

2. Pemodelan Pengukuran

Pemodelan statistik reliabilitas dan validitas sudah relatif tua, dan alat statistik yang digunakanpun relatif sederhana jika dilihat dari perkembangan pemodelan statistik sekarang ini, misalnya Cronbach [9]; Campbell dan Fiske [8] menggunakan koefisien korelasi untuk menaksir reliabilitas dan validitas. Pendekatan ini telah banyak dikritisi karena ada beberapa asumsi yang tidak realitis, misalnya oleh Werts dan Linn [19]. Salah satu kelemahan dalam model pengukuran klasik yaitu tidak melibatkan konsep atau konstruk yang ingin diukur, oleh karena itu Bollen [7] memberikan perumusan yang lebih umum untuk mengatasi kekurangan pendekatan klasik tersebut.

Akibat perumusan umum tersebut solusi bahwa model pengukuran klasik digunakan model-model struktural dalam penaksiran parameter-parameter pengukuran untuk variabel-variabel yang menjadi perhatian penelitian (misalnya Saris dan Andrews, [16]; Bagozzi dan Yi, [6]) Berkaitan dengan evaluasi reliabilitas dan validitas dari suatu alat ukur, Saris et al. [17] dan Scherpenzeel dan Saris [18] menggunakan MTMM untuk mengetahui efek metode penskalaan, juga reliabilitas, dan validitas. Konsep yang dikembangkannya dikenal dengan *true-score validity* (TV), sedangkan konsep umum dikenal dengan *indicator validity* (IV).

Dalam makalah ini dikemukakan tentang *true-score validity* (TV) dan validitas indikator untuk mengevaluasi reliabilitas dan validitas. Sebelum dikemukakan konsep tersebut akan dikemukakan konsep-konsep dasar model pengukuran klasik agar dapat diketahui perbedaannya.

Misalkan T_i adalah *true score*, y_i merupakan variabel pengamatan responden ke- i dan ε adalah kekeliruan pengukuran. Hubungan ketiga besaran tersebut

$$y_i = T_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

Persamaan (1) pada dasarnya adalah konsep pengukuran klasik dalam model pengukuran klasik diasumsikan bahwa *true score* bersifat tetap, dan asumsi ini dipandang tidak realistis (lihat Bollen, [7]). Asumsi model ini adalah $\text{cov}(F, \varepsilon_i) = 0$, dan $E(\varepsilon_i) = 0$. Perumusan tersebut tidak tampak komponen metode dan konsep yang ingin diukur. Jika Persamaan (1) melibatkan kedua komponen tersebut, *true score* dirumuskan menjadi:

$$T_i = a_i + b_i F + g_i M_i + U_i \quad (2)$$

Asumsi Persamaan (2) adalah:

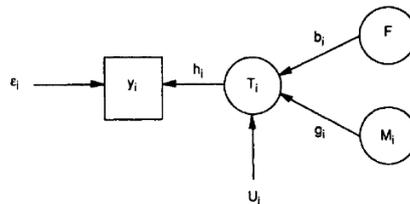
$$\begin{aligned} \text{cov}(F, U_i) = 0, \text{cov}(M_i, \varepsilon_i) = 0, \text{cov}(F, \varepsilon_i) = 0, \text{cov}(U_i, \varepsilon_i) = 0, \\ \text{cov}(F, M_i) = 0, \text{cov}(M_i, U_i) = 0, \text{ dan } \text{cov}(M_i, \varepsilon_i) = 0 \end{aligned}$$

dalam hal ini, a , b , g masing-masing menunjukkan koefisien seperti halnya dalam suatu persamaan regresi, dan U disebut *unique component* dari metode dan *trait*. Tentang metode dan *trait* selanjutnya dibahas lebih detail dalam MTMM. Parameter kualitas pengukuran umumnya dalam format baku (*standardized parameter*), sehingga Persamaan (1) dan (2) dinyatakan dalam format baku menjadi:

$$y_i = h_i T_i + \varepsilon_i \quad (3)$$

$$T_i = b_i F + g_i M_i + U_i \quad (4)$$

Semua asumsi Persamaan (3) dan (4) sama seperti Persamaan (1) dan (2). Kedua persamaan tersebut jika dinyatakan dalam suatu diagram adalah:



Gambar 1. Diagram jalur proses pengukuran untuk satu *trait* dan metode M_i

Persamaan (3) dan (4) ada kaitannya dengan konsep reliabilitas dan validitas suatu alat ukur. Reliabilitas sering didefinisikan sebagai proporsi varians dalam y , yang menunjukkan *stable* dengan melakukan pengukuran berulang-ulang dari ukuran sama. Secara statistik, koefisien reliabilitas untuk format tak baku adalah:

$$reliabilitas = \frac{\text{var}(T_i)}{\text{var}(y_i)} \quad (5)$$

Alternatif lain, koefisien reliabilitas sama dengan kuadrat dari persamaan regresi pada Persamaan (3) yaitu:

$$h_i = \left[\text{var}(T_i) / \text{var}(y_i) \right]^{1/2} \quad (6)$$

Konsep validitas didefinisikan sebagai efek kuadrat koefisien format baku variabel yang ingin diukur terhadap *true score*:

$$validitas = b_i^2 \quad (8)$$

Definisi tersebut diusulkan oleh Heise dan Bohrnstedt [9]. Besaran b_i merupakan koefisien regresi pada Persamaan (4). Karena perumusan validitas ini dikaitkan dengan *true score*, sering disebut sebagai *true score validity*, TV (Saris dan Andrews, [16]). Perbedaan perumusan validitas secara umum selalu dikaitkan dengan variabel indikator dan variabel yang ingin diukur atau variabel laten sehingga perumusan ini sering disebut dengan *indicator validity* (IV). Perbedaan TV dan IV hanya persoalan *scale transformation*, yang artinya bahwa tidak merubah definisi validitas secara umum.

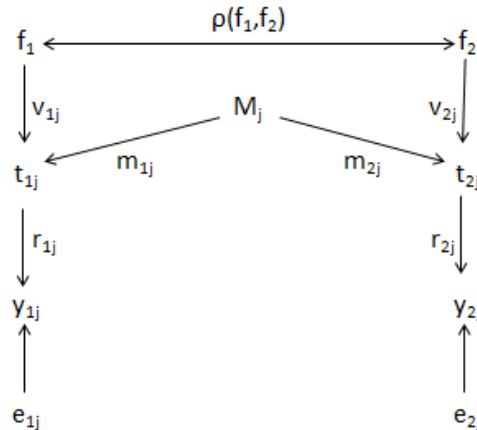
Konsep pengukuran yang sudah dijelaskan sebelumnya digunakan untuk merumuskan reliabilitas dan validitas desain MTMM. Suatu matriks MTMM merupakan matriks korelasi berukuran $I \times J$ di

mana setiap variabel mengukur salah satu *I trait* (atau karakteristik) dengan menggunakan salah satu metode *J*. Misalnya suatu matriks MTMM terdiri atas korelasi dari sembilan variabel, setiap dari *traits* (misalnya afeksi, kognisi, dan perilaku) menggunakan salah satu metode penskalaan (misalnya, Thurstone, Likert, dan Guttman). Persamaan (3) dan (4) digunakan sebagai dasar untuk merumuskan pemodelan MTMM, dengan modifikasinya menjadi persamaan sebagai berikut:

$$y_{ij} = h_{ij}T_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (8)$$

$$T_{ij} = b_{ij}F_i + m_{ij}M_j + U_{ij} \quad (9)$$

di mana, *i* dan *j* masing-masing menunjukkan *traits* dan metode. Persamaan (8) dan (9) jika dinyatakan dalam diagram jalur pada Gambar 2.



Gambar 2. Diagram jalur Persamaan (8) dan (9) untuk dua variabel F_1 dan F_2 .

Pada Gambar 2 bahwa $b_{1j} = v_{1j}$, $b_{2j} = v_{2j}$, $h_{1j} = r_{1j}$, dan $h_{2j} = r_{2j}$; dan $\rho(F_1, F_2)$ adalah korelasi antara variabel F_1 dan F_2 . Jika Persamaan (9) disubstitusikan ke Persamaan (8), maka akan diperoleh suatu persamaan:

$$y_{ij} = h_{ij}b_{ij}F_i + m_{ij}M_j + \varepsilon_{ij}, \text{ atau} \quad (10)$$

$$y_{ij} = q_{ij}F_i + s_{ij}M_j + \varepsilon_{ij}$$

Dengan, $q_{ij} = h_{ij}b_{ij}$, dan $s_{ij} = h_{ij}m_{ij}$. Koefisien Persamaan (10), yaitu q_{ij} menunjukkan kekuatan hubungan antara variabel yang ingin diukur ke-*i* terhadap respons y_j dan merupakan deskripsi validitas indikator, sedangkan s_{ij} memperlihatkan efek sistematis metode ke-*j* terhadap respons y_i .

3. Metode dan Contoh Kasus

3.1. Pemodelan Persamaan Struktural

Penaksiran parameter dalam Persamaan (8) dan (9) digunakan pendekatan persamaan struktural (Bachrudin dan Tobing, [5]). Variabel F , T , dan M dalam kedua persamaan tersebut dipandang sebagai variabel laten. Karena melibatkan variabel laten sehingga solusinya digunakan pendekatan pemodelan persamaan struktural yang baku adalah:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta} \quad (12)$$

Persamaan (11) dan (12) masing-masing disebut persamaan pengukuran dan struktural. Berdasarkan Saris et al. [17] pada model MTMM dengan pendekatan struktural ini terdapat beberapa asumsi: (1) antara metode tidak berkorelasi, tetapi antara *trait* atau variabel yang ingin diukur berkorelasi, (2) efek metode diasumsikan terhadap semua *trait* adalah sama, yaitu ($m_{ij} = m_m$), $Var(M_j) = 1$ untuk setiap metode, dan (3) *unique component* pada Persamaan (9), yaitu $U_i = 0$. Selain itu bahwa vektor pengamatan diasumsikan berdistribusi multivariat normal sehingga metode penaksiran digunakan adalah

adalah 0.97, pengaruh metode penskalaan M1 terhadap true score T_{11} sebesar 0.24, besar koefisien reliabilitas sebesar 0.87, dan besar indeks validitas adalah $(0.97)^2 = 0.91$. Koefisien validitas untuk *trait*1 dengan metode penskalaan M1 (T_{12}) untuk konsep kompetensi dosen dalam hal teori (F_1) adalah 0.98, besar efek metode M2 terhadap true score T_{12} sebesar 0.19, besar koefisien reliabilitas sebesar 0.93, dan besarnya indeks validitas adalah 0.96. Penjelasan yang sama untuk nilai taksiran lainnya pada Tabel 3.

Tabel 2. Nilai-Nilai Statistik Goodness of Fit

Goodness of Fit Statistics	
Degrees of Freedom	21
Minimum Fit Function Chi-Square	30,14 (P=0.089)
Root mean square residual (RMR)	0.055
Standardized residual (RMR)	0,058
Goodness of fit index (GFI)	0.95

Sumber: Keluaran Program LISREL

Tabel tersebut memperlihatkan bahwa semakin tinggi (rendah) nilai efek metode, semakin kecil rendah (tinggi) nilai koefisien validitas. Fakta ini menunjukkan bahwa metode penskalaan berpengaruh terhadap kualitas pengukuran. Tabel tersebut juga memperlihatkan secara umum bahwa koefisien reliabilitas lebih tinggi dari nilai koefisien validitas. Hasil tabel tersebut juga menunjukkan bahwa metode penskalaan M2 lebih baik daripada yang lain. Artinya, dengan pendekatan ini diusulkan untuk menggunakan metode penskalaan M2 bagi semua *trait*.

Tabel 3. Taksiran Koefisien Validitas, Reliabilitas, dan Efek Metode

Trait	Koefisien Validitas			Efek Metode			Koefisien Reliabilitas
	F1	F2	F3	M1	M2	M3	
T11	0,97			0,24			0,97
T21		0,98		0,19			0,93
T31			0,97	0,23			0,89
T12	0,99				0,16		0,92
T22		0,99			0,17		0,91
T32			0,98		0,18		0,93
T13	0,94					0,34	0,87
T23		0,95				0,31	0,93
T33			0,92			0,39	0,83

Sumber: Hasil pengolahan data

Tabel 3 menunjukkan koefisien *true score validity* (TV) karena konsep validasinya terhadap *true score* bukan terhadap variabel Y. Tabel tersebut memperlihatkan taksiran koefisien validitas berkaitan dengan variabel Y, sering disebut dengan validasi indikator (*Indicator validity*, IV). Validitas ini menggunakan Persamaan (10). Berdasarkan hasil pada tabel tersebut, dan dengan menggunakan Persamaan (10), maka hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.

Validitas indikator memberi gambaran sejauh mana kuat hubungan antara variabel yang menjadi perhatian (F) terhadap variabel indikator (Y), misalnya nilai validasi indikator untuk Y_{11} sebesar 0.843, yang artinya bahwa besarnya kuat hubungan antara konsep “kemampuan dosen dalam teori” dengan variabel indikator yang diwakili oleh pertanyaan 1 (item1) dengan metode penskalaan M1 adalah 0.843. Efek metode pada Tabel 3 terhadap true score, sedangkan efek metode pada Tabel 4 merupakan efek sistematis metode penskalaan pada respon y.

Tabel 4 menunjukkan bahwa terdapat hubungan nilai validitas indikator dan efek metode, artinya semakin rendah (tinggi) nilai efek metode, semakin tinggi (rendah) nilai validasi indikator. Berdasarkan nilai validitas indikator tertinggi dapat diambil kesimpulan bahwa *item 1 (trait 1)* dalam kuesioner diusulkan menggunakan metode penskalaan M2, *item 2* adalah M1, dan *item 3* adalah M2. Kesimpulan ini berbeda dengan *true score validity*. Keputusan mana yang dipilih dengan kedua metode ini tergantung apakah desain kuesioner semua pertanyaan digunakan hanya satu atau berbeda.

Tabel 4. Taksiran Validitas Indikator dan Efek Metode

Y	Validasi Indikator	Efek Metode
Y ₁₁	0.843	0.209
Y ₁₂	0.911	0.147
Y ₁₃	0.818	0.296
Y ₂₁	0.911	0.187
Y ₂₂	0.901	0.155
Y ₂₃	0.883	0.288
Y ₃₁	0.863	0.205
Y ₃₂	0.913	0.167
Y ₃₃	0.764	0.824

Sumber: Hasil Pengolahan data

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan sebelumnya, berikut ini dapat diambil beberapa kesimpulan:

1. Secara umum bahwa metode penskalaan menentukan kualitas pengukuran. Semakin rendah (tinggi) nilai efek metode, semakin tinggi (rendah) koefisien validitasnya. Hasil ini semakin menguatkan pernyataan ‘*Different methods, different results*’
2. Sehubungan dengan contoh kasus ini, berdasarkan true score validity bahwa metode yang paling tepat digunakan adalah M2, sedangkan untuk validitas indikator yaitu metode penskalaan M2, M1, dan M2 masing-masing untuk pertanyaan dalam kuesioner No.1, 2, dan 3.
3. Kelemahan metode ini bahwa setiap responden sangat dibebani karena setiap pertanyaan kuesioner harus mengisi lebih dari satu metode penskalaan, juga ada pengaruh *memory effect* pada responden.

Daftar Pustaka

- [1] Alhauser R.P. dan Heberlein T.A. (2014). *Validity and Multitrait-Multimethod Matrix*. Princeton University (mimeo)
- [2] Alwin, D.F. (2007) *Margin of Error: A Study of Reliability in Survey Measurement*, John Wiley Multimethod correlation & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- [3] Andrews, F.M. (1984). Construct Validity and Error Components of Survey Measures. A Structural Modeling Approach, *Public Opinion Quarterly*, 48, 409-442
- [4] Bachrudin, A. (2016). Desain Split-Ballot MTMM untuk Evaluasi Kualitas Instrumen Pengukuran, *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, Fakultas Teknologi Informatik dan Sains. Universitas Katolik Parahyangan. Vol.11. ISSN: 1907-3909
- [5] Bachrudin, A. dan Tobing H. (2016). Analisis Survey Menggunakan LISREL 8. Edisi Revisi Departemen Statistika, Universitas Padjadjaran
- [6] Bagozzi dan Yi (1993) Multitrait-Multimethod Matrices in Consumer Research: Critique and New Developments, *Journal of Consumer Psychology*, 2, 143-170
- [7] Bollen, K.A (1989). *Structural Equations with Latent Variables*. John Wiley & Sons, New York.
- [8] Campbell, D.T. dan Fiske, D.W. (1959). Convergent and Discriminant Validation by Multitrait-Multimethod Matrix. *Psychological Bulletin*, 56, 81-105
- [9] Cronbach (1951). Coefficients Alpha and The Internal Structure of Tests, *Psychometrika*, 16, 297-334
- [10] Groves, R. M. (2004). *Survey errors and Survey Costs*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey

Dalam hal ini, Φ , Ψ , dan Θ_{ε} masing-masing menunjukkan matriks varinas-kovarians antara variabel laten: Trait (T) dan metode pensklalaan (M), matriks varians kovarians antara *error* (ζ) dalam persamaan struktural, dan matriks varians-kovarians antara error (ε). Banyak parameter untuk matriks 9 x 9 adalah 45, sedangkan banyak parameter yang ditaksir adalah 24, sehingga derajat bebas = 45-24= 21.

Program Lisrel

```

TITLE MTMM
Da ni =9 no=14 ma=cm
cm

0.81
0.35 1.11
0.27 0.29 0.83
0.91 0.50 0.50 1.79
0.49 1.16 0.38 0.77 1.82
0.32 0.48 0.86 0.71 0.71 1.43
0.49 0.16 0.15 0.78 0.28 0.23 0.59
0.22 0.65 0.13 0.36 0.84 0.31 0.19 0.63
0.18 0.13 0.40 0.36 0.22 0.55 0.16 0.15 0.46
la
Y11 y21 y31 y12 y22 y32 y13 y23 y33
mo ny=9 ne=9 nk=6 ly=fu,fi te=di,fr ps=di,fi be=fu,fi ga=fu,fi
ph=sy,fi
va 1.0 ly 1 1 ly 2 2 ly 3 3
va 1.0 ly 4 4 ly 5 5 ly 6 6 ly 7 7 ly 8 8 ly 9 9
fr ga 1 1 ga 4 1 ga 7 1 ga 2 2 ga 5 2 ga 8 2 ga 3 3 ga 6 3 ga 9 3
va 1.0 ga 1 4 ga 2 4 ga 3 4
va 1.0 ga 4 5 ga 5 5 ga 6 5 ga 7 6 ga 8 6 ga 9 6
fr ph 2 1 ph 3 1 ph 3 2 ph 6 6 ph 5 5 ph 4 4
va 1.0 ph 1 1 ph 2 2 ph 3 3
va 1 te 1 1 te 2 2
starts .5 all
ou adm=off sc

```

PREDIKSI HARGA SAHAM MENGGUNAKAN SUPPORT VECTOR REGRESSION BERBASIS TEKNIKAL ANALISIS

Irmawardani Saragih, Zuherman Rustam

*Program Studi Matematika, Universitas Indonesia, Depok.
irma.wardss@gmail.com, rustamzr@yahoo.com*

Abstrak

Pasar saham telah menjadi saluran investasi yang sangat populer beberapa tahun ini. Oleh karena itu, keakuratan dalam memprediksi harga saham menjadi hal yang sangat penting dan rumit bagi para investor. Penelitian ini dilakukan untuk memprediksi harga saham perusahaan yang terdaftar di Bursa Efek Indonesia untuk periode 2013-2015. Sampel dalam penelitian ini merupakan perusahaan yang terdaftar dalam Bursa Efek Indonesia. Teknik peramalan terbagi atas linear model dan nonlinear model. Salah satu teknik peramalan nonlinear model adalah menggunakan Support Vector Regression (SVR). SVR merupakan pengembangan dari Support Vector Machine (SVM) berbasis machine learning dalam bentuk regresi dan keunggulan dari SVR adalah mampu mengatasi overfitting. Pada kasus regresi output data berupa data kontinue (Santosa, 2007). Pada penelitian ini akan digunakan beberapa analisis teknikal saham sebagai masukan metode SVR untuk memprediksi harga saham. Hasil serangkaian percobaan yang dilakukan dengan studi literatur secara teori dan menggunakan program menunjukkan bahwa prediksi menggunakan metode ini menghasilkan alternatif prediksi yang cukup baik.

Kata Kunci: SVR, harga saham, analisis teknikal.

1. Pendahuluan

Uang sangat dibutuhkan untuk memenuhi kebutuhan hidup manusia. Pada saat ini mendapatkan uang sudah tidak terfokus lagi pada pekerjaan tetap yang dimiliki seseorang. Banyak hal yang dapat dilakukan dalam mencari pendapatan tambahan, salah satunya adalah berinvestasi. Investasi yang dilakukan dapat berupa emas, tanah atau bangunan, asuransi, reksa dana dan saham. Saham merupakan sekuritas atau sertifikat yang mewakili kepemilikan fraksional dari perusahaan yang dibeli sebagai investasi (Fontallis *et al*, 2001). Saham sangat populer didalam pasar keuangan karena mampu memberikan keuntungan yang sangat menarik, namun disisi lain pergerakan harga saham cenderung dapat berubah secara cepat dari waktu ke waktu. Untuk itu diperlukan suatu metode untuk memprediksi harga saham guna membantu investor dalam mengambil keputusan bersaham yang tepat. Berbagai macam penelitian telah dilakukan untuk memprediksi pergerakan harga saham yaitu *Artificial Neural Network*, *Support Vector Machine*, dan yang akan digunakan pada penelitian ini adalah *Support Vector Regression*.

Harga saham adalah harga dari suatu saham yang ditentukan pada saat pasar saham sedang berlangsung berdasarkan permintaan dan penawaran yang berlangsung. Dalam transaksi saham di Bursa Efek Indonesia (BEI) terdapat beberapa harga pasar yakni harga pembukaan (*opening price*) dan harga penutupan (*closing price*).

Prediksi harga saham sangat dibutuhkan oleh para pemilik saham dalam menentukan keputusan yang akan diambil dalam setiap transaksi. Terdapat dua pendekatan untuk menganalisis pergerakan harga saham yaitu analisis fundamental dan teknikal. Analisis fundamental memanfaatkan informasi dari sisi faktor ekonomi untuk memprediksi nilai intrinsik saham. Sedangkan analisa teknikal didasarkan pada prinsip Teori Dow menggunakan data histori harga untuk memprediksi pergerakan saham di masa depan.

2. Metode dan Bahan

2.1. Support Vector Regression (SVR)

Support Vector Regression (SVR) merupakan modifikasi support vector machine (SVM) dalam

hal regresi. SVR pertama sekali diperkenalkan oleh Vapnik (1999, 1995). Output dari SVR merupakan sebuah bilangan riil atau kontinu. SVR merupakan metode regresi yang mampu mengatasi *overfitting* sehingga mampu menghasilkan performansi yang bagus. Ide dasar SVR adalah misalkan kita punya λ set data training, (x_j, y_j) dimana $j=1,2,\dots,\lambda$ dengan input $x = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq \mathfrak{R}^N$ dan output yang bersangkutan $y = \{y_1, \dots, y_\lambda\} \subseteq \mathfrak{R}$. Tujuan utama dari SVR adalah menemukan sebuah fungsi regresi $y = f(x)$ yang mempunyai deviasi paling besar ε dari target actual y_i untuk semua data training. Fungsi regresi dinyatakan dalam persamaan umum sebagai berikut:

$$f(x) = w^T \phi(x) + b \quad (1)$$

Dimana $f(x)$ menunjukkan nilai prediksi, $\phi(x)$ menunjukkan suatu titik didalam *feature space* F hasil pemetaan x di dalam input *space*, w merupakan vektor bobot dan b merupakan bias. Koefisien w dan b diestimasi dengan cara meminimalkan fungsi resiko (*risk function*) yang didefinisikan dalam persamaan

$$\min \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\lambda} L_{\varepsilon}(y_i, f(x_i)) \quad (2)$$

Subject to

$$y_i - w\phi(x_i) - b \leq \varepsilon$$

$$w\phi(x_i) - y_i + b \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, \lambda$$

Dimana

$$L_{\varepsilon}(y_i, f(x_i)) = \begin{cases} |y_i - f(x_i)| - \varepsilon & |y_i - f(x_i)| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases} \quad (3)$$

Faktor lain dalam fungsi tujuan adalah kesalahan empirik (*empirical error*) yang diukur dengan ε -*insensitive loss function*. Menggunakan ide ε -*insensitive loss function* Vapkin (1996) menurut Santosa (2007) kita harus meminimalkan norm dari w agar mendapatkan generalisasi yang baik untuk fungsi regresi f . Karena itu kita perlu menyelesaikan problem optimasi berikut:

$$\min \frac{1}{2} \|w\|^2 \quad (4)$$

Subject to

$$y_i - w\phi(x_i) - b \leq \varepsilon$$

$$w\phi(x_i) - y_i + b \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, \lambda$$

Kita asumsikan bahwa ada suatu fungsi f yang dapat mengaproksimasi semua titik (x_i, y_i) dengan presisi ε . Dalam kasus ini kita asumsikan bahwa semua titik ada dalam rentang $f \pm \varepsilon$ (*feasible*). Sedangkan pada kenyataannya tidak selalu demikian, ada beberapa titik yang mungkin keluar dari rentang $f \pm \varepsilon$, maka dari itu dapat ditambahkan variabel *slack* ξ, ξ^* untuk mengatasi masalah pembatas yang tidak layak (*infeasible constraint*) dalam problem optimasi. Selanjutnya problem optimasi di atas bisa diformulasikan sebagai berikut:

$$\min \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\lambda} (\xi_i, \xi_i^*) \quad (5)$$

Subject to

$$y_i - w^T \phi(x_i) - b - \xi_i \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, \lambda$$

$$w\phi(x_i) - y_i + b - \xi_i^* \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, \lambda$$

$$\xi_i, \xi_i^* \geq 0$$

Konstanta $C > 0$ menentukan tawar menawar (*trade off*) antara ketipisan fungsi dan batas toleransi (error). Semua kesalahan lebih besar daripada ε akan dikenakan pinalty sebesar C . Dalam formulasi dual, problem optimisasi dari SVR adalah sebagai berikut:

$$\max - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\lambda} \sum_{j=1}^{\lambda} (\alpha_i - \alpha_i^*) (\alpha_j - \alpha_j^*) K \langle x_i, x_j \rangle + \sum_{i=1}^{\lambda} (\alpha_i - \alpha_i^*) y_i - \varepsilon \sum_{i=1}^{\lambda} (\alpha_i + \alpha_i^*) \quad (6)$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{\lambda} (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0$$

$$0 \leq \alpha_i \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, \lambda$$

$$0 \leq \alpha_i^* \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, \lambda$$

Dimana C didefinisikan oleh user, $K \langle x_i, x_j \rangle$ adalah *dot-product* kernel yang didefinisikan sebagai $K \langle x_i, x_j \rangle = \varphi^T(x_i) \varphi(x_j)$. Dengan menggunakan *Langrange multiplier* dan kondisi optimalitas, fungsi regresi secara eksplisit dirumuskan sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\lambda} (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x_i, x) + b \quad (7)$$

Dalam regresi ada beberapa ukuran error yang sering dipakai untuk menilai performansi suatu fungsi prediksi. Pada penelitian ini penulis menggunakan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), semakin kecil nilai MAPE maka nilai prediksi akan semakin bagus

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^m APE_i}{m} \quad (8)$$

Dimana;

$$APE = \frac{\sum_{i=1}^m |\hat{y}_i - y_i|}{m} \times 100 \quad (9)$$

2.2. Teknikal Analisis

Pada penelitian ini ada sembilan indikator teknis sebagai masukan untuk metode SVR untuk memprediksi harga penutupan saham. (Jigar Patel, Sahid Shah, Priyank Thakkar, K. Kotecha 2015). Indikatornya yaitu :

Tabel 1: Tabel Teknikal Indikator

No	Indikator	Formula
1	SMA (Simple Moving Average)	$\frac{C_t + C_{t-1} + \dots + C_{t-n}}{n}$
2	EMA (Exponensial Moving Average)	$\frac{(n)C_t + (n-1)C_{t-1} + \dots + C_{t-1}}{(n + (n-1) + \dots + 1)}$
3	RSI	$100 - \frac{100}{1 + \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} Up_{t-1} / n}{\sum_{i=0}^{n-1} Dw_{t-1} / n} \right)}$
4	MACD	EMA(12)-EMA(26)
5	Stochastic K%	$\frac{C_t - LL_{t-n}}{HH_{t-n} - LL_{t-n}} * 100$
6	Stochastic D%	$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} K_{t-1} \%}{n}$
7	Larry William's R%	$\frac{H_n - C_t}{H_n - L_n} * 100$
8	CCI	$\frac{M_t - SM_t}{0.015D_t}$
9	A/D	$\frac{H_t - C_{t-1}}{H_t - L_t}$

Dimana : C_t : harga penutupan waktu t , L_t : harga rendah saat waktu t , H_t : harga tinggi saat waktu t , LL_t : harga terbawah dalam beberapa hari t , HH_t : harga tertinggi dalam beberapa hari t , Up_t : perubahan harga naik pada waktu t , D_w : perubahan harga turun pada waktu t , $M_t : \frac{L_t + H_t + C_t}{3}$,

$$SM_t : \frac{\sum_{i=1}^n M_{t-i+1}}{n}, D_t : \frac{\sum_{i=1}^n |M_{t-i+1} - SM_t|}{n}$$

3. Implementasi Sistem dan Hasil

3.1. Implementasi Sistem

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data saham Bank Mandiri, Tbk. Data diambil dari situs www.finance.yahoo.com yang merupakan data historis harga saham selama 3 tahun (Januari 2013 – 31 Desember 2015) dengan komposisi *close*, *high*, *low* dan *open*. Setelah mendapatkan data historis harga saham selanjutnya adalah melakukan perhitungan indikator teknikal analisis. Hasil perhitungan inilah yang kemudian menjadi data masukan pada penelitian ini. Indikator yang digunakan pada penelitian ini tertera pada tabel 1.

Data saham yang digunakan berjumlah 783 hari, dimana akan dilakukan 2 percobaan untuk prediksi harga saham dalam waktu pendek (5hari) dan menengah (20 hari). Untuk percobaan pertama data ke-1 hingga ke-763 digunakan sebagai data training untuk metode SVR dan 20 hari sisanya digunakan sebagai data aktual, sedangkan untuk percobaan kedua data ke-1 hingga ke-778 digunakan sebagai data training, dan 5 hari sisanya digunakan sebagai data aktual.

Prediksi harga saham yang dilakukan secara bertahap dari hari ke hari. Untuk percobaan pertama memprediksi hari ke 764 maka dilakukan pembentukan data menggunakan perhitungan fitur yang sesuai pada tabel 1. Kemudian data yang terbentuk ini digunakan ke dalam model prediksi untuk mendapatkan harga prediksi di hari 764, dan harga tersebut akan digunakan untuk memprediksi hari ke 765. Proses tersebut berlanjut terus menerus hingga hari terakhir (hari ke 783). Proses tersebut juga berlaku untuk percobaan ke-2 memprediksi harga 5 hari kedepan. Setelah didapatkan harga prediksi, selanjutnya adalah melakukan evaluasi hasil prediksi dengan menggunakan persamaan 8.

3.2. Hasil

Percobaan yang dilakukan dengan mengaplikasikan *support vector regression* dengan fungsi kernel RBF (Radial Basic Function) menggunakan matlab. Percobaan pertama menghitung nilai prediksi 20 hari kedepan yang ditunjukkan pada gambar 1, dan untuk percobaan kedua menghitung nilai prediksi untuk 5 hari kedepan, yang ditunjukkan pada gambar 2.

Hari ke-	Harga Aktual	Harga Prediksi
1	8750	8610,4
2	9100	8613,2
3	9000	8600,1
4	9000	8631,9
5	8875	8671,4
6	8750	8735
7	8625	8675
8	8750	8762,9
9	8950	8844,3
10	9100	8946,5
11	8725	8895,9
12	8875	8932,3
13	8875	8977,4
14	8875	9022,5
15	8875	8927,9
16	8875	8547,5
17	9000	8422,3
18	9125	8774
19	9250	8689,4
20	9250	8582,6

Gambar 1.

Hari ke-	Harga Aktual	Harga Prediksi
1	8875	8871,8
2	9000	9819,6
3	9125	8984,6
4	9250	8985,2
5	9250	8968

Gambar 2.

4. Kesimpulan dan Saran

Hasil prediksi yang diperoleh dari serangkaian percobaan yang dilakukan menggunakan metode Support Vector Regression dengan ke-9 analisis teknikal menghasilkan tingkat kesalahan dibawah 5%, dimana untuk prediksi 20 hari 2,67% dan 5 hari adalah 3,26%. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan pemilihan indikator teknikal yang lain, pemilihan kernel dan parameter optimisasi lainnya untuk mendapatkan nilai prediksi yang semakin baik.

Daftar Pustaka

- Santosa, B., (2007), Data Mining Teknik Pemanfaatan Data untuk Keperluan Bisnis, Yogyakarta Graha Ilmu.
- Yakup, K., Melek, A., & Ömer, K. (2011). Predicting direction of stock price index movement using artificial neural networks and support vector machines: The sample of the Istanbul Stock Exchange. *Expert Systems with Applications ELSEVIER*, 5311–5319
- Fontanills, et al. (2001). *The Stock Market Course*. Canada : John Wiley & Sons, Inc. Pp 1-6
- Kuo, R.J., Li, P.S.,(2016)*Taiwanese export trade forecasting using firefly algorithm based K-means algorithm and SVR with wavelet transform*, 153-161.
- Murphy, J. (1999). *Technical analysis of the financial markets*. New York Institute of Finance.
- Drucker, H., Burges, C., Smola, A., Kaufmann, L., & Vapnik, V. (1996). Support Vector Regression Machines. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 155-161.
- Smola, A., & Scholkopf, B. (2004). A tutorial on support vector regression. *Statistics and Computing*, 199–222.
- Drucker, H., Burges, C., Smola, A., Kaufmann, L., & Vapnik, V. (1996). Support Vector Regression Machines. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 155-161.

EVALUASI PREMI ASURANSI DWIGUNA *LAST SURVIVOR* UNTUK KASUS TIGA ORANG TERTANGGUNG

Devni Prima Sari, Jazwinarti

Universitas Negeri Padang
devniprimasari@yahoo.co.id

Abstrak

Asuransi jiwa *multiple life* adalah suatu perjanjian asuransi yang berhubungan dengan suatu keadaan dimana antara hidup dan matinya seseorang merupakan gabungan dari dua peserta asuransi atau lebih. Salah satu jenis asuransi jiwa bersama adalah asuransi jiwa *last survivor*, yaitu asuransi jiwa bersama dari dua orang atau lebih peserta asuransi dengan premi dibayarkan sampai kematian terakhir dari pesertanya. Penelitian ini dilakukan dengan metode literatur, yaitu dengan mengumpulkan berbagai sumber materi yang mendukung. Selanjutnya penulis merumuskan suatu masalah dengan mencari hubungan antar unsur yang saling berkaitan, kemudian membentuk suatu langkah dan formula perhitungan premi tahunan asuransi dwiguna *last survivor* untuk tiga orang tertanggung. Langkah terakhir yaitu melakukan evaluasi terhadap formula yang dihasilkan ke dalam contoh kasus penerapan. Jumlah pembayaran premi untuk asuransi jiwa *last survivor* bergantung pada jenis program asuransi yang telah diambil dan besarnya santunan yang diterima oleh tertanggung. Pembayaran premi untuk asuransi *last survivor* lebih murah dibandingkan dengan asuransi perorangan untuk jumlah santunan yang sama. Ini dikarenakan pembayaran premi untuk polis asuransi bersama dibayarkan oleh beberapa peserta asuransi. Akhirnya, bentuk formula perhitungan anuitas maupun premi pada asuransi *last survivor* dibangun dari kombinasi formula asuransi *joint life*.

Kata Kunci: asuransi jiwa dwiguna, asuransi *multiple life*, asuransi *last survivor*, premi dan anuitas

1. Pendahuluan

Fitch memperkirakan prospek pertumbuhan akan tetap menarik dalam jangka menengah hingga jangka panjang, didorong oleh penetrasi yang rendah, peningkatan kesadaran risiko, dan kenaikan tingkat kemakmuran [1]. Hal ini menarik perhatian perusahaan asuransi untuk menciptakan produk baru yang dapat menarik perhatian pasar dengan premi yang lebih rendah dan tidak merugikan perusahaan. Jika dipandang dari segi jumlah tertanggung yang diproteksi, ada dua jenis asuransi jiwa yaitu asuransi *single life* dan asuransi *multiple life*. Asuransi *single life* adalah asuransi jiwa yang menyediakan perlindungan untuk satu orang tertanggung [2], sedangkan asuransi *multiple life* adalah asuransi jiwa yang menyediakan perlindungan untuk dua orang tertanggung atau lebih [3].

Dalam asuransi *multiple life*, dikenal istilah *joint life status* dan *last survivor status*. Asuransi *joint life* yaitu asuransi jiwa dimana uang pertanggungan dibayarkan pada anggota yang ditinggalkan apabila terjadi kematian pertama pada kelompok tersebut. Asuransi *last survivor* yaitu asuransi jiwa dimana uang pertanggungan dibayarkan pada ahli waris apabila semua tertanggung telah meninggal dunia [4]. Beberapa penelitian tentang asuransi *multiple life* telah banyak dilakukan, diantaranya model asuransi *joint life* dan *last survivor* yang dilakukan oleh Matvejevs [5], penentuan premi bersih tahunan pada asuransi jiwa seumur hidup untuk kasus *multiple life* [6] dan perhitungan premi tahunan pada asuransi *joint life* dan penerapannya [7]. Tetapi penelitian-penelitian tersebut hanya terbatas untuk dua orang tertanggung. Padahal calon nasabah akan lebih tertarik jika produk asuransi memproteksi lebih banyak anggota keluarga dengan premi yang lebih rendah. Untuk itu penulis merekomendasikan produk asuransi *multiple life* yang memproteksi tiga tertanggung, dimana penulis membatasi penelitian pada asuransi jiwa *last survivor*.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan metode literatur, yaitu dengan mengumpulkan berbagai sumber materi yang mendukung seperti buku, jurnal, dan beberapa artikel dari internet. Selanjutnya penulis merumuskan suatu masalah dengan mencari hubungan antar unsur yang saling berkaitan, kemudian membentuk suatu langkah dan formula perhitungan premi tahunan asuransi *last survivor* untuk tiga orang tertanggung dengan memanfaatkan persamaan dasar perhitungan premi yaitu nilai tunai premi sama dengan nilai tunai santunan. Langkah terakhir yaitu melakukan evaluasi terhadap formula yang dihasilkan ke dalam contoh kasus penerapan.

Perhitungan premi tahunan pada asuransi *last survivor* untuk tiga orang tertanggung berusia x , y dan z tahun dimulai dengan pembuatan tabel mortalitas gabungan, yaitu menentukan fungsi hidup gabungan tiga orang. Kedua, peluang hidup gabungan dan peluang mati gabungan. Ketiga, membuat tabel komutasi gabungan. Keempat adalah menghitung nilai tunai anuitas awal atau anuitas akhir, kemudian menentukan premi tunggal gabungan. Dan yang terakhir adalah menentukan premi tahunan asuransi *last survivor* dwiguna murni, berjangka, dan dwiguna.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada pembahasan selanjutnya peneliti akan fokus mengulas mengenai asuransi *last survivor* untuk tiga orang tertanggung. Penulis juga akan menguraikan pembahasan mengenai perhitungan premi tahunan pada asuransi *last survivor* untuk tiga orang dengan jenis asuransi *last survivor* dwiguna murni, berjangka, dan dwiguna, serta contoh penerapannya.

3.1. Probabilitas Gabungan

Pada penelitian ini, penulis menggunakan Tabel Mortalitas Indonesia 2011 (TMI 2011) sebagai dasar melakukan perhitungan. Berikut nilai-nilai kemungkinan untuk tiga orang tertanggung,

a. Nilai kemungkinan (x) , (y) dan (z) dalam jangka waktu t tahun meninggal semua adalah

$${}_tq_{\overline{xyz}} = {}_tq_x {}_tq_y {}_tq_z = (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y)(1 - {}_tp_z) \quad (1)$$

b. Nilai kemungkinan (x) , (y) dan (z) sedikitnya satu yang hidup t tahun kemudian adalah

$${}_tp_{\overline{xyz}} = {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - {}_tp_{xy} - {}_tp_{xz} - {}_tp_{yz} + {}_tp_{xyz} \quad (2)$$

c. Nilai kemungkinan (x) , (y) dan (z) yang paling akhir hidup dalam $[t, t + 1]$ meninggal adalah

$${}_t|q_{\overline{xyz}} = {}_tp_{\overline{xyz}} - {}_{t+1}p_{\overline{xyz}} \quad (3)$$

d. Nilai kemungkinan (x) , (y) dan (z) dalam t tahun kemudian semuanya hidup adalah

$${}_tp_{xyz} = {}_tp_x {}_tp_y {}_tp_z \quad (4)$$

3.2. Simbol-simbol Komutasi Gabungan

Simbol-simbol komutasi pada asuransi *multiple life* didefinisikan secara analog dengan simbol-simbol komutasi pada asuransi jiwa tunggal, yaitu didefinisikan sebagai berikut [8]

$$D_{x_1x_2 \dots x_m} = v^{\frac{x_1+x_2+\dots+x_m}{m}} \cdot l_{x_1x_2 \dots x_m} \quad (5)$$

dan

$$C_{x_1x_2 \dots x_m} = v^{\frac{x_1+x_2+\dots+x_m+1}{m}} \cdot d_{x_1x_2 \dots x_m} \quad (6)$$

Selain itu, terdapat pula beberapa simbol komutasi gabungan lainnya pada tabel mortalitas gabungan, yaitu [5]

$$N_{xy} = D_{xy} + D_{x+1,y+1} + D_{x+2,y+2} + \dots \quad (7)$$

$$M_{xy} = C_{xy} + C_{x+1,y+1} + C_{x+2,y+2} + \dots \quad (8)$$

Simbol-simbol tersebut akan sering digunakan untuk memudahkan perhitungan anuitas.

3.3. Anuitas Hidup *Last survivor*

Perhitungan premi pada asuransi *last survivor* berkaitan dengan hidup dan matinya dua orang tertanggung atau lebih, sehingga anuitas yang digunakan adalah anuitas hidup *last survivor*. Anuitas *last survivor* adalah suatu kontrak anuitas yang terdiri dari dua tertanggung atau lebih, dimana pembayaran berhenti apabila semua tertanggung meninggal dunia. Anuitas hidup yang digunakan pada penelitian ini adalah anuitas hidup diskret dimana jarak waktu pembayarannya sama setiap periode dengan pembayaran di awal periode sehingga akan mudah bagi perusahaan asuransi dalam melakukan pembukuan dana [9]. Pada perhitungan premi, peneliti akan menggunakan anuitas berjangka. Sehingga pada pembahasan berikut penulis akan memfokuskan pada pembentukan formula untuk anuitas hidup *last survivor* berjangka. Anuitas hidup *last survivor* berjangka adalah anuitas hidup yang berlaku selama jangka waktu tertentu yang telah disepakati oleh ketiga tertanggung dan perusahaan asuransi di awal kontrak polis. Pembayaran akan berhenti jika semua tertanggung meninggal dunia sebelum jangka waktu yang ditetapkan tersebut.

3.3.1. Nilai Tunai Anuitas *Last survivor* Awal Berjangka

Jika besar penerimaan anuitas setiap awal periode selama n periode dengan bunga i per periode adalah 1 rupiah untuk tiga orang masing-masing berusia x , y dan z tahun, maka nilai tunai anuitas hidup *last survivor* awal adalah

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= 1 + v^1 {}_1p_{\overline{xyz}} + v^2 {}_2p_{\overline{xyz}} + \cdots + v^{n-1} {}_{n-1}p_{\overline{xyz}} \\ \ddot{a}_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_{\overline{xyz}} \\ \ddot{a}_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t (1 - {}_tq_{\overline{xyz}}) \\ \ddot{a}_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{y:\overline{n}|} + \ddot{a}_{z:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xz:\overline{n}|} - \ddot{a}_{yz:\overline{n}|} + \ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}\end{aligned}\quad (9)$$

Dengan menggunakan rumus komutasi gabungan diperoleh

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} + \frac{N_y - N_{y+n}}{D_y} + \frac{N_z - N_{z+n}}{D_z} - \frac{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}{D_{xy}} - \frac{N_{xz} - N_{x+n,z+n}}{D_{xz}} \\ &\quad - \frac{N_{yz} - N_{y+n,z+n}}{D_{yz}} + \frac{N_{xyz} - N_{x+n,y+n,z+n}}{D_{xyz}}\end{aligned}\quad (10)$$

3.3.2. Nilai Tunai Anuitas Hidup *Last survivor* Akhir Berjangka

Jika besar penerimaan anuitas setiap akhir periode selama n periode dengan bunga i per periode adalah 1 rupiah untuk tiga orang masing-masing berusia x , y dan z tahun, maka nilai tunai anuitas hidup *last survivor* akhir adalah

$$\begin{aligned}a_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= v^1 {}_1p_{\overline{xyz}} + v^2 {}_2p_{\overline{xyz}} + \cdots + v^{n-1} {}_{n-1}p_{\overline{xyz}} + v^n {}_np_{\overline{xyz}} \\ a_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^n v^t {}_tp_{\overline{xyz}} \\ a_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^n v^t (1 - {}_tq_{\overline{xyz}}) \\ a_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= a_{x:\overline{n}|} + a_{y:\overline{n}|} + a_{z:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{n}|} - a_{xz:\overline{n}|} - a_{yz:\overline{n}|} + a_{xyz:\overline{n}|}\end{aligned}\quad (11)$$

Dengan menggunakan rumus komutasi gabungan diperoleh

$$\begin{aligned}a_{\overline{xyz}:\overline{n}|} &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + \frac{N_{y+1} - N_{y+n+1}}{D_y} + \frac{N_{z+1} - N_{z+n+1}}{D_z} - \frac{N_{x+1,y+1} - N_{x+n+1,y+n+1}}{D_{xy}} \\ &\quad - \frac{N_{x+1,z+1} - N_{x+n+1,z+n+1}}{D_{xz}} - \frac{N_{y+1,z+1} - N_{y+n+1,z+n+1}}{D_{yz}} \\ &\quad + \frac{N_{x+1,y+1,z+1} - N_{x+n+1,y+n+1,z+n+1}}{D_{xyz}}\end{aligned}\quad (12)$$

Persamaan nilai tunai anuitas ini digunakan dalam perhitungan premi tahunan asuransi *last survivor*.

3.4. Premi Tunggal Asuransi *Last survivor*

Premi tunggal adalah pembayaran premi asuransi yang dilakukan pada waktu kontrak asuransi disetujui, selanjutnya tidak ada pembayaran lagi. Premi tunggal untuk asuransi *last survivor* ada tiga jenis, yaitu premi tunggal dwiguna murni (*pure endowment*), premi tunggal asuransi berjangka, dan premi tunggal asuransi dwiguna (*endowment*) [10].

3.4.1. Premi Tunggal Asuransi *Last survivor* Dwiguna Murni (*Pure Endowment*)

Dwiguna murni adalah suatu kontrak asuransi jiwa dimana pemegang polis, mulai dari saat kontrak sampai dengan jangka waktu tertentu sedikitnya satu yang hidup, maka pemegang polis tersebut menerima sejumlah uang pertanggungan.

$$A_{\overline{xyz:n}}^1 = v^n \cdot n p_{\overline{xyz}}$$

dengan menggunakan persamaan (2) diperoleh

$$A_{\overline{xyz:n}}^1 = v^n (n p_x + n p_y + n p_z - n p_{xy} - n p_{xz} - n p_{yz} + n p_{xyz})$$

Maka, premi tunggal *life survivor* dwiguna murni selama n tahun untuk tiga orang berusia x , y dan z tahun dengan santunan sebesar 1 adalah

$$A_{\overline{xyz:n}}^1 = A_{x:n}^1 + A_{y:n}^1 + A_{z:n}^1 - A_{xy:n}^1 - A_{xz:n}^1 - A_{yz:n}^1 + A_{xyz:n}^1 \quad (13)$$

3.4.2. Premi Tunggal Asuransi *Last survivor* Berjangka

Asuransi *last survivor* berjangka, dari tiga orang yang dibayarkan uang pertanggungan pada waktu meninggalnya yang paling akhir hidup, premi tunggal untuk asuransi yang uang pertanggungannya dibayarkan pada akhir tahun polis adalah

$$A_{\overline{xyz:n}}^1 = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \cdot t | q_{\overline{xyz}}$$

dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh

$$t | q_{\overline{xyz}} = t | q_x + t | q_y + t | q_z - t | q_{xy} - t | q_{xz} - t | q_{yz} + t | q_{xyz}$$

Maka, premi tunggal *life survivor* dwiguna murni selama n tahun untuk tiga orang berusia x , y dan z tahun dengan santunan sebesar 1 adalah

$$A_{\overline{xyz:n}}^1 = A_{x:n}^1 + A_{y:n}^1 + A_{z:n}^1 - A_{xy:n}^1 - A_{xz:n}^1 - A_{yz:n}^1 + A_{xyz:n}^1 \quad (14)$$

3.4.3. Premi Tunggal Asuransi *Last survivor* Dwiguna

Asuransi *last survivor* dwiguna, dari tiga orang pada waktu yang paling akhir meninggal maupun hidup pada akhir masa pertanggungan akan dibayarkan uang pertanggungan. Dengan demikian premi tunggal bersih untuk asuransi *last survivor* dwiguna merupakan penjumlahan antara premi tunggal bersih asuransi *last survivor* dwiguna murni dan berjangka. Sehingga perhitungan premi tunggal bersih asuransi *last survivor* dwiguna berjangka n tahun untuk tiga orang, masing-masing berusia x , y dan z tahun dengan santunan 1 rupiah adalah:

$$A_{\overline{xyz:n}} = A_{\overline{xyz:n}}^1 + A_{\overline{xyz:n}} \quad (15)$$

3.5. Premi Tahunan Asuransi *Last survivor*

Premi tahunan pada asuransi *last survivor* merupakan besarnya biaya yang ditanggung oleh peserta asuransi (dalam hal ini tiga orang) yang dibayarkan setiap tahun agar memperoleh santunan ketika salah satu diantara ketiga orang tersebut meninggal. Perhitungan premi tahunan pada asuransi *last survivor* diturunkan dari persamaan dasar perhitungan premi tunggal, yaitu:

$$\text{Nilai tunai premi} = \text{Nilai tunai santunan}$$

Sehingga, besarnya premi tahunan pada asuransi *last survivor* untuk berbagai jenis asuransi dapat dituliskan sebagai berikut :

3.5.1. Premi Tahunan Asuransi *Last survivor* Dwiguna Murni (*Pure Endowment*)

Premi tahunan suatu asuransi *last survivor* dwiguna murni untuk tiga orang berusia x , y dan z dengan santunan sebesar R rupiah adalah

$$\begin{aligned} P_{\overline{xyz:n}}^1 \ddot{a}_{\overline{xyz:n}} &= R \left(A_{\overline{xyz:n}}^1 \right) \\ P_{\overline{xyz:n}}^1 &= R \left(\frac{A_{\overline{xyz:n}}^1}{\ddot{a}_{\overline{xyz:n}}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

3.5.2. Premi Tahunan Asuransi *Last survivor* Berjangka

Premi tahunan suatu asuransi *last survivor* berjangka untuk tiga orang berusia x , y dan z dengan santunan sebesar R rupiah adalah

$$\begin{aligned} P_{\overline{xyz:n}}^1 \ddot{a}_{\overline{xyz:n}} &= R \left(A_{\overline{xyz:n}}^1 \right) \\ P_{\overline{xyz:n}}^1 &= R \left(\frac{A_{\overline{xyz:n}}^1}{\ddot{a}_{\overline{xyz:n}}} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

3.5.3. Premi Tahunan Asuransi *Last survivor* Dwiguna

Premi tahunan suatu asuransi *last survivor* dwiguna dengan jangka waktu perlindungan selama n tahun untuk dua orang berusia x , y dan z dengan besar santunan dan *endowmen* sama, sebesar R rupiah adalah

$$\begin{aligned} P_{\overline{xyz:n}} &= R \frac{A_{\overline{xyz:n}}}{\ddot{a}_{\overline{xyz:n}}} \\ P_{\overline{xyz:n}} &= R \left(P_{\overline{xyz:n}}^1 + P_{\overline{xyz:n}}^1 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Jika besar santunan dan *endowmen* berbeda, maka :

$$P_{\overline{xyz:n}} = R_1 P_{\overline{xyz:n}}^1 + R_2 P_{\overline{xyz:n}}^1 \quad (19)$$

Persamaan (18) merupakan persamaan premi tahunan pada asuransi *last survivor* dwiguna dengan masa perlindungan dan lama pembayaran premi selama n tahun untuk tiga orang berusia x , y dan z tahun dan santunan maupun *endowmen* sama yaitu sebesar R . Sedangkan persamaan (19) digunakan jika besar santunan dan *endowmen* berbeda. Selanjutnya akan diberikan beberapa contoh kasus penerapan asuransi *joint life* untuk mempermudah pemahaman formula.

3.6. Penerapan

Pak Khairul, seorang pegawai swasta yang berusia 40 tahun hendak membeli polis asuransi *last survivor* bersama dua orang istrinya yang berusia 35 tahun dan 25 tahun. Premi akan dibayarkan setahun sekali setiap awal tahun selama 35 tahun dengan jangka waktu perlindungan 35 tahun. Besar santunan yang akan diterima ahli waris ketika Pak Khairul dan istri-istrinya meninggal dunia adalah Rp 50.000.000 atau uang pertanggungan sebesar Rp 50.000.000 apabila ada salah satu tertanggung masih hidup. Berapa besar premi bersih tahunan yang harus dibayar setiap awal tahun dengan menggunakan TMI 2011 dan suku bunga $i=2,5\%$?

Jawab:

Berdasarkan data pada kasus tersebut, maka jenis asuransi yang dipilih Pak Khairul adalah asuransi *last survivor* dwiguna berjangka 35 tahun.

- Berdasarkan data yang telah diketahui, maka dapat dibuat tabel mortalitas dengan menggunakan *Microsoft Excel*.
- Perhitungan nilai tunai anuitas *last survivor* awal berjangka 35 tahun untuk tiga orang berusia 30, 35 dan 25 tahun, yaitu dapat menggunakan persamaan (9) sehingga

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|} &= R(\ddot{a}_{\overline{30:\overline{35}}|} + \ddot{a}_{\overline{35:\overline{35}}|} + \ddot{a}_{\overline{25:\overline{35}}|} - \ddot{a}_{\overline{30,35:\overline{35}}|} - \ddot{a}_{\overline{30,25:\overline{35}}|} - \ddot{a}_{\overline{35,25:\overline{35}}|} + \ddot{a}_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}) \\
&= \text{Rp. } 50.000.000 \left(\frac{N_{30} - N_{65}}{D_{30}} + \frac{N_{35} - N_{70}}{D_{35}} + \frac{N_{25} - N_{60}}{D_{25}} - \frac{N_{30,35} - N_{65,70}}{D_{30,35}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{N_{30,25} - N_{65,60}}{D_{30,25}} - \frac{N_{35,25} - N_{70,60}}{D_{35,25}} + \frac{N_{30,35,25} - N_{65,70,60}}{D_{30,35,25}} \right) \\
&= \text{Rp. } 50.000.000 (23.133604 + 22.318399 + 23.350664 - 21.813499 \\
&\quad - 22.782963 - 21.998411 + 21.511719) \\
\ddot{a}_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|} &= \text{Rp. } 1185975688.04
\end{aligned}$$

Jadi, nilai tunai anuitas *last survivor* awal adalah Rp. 1185975688.04

- c. Perhitungan premi tunggal asuransi *last survivor* dwiguna murni berjangka 35 tahun untuk tiga orang berusia 30, 35 dan 25 tahun, yaitu dapat menggunakan persamaan (13) sehingga

$$\begin{aligned}
A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}^1 &= R(A_{\overline{30:\overline{35}}|}^1 + A_{\overline{35:\overline{35}}|}^1 + A_{\overline{25:\overline{35}}|}^1 - A_{\overline{30,35:\overline{35}}|}^1 - A_{\overline{30,25:\overline{35}}|}^1 - A_{\overline{35,25:\overline{35}}|}^1 + A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}^1) \\
&= R \left(\frac{D_{65}}{D_{30}} + \frac{D_{70}}{D_{35}} + \frac{D_{60}}{D_{25}} - \frac{D_{65,70}}{D_{30,35}} - \frac{D_{65,60}}{D_{30,25}} - \frac{D_{70,60}}{D_{35,25}} + \frac{D_{65,70,60}}{D_{30,35,25}} \right) \\
&= \text{Rp. } 50.000.000 (0,367856 + 0,300944 + 0,386449 - 0,262724 - 0,337369 \\
&\quad - 0,276003 + 0,240950) \\
A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}^1 &= \text{Rp. } 21.005.175,59
\end{aligned}$$

- d. Perhitungan premi tunggal asuransi *last survivor* berjangka 35 tahun untuk tiga orang berusia 30, 35 dan 25 tahun, yaitu dapat menggunakan persamaan (14) sehingga

$$\begin{aligned}
A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}^1 &= R(A_{\overline{30:\overline{35}}|}^1 + A_{\overline{35:\overline{35}}|}^1 + A_{\overline{25:\overline{35}}|}^1 - A_{\overline{30,35:\overline{35}}|}^1 - A_{\overline{30,25:\overline{35}}|}^1 - A_{\overline{35,25:\overline{35}}|}^1 + A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}^1) \\
&= R \left(\frac{M_{30} - M_{65}}{D_{30}} + \frac{M_{35} - M_{70}}{D_{35}} + \frac{M_{25} - M_{60}}{D_{25}} - \frac{M_{30,35} - M_{65,70}}{D_{30,35}} - \frac{M_{30,25} - M_{65,60}}{D_{30,25}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{M_{35,25} - M_{70,60}}{D_{35,25}} + \frac{M_{30,35,25} - M_{65,70,60}}{D_{30,35,25}} \right) \\
&= \text{Rp. } 50.000.000 (0,067910 + 0,154705 + 0,044022 - 0,205240 - 0,106949 \\
&\quad - 0,187451 + 0,234374) \\
A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}^1 &= \text{Rp. } 68.588,12
\end{aligned}$$

Jadi, premi tunggal asuransi *last survivor* berjangka adalah Rp. 68.588,12

- e. Perhitungan premi tunggal asuransi *last survivor* dwiguna berjangka 35 tahun untuk tiga orang berusia 30, 35 dan 25 tahun, yaitu dapat menggunakan persamaan (15) sehingga

$$\begin{aligned}
A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|} &= R(A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}^1 + A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}^1) \\
&= \text{Rp. } 21.005.175,59 + \text{Rp. } 68.588,12 \\
A_{\overline{30,35,25:\overline{35}}|}^1 &= \text{Rp. } 21.073.763,71
\end{aligned}$$

Jadi, premi tunggal asuransi *last survivor* dwiguna adalah Rp. 21.073.763,71

- f. Perhitungan premi tahunan asuransi *last survivor* dwiguna berjangka 35 tahun untuk tiga orang berusia 30, 35 dan 25 tahun, yaitu dapat menggunakan persamaan (18) sehingga

$$\begin{aligned}
 P_{\overline{30,35,25:\overline{35}|}} &= R \left(\frac{A_{\overline{30,35,25:\overline{35}|}}}{\ddot{a}_{\overline{30,35,25:\overline{35}|}}} \right) \\
 &= \frac{\text{Rp. } 21.073.763,71}{23,72} \\
 P_{\overline{30,35,25:\overline{35}|}} &= \text{Rp. } 888.456,82
 \end{aligned}$$

Jadi, premi tahunan asuransi *last survivor* dwiguna adalah Rp. 888.456,82

4. Kesimpulan

Besarnya premi dari suatu polis asuransi tergantung dari jenis asuransi apa yang diikuti oleh tertanggung. Besarnya premi tahunan untuk polis asuransi jiwa *last survivor* bergantung pada usia masuk peserta, besarnya uang pertanggungan dan suku bunga. Pada asuransi jiwa *last survivor*, perhitungan preminya berkaitan dengan premi asuransi jiwa *single life* dan premi asuransi jiwa *joint life* untuk dua orang dan tiga orang tertanggung.

Daftar Pustaka

- [1] Joice, "Industri Asuransi Indonesia Berkembang," 2013. [Online]. Available: <http://bisniskeuangan.kompas.com/read/2013/11/20/1433369/Industri.Asuransi.Indonesia.Berkembang>. [Diakses 1 April 2014].
- [2] T. Futami, Matematika Asuransi Jiwa Bagian I, Jakarta: Rekaprint Utama, 1992.
- [3] T. Futami, Matematika Asuransi Jiwa Bagian II, Jakarta: Rekaprint Utama, 1994.
- [4] H. U. Gerber, Life Insurance Mathematics, 2nd penyunt., Berlin: Springer, 1995.
- [5] A. Matvejevs dan A. Matvejevs, "Insurance Models for Joint life and Last survivor Benefit," *Informatica*, vol. 12, no. 4, p. 547–558, 2001.
- [6] W. Ningsih, "Penentuan Premi Bersih Tahunan pada Asuransi Jiwa Seumur Hidup untuk Kasus Multiple life," Universitas Negeri Padang, Padang, 2014.
- [7] A. Sugihar, "Perhitungan Premi Tahunan pada Asuransi Joint life dan Penerapannya," Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta, 2011.
- [8] C. W. Jordan, Life Contingencies, 2nd penyunt., The Society of Actuaries, 1991.
- [9] S. Kellison, The Theory of Interest, 3rd penyunt., New York: Mc Graw Hill, 2009.
- [10] N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones dan C. J. Nesbitt, Actuarial Mathematics, Schaumburg: The Society of Actuaries, 1997.

PREMI ASURANSI DWIGUNA JOINT LIFE MENGGUNAKAN DISTRIBUSI PARETO

Hasriati, M. D. H. Gamal, T. P. Nababan

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau
hasriati.hasri@gmail.com, mdhgamal@unri.ac.id,
tumpalpnababan@gmail.com

Abstrak

Dalam penentuan Premi pada Status hidup gabungan (joint life) adalah mengikuti suatu keadaan dimana aturan meninggal dan hidup dari peserta asuransi jiwa yang merupakan gabungan dari dua orang, misalnya suami dan istri, ayah dan anak. Status gabungan dalam fungsi distribusi gabungan $F_{T(x),T(y)}(s,t) = p(T(x) \leq s \text{ dan } T(y) \leq t)$. Peluang meninggal dari status gabungan untuk t tahun yang akan datang dipengaruhi oleh percepatan mortalita dari masing-masing orang tersebut. Misalkan ${}_tq_{xy}$ menyatakan peluang meninggal dari dua orang yang berusia (x) dan (y) . Jika salah satu diantara keduanya ada yang meninggal lebih dulu, maka ${}_tq_{xy} = p\{\min(T(x),T(y))\}$ dan jika salah satu diantara keduanya ada yang meninggal terakhir maka ${}_tq_{xy} = p\{\max(T(x),T(y))\}$.

Dalam merumuskan peluang hidup status gabungan dari peserta asuransi digunakan distribusi Pareto yang dinyatakan sebagai berikut:

$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha \theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}$ $x > \theta, \alpha > 0, \theta > 0$. Pada distribusi Pareto terdapat nilai parameter θ dan untuk menentukan parameter dari sebuah distribusi Pareto dapat dilakukan dengan metode maksimum likelihood. Metode maksimum likelihood adalah metode penaksir parameter dengan memaksimumkan fungsi likelihood. Yang mana dalam hal ini diperoleh premi tunggal dan premi tahunan asuransi jiwa dwiguna Joint life menggunakan distribusi Pareto, sehingga dapat menghasilkan uang santunan yang akan diterima oleh peserta asuransi atau ahli waris.

Kata kunci: Premi, joint life, maksimum likelihood, distribusi Pareto

1. Pendahuluan

Ketidakpastian di hari tua atau dimasa yang akan datang dalam memenuhi kebutuhan perekonomian yang menyebabkan ketidakmampuan untuk memperoleh penghasilan dan mengakibatkan kesulitan ekonomi bagi pekerja sendiri maupun keluarganya harus diantisipasi. Salah satu upaya untuk mengantisipasi resiko hari tua adalah dengan mengikutsertakan setiap pekerja pada suatu program asuransi jiwa. Asuransi jiwa merupakan suatu asuransi yang memberikan pembayaran sejumlah uang tertentu atas meninggalnya tertanggung kepada ahli waris atau orang yang berhak menerimanya sesuai dengan ketentuan dan kesepakatan yang telah disetujui oleh tertanggung dalam polis asuransi jiwa. Sepasang suami istri yang bekerja pada suatu instansi yang sama memungkinkan untuk mengambil satu program asuransi dengan satu polis yang sama untuk mempermudah pembayaran.

Berdasarkan jumlah tertanggung asuransi jiwa terbagi dua jenis ialah asuransi jiwa tunggal (perorangan) dan asuransi jiwa gabungan dan pada makalah ini membahas asuransi gabungan. Bowers et al. [2, h. 258] menyatakan asuransi jiwa gabungan dibedakan menjadi dua yakni asuransi jiwa *last survivor* dan asuransi jiwa *joint life*. Asuransi jiwa *last survivor* merupakan suatu keadaan yang akan tetap berlangsung selama setidaknya ada satu anggota yang masih hidup dan akan berhenti setelah meninggalnya orang yang terakhir dari anggotanya (semua anggotanya meninggal), sedangkan asuransi jiwa *joint life* merupakan keadaan yang berlangsung selama semua anggota dari gabungan beberapa orang dapat bertahan hidup dan akan berhenti setelah salah satu dari anggotanya pertama sekali meninggal dan yang digunakan pada makalah ini ialah asuransi gabungan *joint life* untuk dua peserta asuransi suami dan istri.

Asuransi jiwa *joint life* memiliki masa pertanggungan yang berbeda dan terbagi atas asuransi jiwa dwiguna murni, asuransi jiwa seumur hidup, asuransi jiwa berjangka dan asuransi jiwa dwiguna. Pada makalah ini yang digunakan ialah masa pertanggungan dwiguna, Futami [4, h. 78] menyatakan asuransi dwiguna *joint life* ialah jika peserta asuransi yaitu suami istri pada waktu yang paling akhir meninggal ataupun pada akhir masa pertanggungan masih tetap hidup maka akan dibayarkan uang pertanggungan

Pada makalah ini akan ditentukan premi tahunan dan premi tunggal pada asuransi jiwa dwiguna *joint life*. Premi tahunan ialah serangkaian pembayaran yang dilakukan oleh peserta asuransi kepada perusahaan asuransi setiap setahun sekali dalam batas waktu sepanjang kontrak asuransi yang telah disepakati dan premi tunggal ialah pembayaran premi asuransi yang dilakukan peserta hanya sekali selama waktu kontrak yang telah disetujui saat masuk menjadi peserta asuransi. Pembayaran premi dipengaruhi oleh faktor diskon, nilai anuitas hidup, peluang hidup dan peluang meninggal. Dalam menentukan peluang hidup dan peluang meninggal untuk asuransi jiwa dwiguna *joint life* dengan menggunakan distribusi Pareto, distribusi Pareto dikemukakan oleh seorang ekonom Italia yang bernama Vilfredo Pareto (1848-1923) [6].

2. Kajian Literatur dan Pengembangan Hipotesa

2.1. Peluang hidup dan peluang meninggal asuransi dwiguna *joint life*

Fungsi survival yang dinotasikan $S(x)$ berkaitan dengan fungsi distribusi yang dinotasikan $F(x)$. Walpole [7, h. 86] menyatakan dalam menentukan fungsi survival dibutuhkan fungsi distribusi yang diperoleh dari fungsi kepadatan peluang. Pada aktuaria fungsi survival menyatakan peluang hidup dan dinotasikan dengan ${}_t p_x$ sedangkan fungsi distribusi menyatakan peluang meninggal dan dinotasikan dengan ${}_t q_x$.

Dalam menentukan premi tahunan dibutuhkan nilai tunai anuitas dan premi tunggal. Futami [4, h. 9] menyatakan anuitas adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu, yang dilakukan setiap selang waktu dan lama tertentu. Anuitas yang digunakan ialah anuitas hidup awal berjangka dimana pembayarannya dilakukan setiap awal periode yang sudah disepakati selama jangka waktu tertentu. Anuitas hidup asuransi *joint life* dinotasikan dengan $\ddot{a}_{xy:\overline{n}}$ dan premi tunggal asuransi *joint life* dinotasikan dengan $A_{xy:\overline{n}}$. Peluang hidup mempengaruhi pada anuitas hidup dan premi tunggal.

Menurut Futami [5, h. 58] dalam asuransi *joint life* dengan usia peserta asuransi x tahun dan y tahun peluang hidupnya dinyatakan dengan

$${}_t p_{xy} = 1 - {}_t q_{xy}. \quad (1)$$

Peluang hidup *joint life* dapat bertahan hidup hingga $t + u$ tahun dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} {}_{t+u} p_{xy} &= {}_t p_{xy} {}_u p_{x+t;y+t}, \\ {}_{t+u} p_x &= {}_t p_x (1 - {}_u q_{x+t;y+t}). \end{aligned} \quad (2)$$

Finan [3, h. 589] menyatakan pada status gabungan juga terdapat peluang meninggal tertunda peserta asuransi yang berusia x tahun dan y tahun akan hidup hingga t tahun, kemudian meninggal pada u tahun berikutnya dinyatakan sebagai berikut:

$${}_{t|u} p_{xy} = {}_t p_{xy} - {}_{t+u} p_{xy}, \quad (3)$$

selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (2) ke dalam persamaan (3) diperoleh peluang meninggal tertunda *joint life* sebagai berikut:

$${}_{t|u} q_{xy} = {}_t p_{xy} ({}_u q_{x+t;y+t}), \quad (4)$$

dengan nilai $u = 1$ peluang meninggal tertunda untuk status gabungan yang menyatakan peluang salah seorang diantara usia x tahun dan y tahun yang akan hidup hingga t tahun dan dinotasikan dengan ${}_{t|1} q_{xy}$, sehingga dari persamaan (4) peluang meninggal tertunda gabungan dinyatakan sebagai

$${}_{t|1} q_{xy} = {}_t p_{xy} (q_{x+t;y+t}). \quad (5)$$

2.2. Anuitas awal asuransi dwiguna *joint life* dan premi asuransi dwiguna *joint life*

Menurut Bowers et al. [2, h. 144] pembayaran nilai tunai anuitas awal *joint life* dwiguna untuk 1 satuan pembayaran dinyatakan sebagai

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_t p_{xy}. \quad (6)$$

Premi tunggal asuransi jiwa *joint life* dwiguna dengan jangka waktu pertanggungan n tahun dan uang pertanggungan sebesar 1 satuan pembayaran dinyatakan dengan

$$A_{xy:\overline{n}|} = R \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+i} |q_{xy} + Rv^n {}_n p_{xy}. \quad (7)$$

Dalam menentukan nilai peluang hidup dan peluang meninggal diperlukan tabel mortalita. Menentukan premi juga dipengaruhi oleh faktor diskon. Besar nilai faktor diskon dipengaruhi oleh tingkat bunga, faktor diskon dinotasikan dengan v dan tingkat bunga yang dinotasikan dengan i . Tingkat bunga merupakan persentase dari nilai bunga. Hubungan antara tingkat bunga dan faktor diskon dinyatakan dengan

$$v = \frac{1}{1+i}. \quad (8)$$

Menurut Kellison [6, h. 9] faktor diskon selama t tahun yang akan datang dinotasikan dengan v^t dengan nilai sekarang 1 satuan pembayaran yang dilakukan dalam t tahun sehingga dari persamaan (8) v^t dinyatakan sebagai

$$v^t = \frac{1}{(1+i)^t}, \quad (9)$$

selanjutnya faktor diskon selama $t + 1$ tahun yang akan datang dinotasikan dengan v^{t+1} dengan nilai sekarang 1 satuan pembayaran yang dilakukan dalam t tahun dinyatakan sebagai

$$v^{t+1} = \frac{1}{(1+i)^{t+1}}. \quad (10)$$

Premi tahunan asuransi jiwa dwiguna *joint life* dinotasikan dengan $P_{xy:\overline{n}|}$ dinyatakan sebagai berikut:

$$P_{xy:\overline{n}|} = \frac{A_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}}. \quad (11)$$

2.3 Distribusi Pareto

Distribusi Pareto dikemukakan oleh seorang ekonom Italia yang bernama *Vilfredo Pareto* (1848-1923) yang menemukan sebuah fakta bahwa dari 80% tanah di Italia hanya dimiliki oleh 20% penduduk saja. Dalam aktuaria distribusi probabilitas mempengaruhi nilai peluang hidup dan peluang meninggal. Nilai peluang hidup dan peluang meninggal akan mempengaruhi nilai anuitas, premi tunggal dan tahunan sehingga mempengaruhi nilai anuitas. Rytgaard [6, h. 201] menyatakan fungsi distribusi *Pareto* sebagai berikut

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha \theta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad x > \theta, \alpha > 0, \theta > 0. \quad (12)$$

Dari persamaan (12) akan diperoleh fungsi kumulatif $F(x)$ dengan X sebagai variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$ dari distribusi *Pareto* sehingga dapat digunakan untuk peluang hidup dan peluang meninggal.

Pada distribusi *Pareto* terdapat nilai parameter θ dan untuk menentukan parameter dari sebuah distribusi Pareto dapat dilakukandengan metode maksimum *likelihood*. Metode maksimum *likelihood* adalah metode penaksir parameter dengan memaksimalkan fungsi *likelihood*, dengan menggunakan Definisi 2.3 pada buku Bain dan Engelhardt [1, h. 293] yang menyatakan Fungsi *likelihood* untuk titik sampel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah sebuah fungsi dari θ dan dinotasikan dengan $L(\theta)$. Jika $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ adalah sampel random dari $f(x; \theta)$, maka

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta),$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \quad (14)$$

Ketika $L(\theta)$ maksimum disebut penaksir maksimum *likelihood* untuk θ yang memenuhi

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \max f(x_1, \dots, x_n),$$

dalam menentukan penaksir maksimum *likelihood* digunakan logaritma natural dari fungsi *likelihood* yang disebut fungsi *log-likelihood* yang dinyatakan dengan

$$\ln L(\theta) = \ln f(x_1, \dots, x_n; \theta),$$

untuk mendapatkan nilai parameter $\hat{\theta}$ melalui metode maksimum *likelihood* dapat dilakukan dengan mencari turunan dari $\ln L(\theta)$ terhadap θ dan disamakan dengan 0 dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Sehingga diperoleh penaksir $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ yang merupakan penaksir parameter dari $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

3. Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Mencari fungsi kumulatif dari distribusi *Pareto*.
2. Mencari estimasi parameter dari distribusi *Pareto* dengan menggunakan maksimum *likelihood*.
3. Kemudian distribusi *Pareto* disubstitusi ke dalam peluang hidup perorangan dan peluang meninggal perorangan.
4. Menentukan peluang hidup gabungan dan peluang meninggal gabungan dari peluang hidup perorangan dan peluang meninggal perorangan yang sudah dipengaruhi oleh distribusi *Pareto*.
5. Menentukan nilai tunai anuitas awal *joint life* dan premi tunggal *joint life* dengan distribusi *Pareto*.
6. Menentukan nilai premi tahunan asuransi jiwa dwiguna *joint life* dengan distribusi *Pareto*.

4. Hasil Dan Pembahasan

Pada pembahasan makalah ini terlebih dahulu mencari fungsi kumulatif dari fungsi distribusi *Pareto* yang

ada pada persamaan (12) dinyatakan fungsi kumulatif dari $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

Sehingga diperoleh fungsi kumulatif fungsi distribusi *Pareto* dari sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_p^x f(t)dt \\
 &= \int_p^x \frac{\theta p^\theta}{t^{\theta+1}} \\
 &= (\theta p^\theta) \int_p^x t^{-(\theta+1)} dt \\
 &= (\theta p^\theta) \left[-\frac{1}{\theta} t^{-\theta} \right]_p^x \\
 &= (\theta p^\theta) \left[\left(-\frac{1}{\theta} x^{-\theta} \right) - \left(-\frac{1}{\theta} p^{-\theta} \right) \right] \\
 &= \left(\frac{p}{x} \right)^\theta - \left(\frac{p}{p} \right)^\theta \\
 F(x) &= 1 - \left(\frac{p}{x} \right)^\theta. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Nilai $F(x)$ dari persamaan (13) merupakan fungsi distribusi dengan distribusi *Pareto*, selanjutnya dari persamaan (13) diperoleh fungsi survival distribusi *Pareto* sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 S(x) &= 1 - F(x) \\
 &= 1 - \left(1 - \left(\frac{p}{x} \right)^\theta \right) \\
 S(x) &= \left(\frac{p}{x} \right)^\theta. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya mengestimasi nilai parameter distribusi *Pareto*, berdasarkan persamaan (14) maka fungsi *likelihood* distribusi *Pareto* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 L(x; p, \theta) &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\theta p^\theta}{x^{\theta+1}} \right), \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^n \theta p^\theta}{\prod_{i=1}^n x^{\theta+1}}, \\
 L(x; p, \theta) &= \frac{\theta^n p^{\theta n}}{\prod_{i=1}^n (x^{\theta+1})}, \tag{15}
 \end{aligned}$$

dari persamaan (15) diperoleh fungsi *log-likelihood* sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \ln L(x; p, \theta) &= \ln \left[\frac{\theta^n p^{\theta n}}{\prod_{i=1}^n (x^{\theta+1})} \right], \\
 &= \ln(\theta^n) + \ln(p^{\theta n}) - \ln \left(\prod_{i=1}^n (x^{\theta+1}) \right), \\
 \ln L(x; p, \theta) &= n \ln(\theta) + n \ln(p) - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan penaksiran parameter θ dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* dilakukan dengan mencari turunan pada persamaan (16) terhadap θ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} (\ln L(x; p, \theta)) &= \frac{\partial}{\partial \theta} (n \ln(\theta) + n \ln(p) - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)), \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} (n \ln(\theta)) + \frac{\partial}{\partial \theta} (n \theta \ln(p)) - \frac{\partial}{\partial \theta} ((\theta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln L(x; p, \theta)) &= \frac{n}{\theta} + n \ln(p) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i),\end{aligned}\quad (17)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan $\hat{\theta}$ dengan metode maksimum *likelihood* maka turunan dari fungsi *likelihood* pada persamaan (17) disamakan dengan nol, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}0 &= \frac{n}{\theta} + n \ln(p) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i), \\ \frac{n}{\theta} &= \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - n \ln(p), \\ \hat{\theta} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i) - n \ln(p)}.\end{aligned}\quad (18)$$

Dari persamaan (18) $\hat{\theta}$ merupakan penaksir parameter θ dari distribusi *Pareto* dengan menggunakan metode maksimum *likelihood* dimana parameter p merupakan parameter skala diketahui konstan.

Selanjutnya diperoleh nilai peluang hidup perorangan dengan distribusi *Pareto* sebagai berikut

$$\begin{aligned}F_{T(x)}(t) &= \frac{F(x+t) - F(x)}{S(x)} \\ &= \frac{\left[1 - \left(\frac{p}{x+t}\right)^\theta\right] - \left[1 - \left(\frac{p}{x}\right)^\theta\right]}{\left(\frac{p}{x}\right)^\theta} \\ &= \frac{\left(\frac{p}{x}\right)^\theta - \left(\frac{p}{x+t}\right)^\theta}{\left(\frac{p}{x}\right)^\theta} \\ F_{T(x)}(t) &= 1 - \left(\frac{x}{x+t}\right)^\theta,\end{aligned}\quad (19)$$

Fungsi $F_{T(x)}(t)$ menyatakan peluang seseorang yang berusia x tahun akan meninggal setelah berusia $x+t$ tahun yang dinotasikan dengan ${}_tq_x$, sehingga persamaan (19) dapat dinyatakan dengan

$${}_tq_x = 1 - \left(\frac{x}{x+t}\right)^\theta.$$

Kemudian diperoleh peluang hidup seseorang yang berusia x tahun hingga t tahun berikutnya menggunakan distribusi *Pareto* sebagai berikut

$${}_tP_x = \left(\frac{x}{x+t}\right)^\theta.$$

Sedangkan peluang hidup seseorang yang berusia y tahun hingga t berikutnya menggunakan distribusi *Pareto* dinyatakan dengan

$${}_tP_y = \left(\frac{y}{y+t}\right)^\theta,$$

Peluang hidup gabungan yang berusia x dan y tahun hingga t berikutnya menggunakan distribusi *Pareto* dinyatakan dengan

$${}_tP_{xy} = \left(\frac{x}{x+t}\right)^\theta \left(\frac{y}{y+t}\right)^\theta.\quad (20)$$

Peluang meninggal tertunda untuk asuransi *joint life* dwiguna diperoleh sebagai berikut

$${}_t|q_{xy} = \left(\frac{x}{x+t}\right)^\theta \left(\frac{y}{y+t}\right)^\theta - \left(\frac{x}{x+t+1}\right)^\theta \left(\frac{y}{y+t+1}\right)^\theta\quad (21)$$

Nilai anuitas asuransi jiwa dwiguna *joint life* menggunakan distribusi *Pareto* didapatkan dengan mensubstitusikan persamaan (20) ke persamaan (6) sehingga diperoleh sebagai berikut

$$\ddot{a}_{xy:n} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \left(\left(\frac{x}{x+t} \right)^\theta \left(\frac{y}{y+t} \right)^\theta \right). \quad (22)$$

Premi tunggal asuransi jiwa dwiguna *joint life* menggunakan distribusi *Pareto* diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (21) ke persamaan (7) sehingga sebagai berikut:

$$A_{xy:n} = R \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \left(\left(\frac{x}{x+t} \right)^\theta \left(\frac{y}{y+t} \right)^\theta - \left(\frac{x}{x+t+1} \right)^\theta \left(\frac{y}{y+t+1} \right)^\theta \right) + Rv^n {}_n p_{xy} \quad (23)$$

Premi tahunan asuransi jiwa dwiguna *joint life* dengan menggunakan distribusi *Pareto* yang dengan mensubstitusikan persamaan (23) dan persamaan (22) ke persamaan (12) sehingga diperoleh sebagai berikut

$$P_{xy:n} = \frac{R \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \left(\left(\frac{x}{x+t} \right)^\theta \left(\frac{y}{y+t} \right)^\theta - \left(\frac{x}{x+t+1} \right)^\theta \left(\frac{y}{y+t+1} \right)^\theta \right) + Rv^n {}_n p_{xy}}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \left(\left(\frac{x}{x+t} \right)^\theta \left(\frac{y}{y+t} \right)^\theta \right)} \quad (24)$$

Contoh: Suami istri yang bekerja dalam satu instansi yang sama bersepakat untuk mengikuti asuransi jiwa dwiguna *joint life*. Saat mengikuti asuransi usia suami 35 tahun dan usia istri 32 tahun dan akan mengikuti masa asuransi selama 20 tahun. Uang pertanggungan nantinya yang akan diterima sebesar Rp20.000.000,00 yang nantinya akan dibayarkan kepada ahli waris ataupun peserta. Tabel mortalita yang digunakan ialah menggunakan TMI 1999 dan menggunakan tingkat bunga sebesar 15 %. Pada makalah ini yang akan ditentukan besar premi tahunan asuransi jiwa dwiguna *joint life* dengan menggunakan distribusi *Pareto*.

Dari contoh kasus di atas diketahui $x = 35, y = 30, n = 10, R = \text{Rp}20.000.000,00, i = 15 \%$.

Selanjutnya mencari peluang hidup dan peluang meninggal tertunda asuransi *joint life* dari TMI 1999 dan dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1: Peluang hidup dan peluang meninggal tertunda asuransi *joint life*

t	${}_t p_{xy}$	${}_t q_{xy}$
0	1	0.450069
1	0.985051	0.014306
2	0.970745	0.013708
3	0.957037	0.01315
4	0.943887	0.01263
5	0.931257	0.012142
6	0.919115	0.011685
7	0.90743	0.011256
8	0.896173	0.010853
9	0.88532	0.010473
10	0.874847	0.010115
11	0.864733	0.009776
12	0.854956	0.009456
13	0.8455	0.009153
14	0.836347	0.008866
15	0.82748	0.008594
16	0.818886	0.008335
17	0.810551	0.008089
18	0.802462	0.007855
19	0.794607	0.007632

Kemudian mencari nilai faktor diskon dengan mensubstitusikan nilai $i = 15 \%$ ke dalam persamaan (9) dan persamaan (10) sehingga diperoleh Tabel 2.

Tabel 1: Nilai faktor diskon

t	v^t	V^{t+1}
0	1	0,869565
1	0,869565	0,756144
2	0,756144	0,657516
3	0,657516	0,571753
4	0,571753	0,497177
5	0,497177	0,432328
6	0,432328	0,375937
7	0,375937	0,326902
8	0,326902	0,284262
9	0,284262	0,247185
10	0,247185	0,214943
11	0,214943	0,186907
12	0,186907	0,162528
13	0,162528	0,141329
14	0,141329	0,122894
15	0,122894	0,106865
16	0,106865	0,092926
17	0,092926	0,080805
18	0,080805	0,070265
19	0,070265	0,0611

Selanjutnya mencari nilai $\hat{\theta}$ yang merupakan penaksir parameter θ , nilai θ diperoleh untuk nilai x sebagai berikut

$$\theta = \frac{20}{79,74662 - 20 \ln(1)}$$

$$\theta = 0,250794,$$

untuk nilai y diperoleh dari persamaan (6) sebagai berikut

$$\theta = 0,25553$$

Setelah nilai θ diperoleh selanjutnya dicari nilai anuitas, premi tunggal dan premi tahunan menggunakan distribusi *Pareto* dengan mensubstitusikan nilai – nilai yang terdapat pada Tabel 1, Tabel 2, ke dalam persamaan (22), persamaan (23) dan persamaan (24) yang disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3: Perhitungan anuitas dan premi tunggal

Anuitas	Premi tunggal	Premi tahunan
6,708378	Rp10.067.198	Rp 1.500.690

5. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan makalah ini, yaitu penentuan premi tunggal dan premi tahunan menggunakan peluang meninggal tertunda. Sehingga premi tahunan untuk asuransi jiwa dwiguna *Joint Life* menggunakan distribusi *Pareto* diperoleh dengan menentukan nilai prameternya. Pembayaran premi tunggal menguntungkan bila dibandingkan premi tahunan .Pembayaran premi akan berhenti apabila dari salah seorang peserta asuransi meninggal dunia serta pembayaran uang pertanggungan segera dibayar oleh pihak asuransi.

6. Daftar Pustaka

- [1] L. J. Bain dan M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition*, Duxbury, Pacific Grove, California, 1992.
- [2] N. Bowers, Hans U Gerber, James C Hickman, Donald A Jones, Cecil J Nesbitt, *Actuarial Mathematics, Second Ed*, The Society Of Actuaries, Schaunburg Illinois, 1997.
- [3] T. Futami, *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian I*, Terj. Seimei Hoken Sugaku, Gekan (92 Revision), oleh G. Herliyanto, Oriental Life Insurane Cultural Development Center, Tokyo, 1993.
- [4] T. Futami, *Matematika Asuransi Jiwa, Bagian II*, Terj. Seimei Hoken Sugaku, Gekan (92 Revision), oleh G. Herliyanto, Oriental Life Insurane Cultural Development Center, Tokyo, 1994.

- [5] S. G. Kellison, *The Theory of Interest*, Richard D. Irwin Inc, Homewood, 1970.
- [6] M. Rytgaard, *Estimation in the Pareto distribution*, Astin Bulletin, 20 (1990), 202-216.
- [7] R. E. Walpole, *Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Eighth Edition*, Pearson Education Internacional, London, 2007.

MODEL LOGIT DAN MODEL PROBIT DALAM CREDIT SCORING MODEL KREDIT MIKRO KOMERSIAL

Anna Chadidjah, Achmad Zanbar Soleh, Rizky Pangaribuan

Departemen Statistika, FMIPA-Unpad,
annachadidjah@gmail.com, a_zanbar@yahoo.com, rizky pangaribuan@yahoo.com

Abstrak

Perbankan perlu mengembangkan suatu sistem yang dapat memonitor atau mengendalikan risiko dalam pemberian kredit kepada calon debitur. Salah satu metode yang dapat digunakan ialah *Credit Scoring Model* untuk mengetahui layak atau tidaknya seorang debitur untuk diberikan pinjaman. Dalam penelitian ini dilakukan perbandingan antara Model Logit dan Probit Model agar dapat dipilih metode yang tepat dalam membentuk *Credit Scoring Model* jenis Kredit Mikro Komersial Bank X. Seleksi variabel dilakukan melalui metode *Proportional Reduction in Uncertainty* (PRU). Dari hasil analisis menggunakan metode PRU, variabel yang terlibat dalam pembentukan *Credit Scoring Model* adalah Plafon, Angsuran, Nilai Likuidasi Agunan, Baki Debet, Status Perkawinan dan Status Debitur. Dari 6 variabel tersebut membentuk 6 kemungkinan *Credit Scoring Model* yang terbentuk dengan variabel penentu yang signifikan adalah Plafon, Baki Debet dan Status Debitur, kemudian dibentuk model menggunakan Model Logit dan Model Probit. Berdasarkan perbandingan nilai *Deviance* diperoleh bahwa kedua model memiliki nilai *deviance* yang relative sama sehingga kedua model dapat dipilih oleh Bank X dalam membentuk *Credit Scoring Model* sesuai kebutuhan Bank X.

Kata Kunci : Risiko kredit, *Credit Scoring Model*, PRU, *Devians*

1. Pendahuluan

Dengan semakin menguatnya pertumbuhan kredit saat ini maka Industri Perbankan harus mengoptimalkan fungsi manajemen risiko dengan baik, salah satunya dalam hal pemberian kredit kepada calon debitur. Salah satu metode yang dapat digunakan ialah *Credit Scoring Model* [4] untuk mengetahui layak atau tidaknya seorang debitur untuk diberikan pinjaman. Dalam penelitian ini dibandingkan antara Model Logit dan Model Probit agar didapat model terbaik dalam menentukan *Credit Scoring Model* yang diaplikasikan pada Kredit Mikro Komersial di Bank X.

2. Model Logit dan Model Probit

Salah satu model regresi yang dapat menggambarkan hubungan antara variabel respons Y diskrit dengan variabel prediktor X adalah Model Logit, yang dapat dinyatakan sebagai berikut Agresti, 2002 [1]:

$$\text{logit}[\pi(x)] = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p \quad (1)$$

Keterangan:

- α : Konstanta dari persamaan
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$: Koefisien dari variabel independen
- x_1, x_2, \dots, x_p : Variabel independen
- p : banyak variabel independen.

Penaksiran parameter dari Persamaan (1) dilakukan dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Sebagaimana diketahui bahwa taksiran parameter melalui MLE adalah menentukan turunan parsial dari fungsi kemungkinan terhadap parameter yang akan ditaksir. Fungsi kemungkinan untuk *Model Logit* (Hosmer D.W. and Lameshow J, 1989 [3]), adalah sebagai berikut :

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(\beta, y) = \left\{ \exp \left[\sum_i y_i \log \frac{\pi(x_i)}{1-\pi(x_i)} \right] \right\} \left\{ \prod_{i=1}^n [1 - \pi(x_i)]^{n_i} \right\} \quad (2)$$

Metode yang digunakan untuk menentukan penaksir kemungkinan maksimum dalam hal ini adalah Metode Newton-Raphson [1]. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan berikut :

$$\frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial \beta} = 0 ,$$

yaitu :

$$\sum_i y_i x_{ij} - \sum_i n_i \hat{\pi}_i x_{ij} = 0 ; j = 1, \dots, p \quad (3)$$

3. Pengujian Signifikansi Parameter

Setelah menaksir parameter, maka langkah selanjutnya yang dilakukan adalah menguji signifikansi parameter. Untuk itu digunakan uji hipotesis statistik untuk menentukan apakah variabel independen dalam model signifikans atau berpengaruh nyata terhadap variabel dependen. Pengujian signifikansi parameter dilakukan sebagai berikut.

3.1. Uji Serempak

Uji serempak dilakukan sebagai upaya untuk memeriksa peranan variabel lindependen dalam model secarasimultan.

- Hipotesis
 $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$, artinya koefisien regresi tidak berarti secara simultan
 H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_i \neq 0$ dengan $i = 1, 2, \dots, p$, artinya koefisien regresi berarti secara simultan.
 $\alpha = 5\%$

- Statistik uji

Statistik uji yang digunakan adalah statistic uji G atau *likelihood ratio test* [1] yaitu:

$$G = -2 \ln \left[\frac{L_0}{L_1} \right] \quad (4)$$

dimana :

L_0 = Likelihood dibawah H_0 atau Likelihood tanpa variable independen

L_1 = Likelihood dibawah H_1 atau Likelihood dengan p variable independen

- Kriteria Pengujian

Statistik uji G mengikuti distribusi χ^2 , sehingga untuk memperoleh keputusan dilakukan perbandingan antara nilai statistic uji G dan nilai χ^2 tabel dengan derajat v (selisih Likelihood) pada taraf signifikan α sehingga kriteria pengujian adalah sebagai berikut:

Tolak H_0 jika nilai $G \geq \chi^2_{(\alpha, v)}$ atau dapat juga disimpulkan tolak H_0 jika $p - value \leq \alpha$.

Model lain yang dapat digunakan adalah Model Probit, yang dinyatakan sebagai berikut [1] :

$$\pi(x) = \Phi(\alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p) \quad (5)$$

Dengan cara yang sama ,untuk menaksir parameternya digunakan penyelesaian untuk persamaan berikut :

$$\sum_i \frac{n_i (y_i - \hat{\pi}_i) x_{ij}}{\hat{\pi}_i (1 - \hat{\pi}_i)} \phi \left(\sum_k \beta_k x_{ik} \right) = 0$$

3.2. Uji Parsial

Digunakan untuk menguji pengaruh setiap β_i secara individu, ketika uji secara serempak bersifat signifikans. Hasil pengujian secara parsial akan menunjukkan apakah suatu variabel independen layak untuk masuk kedalam model atau tidak (Agresti, 2002).

- Hipotesis
 $H_0: \beta_i = 0$, artinya koefisien regresi tidak berarti secara parsial.
 $H_1: \beta_i \neq 0$, artinya koefisien regresi berarti secara parsial.

- Statistik Uji

Statistik uji yang digunakan adalah statistik *uji-Wald* yaitu:

$$W = \frac{\hat{\beta}_i}{SE(\hat{\beta}_i)} \quad (7)$$

- Kriteria Pengujian

Tolak H_0 jika nilai $|W| \geq Z_{\alpha/2}$ atau $p - value \leq \alpha$.

4. Uji Kecocokan Model

Salah satu uji yang digunakan untuk mengevaluasi kecocokan model dengan data adalah uji statistik *Deviance*.

- Hipotesis
 H_0 : Model yang hanya melibatkan intersep cocok dengan data
 H_1 : Model yang diduga cocok dengan data
- Statistik uji yang digunakan [2]

$$Deviance = -2 \ln \left[\frac{L_0}{L_1} \right] \quad (8)$$

dimana

L_0 : fungsi *Likelihood* untuk model di bawah H_0 atau fungsi *Likelihood* untuk model yang hanya dengan intersep.

L_1 : fungsi *Likelihood* untuk model di bawah H_1 atau fungsi *Likelihood* untuk model dengan variabel independen

- Kriteria Pengujian

Statistik uji mendekati distribusi *Chi-Square* dengan derajat bebas v (selisih jumlah parameter dari kedua model) sehingga kriteria pengujiannya adalah

H_0 ditolak jika nilai *Deviance* $\geq \chi^2_{(\alpha, v)}$ atau $p\text{-value} \leq \alpha$

5. Kriteria Pemilihan Model Terbaik

Setelah diuji kecocokan model dari semua kemungkinan model yang terbentuk dari kedua model, selanjutnya akan dipilih model terbaik berdasarkan kriteria berikut ini. Kriteria-kriteria dalam pemilihan model terbaik antara Model Logit dan Model Probit adalah membandingkan nilai dugaan dan amatan melalui perbandingan nilai devians antara Model Logit dan Model Probit. Metode yang memiliki nilai devians lebih kecil menunjukkan bahwa model tersebut merupakan metode terbaik.

6. Hasil dan Pembahasan

Dari hasil penelitian dengan menggunakan metode PRU [5], maka diperoleh variabel signifikans yang menentukan *Credit Scoring* adalah seperti tercantum pada Tabel 1.

Tabel 1: Nilai informasi kumulatif (CI) masing-masing variabel dominan

Tahap	Variabel	CI	Informasi Masing-masing
1	Plafon	17,82%	17,82%
2	Angsuran	31,25%	13,43%
3	Nilai Likuidasi Agunan	40,73%	9,48%
4	Baki Debet	49,08%	8,35%
5	Status Perkawinan	57,05%	7,97%
6	Status Debitur	64,69%	7,65%
7	Lama Usaha	71,98%	7,29%
8	Jenis Kepemilikan Agunan	79,13%	7,14%
9	Tujuan Penggunaan Kredit	86,10%	6,97%
10	Usia	93,05%	6,95 %
11	THP	100%	6,95%

Berdasarkan Tabel 1, diketahui besarnya masing-masing kontribusi variabel dominan terhadap pemberian Kredit Mikro Komersial kepada calon debitur yang dilakukan oleh Bank X. Terpilihnya Variabel Plafon pada tahap pertama proses pemilihan variabel dominan memberikan informasi bahwa Bank X menjadikan Variabel Plafon sebagai prioritas utama dalam proses pemberian kredit kepada calon debitur dengan sumbangan informasi sebesar 17,82%. Jadi, hal pertama yang harus diperhatikan oleh Bank X dalam pemberian kredit kepada calon debitur adalah penentuan besarnya nilai pinjaman maksimal yang diberikan oleh Bank itu sendiri. Variabel Angsuran merupakan variabel dominan yang memberikan sumbangan informasi terbesar kedua sebesar 13,43%. Variabel Nilai Likuidasi Agunan merupakan variabel dominan yang memberikan sumbangan informasi terbesar ketiga sebesar 9,48% dan begitu seterusnya hingga variabel yang memberikan sumbangan informasi terendah sebesar 6,95% diperoleh dari dua variabel yaitu variabel Usia dan variabel *Take Home Pay*.

Urutan besarnya sumbangan informasi dari tiap variabel dominan menjadi landasan dalam membentuk *Credit Scoring Model* menggunakan metode Model Logit dan Model Probit. Selanjutnya akan dibentuk *Credit Scoring Model*. Variabel-variabel dominan tersebut merupakan variabel independen yang diperkirakan berpengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas yang merupakan variabel dependen dalam penelitian ini. Kemudian variabel Tingkat Kolektibilitas yang dibentuk dalam dua kelompok yaitu Kelompok PL (Debitur yang memiliki nilai kolektibilitas 1 dan 2) dan Kelompok NPL (Debitur yang memiliki nilai kolektibilitas 3,4 dan 5) diregresikan terhadap variabel-variabel dominan tersebut. *Credit Scoring Model* yang mungkin terbentuk berdasarkan informasi dari Tabel 1 adalah sebagai berikut.

Tabel 2: Kombinasi Variabel yang terbentuk

No	<i>Credit Scoring Model</i> yang terbentuk	CI (%)
1	$Y = \alpha + \beta_1 X_2$	17,82%
2	$Y = \alpha + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3$	31,25%
3	$Y = \alpha + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3 + \beta_3 X_5$	40,73%
4	$Y = \alpha + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3 + \beta_3 X_5 + \beta_4 X_4$	49,08%
5	$Y = \alpha + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3 + \beta_3 X_5 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_{10}$	57,05%
6	$Y = \alpha + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3 + \beta_3 X_5 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_{10} + \beta_6 X_8$	64,69%

Dari Tabel 2, diketahui bahwa banyak variabel yang digunakan dalam membentuk *Credit Scoring Model* sebanyak 6 variabel yaitu Plafon, Angsuran, Nilai Likuidasi Agunan, Baki Debet, Status Perkawinan dan Status Debitur. Pemilihan 6 variabel tersebut karena setelah variabel dominan terpilih keenam, masing-masing variabel tersebut hampir memiliki persentase kontribusi yang sama bahkan variabel Usia dan THP memiliki kontribusi yang sama sebesar 6,95% sehingga variabel-variabel yang hampir memiliki persentase kontribusi yang sama dan bahkan memiliki persentase kontribusi yang sama tidak diikutsertakan dalam pembentukan *Credit Scoring Model*. Jadi, dengan keenam variabel tersebut sudah memberikan sumbangan informasi sebesar 64,69%.

Selanjutnya dengan MLE didapat nilai taksiran parameter untuk *Model Logit* dan *Probit Model* berturut-turut dapat dilihat pada Tabel 3 dan Tabel 4 berikut ini.

Tabel 3: Taksiran Parameter *Credit Scoring Model* untuk Model Logi

Model	Taksiran Parameter model
1	$\text{logit}[\pi(x)] = -8,763 - 1,025e^{-09}X_2$
2	$\text{logit}[\pi(x)] = -8,637 - 1,190e^{-08}X_2 + 4,754e^{-08}X_3$
3	$\text{logit}[\pi(x)] = -8,637 - 1,190e^{-08}X_2 + 4,754e^{-08}X_3 + 3,334e^{-12}X_5$
4	$\text{logit}[\pi(x)] = -6,728 - 2,753e^{-07}X_2 - 5,453e^{-10}X_3 - 8,258e^{-12}X_5 + 2,939e^{-07}X_4$
5	$\text{logit}[\pi(x)] = -5,834 - 2,748e^{-07}X_2 - 5,383e^{-10}X_3 - 7,904e^{-12}X_5 + 2,936e^{-07}X_4 - 15,43D_1X_{10} - 0,8857D_2X_{10}$
6	$\text{logit}[\pi(x)] = -6,576 - 2,378e^{-07}X_2 + 7,059e^{-11}X_3 - 4,932e^{-12}X_5 + 2,558e^{-07}X_4 - 15,16D_1X_{10} - 0,6095D_2X_{10} + 2,255D_1X_8$

Tabel 4: Taksiran Parameter *Credit Scoring Model* untuk Model Probit

Model	Taksiran Parameter model
1	$\text{probit}[\pi(x)] = -3,604 - 2,718e^{-10}X_2$
2	$\text{probit}[\pi(x)] = -3,595 - 2,741e^{-09}X_2 + 1,505e^{-08}X_3$
3	$\text{probit}[\pi(x)] = -3,595 - 2,741e^{-09}X_2 + 1,505e^{-08}X_3 + 3,245e^{-13}X_5$
4	$\text{probit}[\pi(x)] = -3,100 - 7,201e^{-08}X_2 - 1,516e^{-10}X_3 - 3,292e^{-12}X_5 + 7,941e^{-08}X_4$
5	$\text{probit}[\pi(x)] = -2,823 - 7,223e^{-08}X_2 - 1,502e^{-10}X_3 - 3,175e^{-12}X_5 + 7,978e^{-08}X_4 - 3,698D_1X_{10} - 0,2766D_2X_{10}$
6	$\text{probit}[\pi(x)] = -3,062 - 6,362e^{-08}X_2 + 5,387e^{-10}X_3 - 2,081e^{-12}X_5 + 7,085e^{-08}X_4 - 3,583D_1X_{10} - 0,1705D_2X_{10} + 0,7347D_1X_8$

Selanjutnya dilakukan uji serempak sebagai upaya memeriksa peranan variabel independen dalam model secara simultan. Berikut hasil pengujian signifikansi parameter secara serempak menggunakan uji rasio *likelihood*, sehingga diperoleh hasil seperti tercantum pada Tabel 5.

Tabel 5. Uji rasio *likelihood* untuk Model Logit

Model	G	$\chi^2_{\alpha,v}$	Sig.	Keputusan
1	0,00165	0,004	0,8977	Terima H_0
2	14,064	0,103	0,001	Tolak H_0
3	14,064	0,352	0,003	Tolak H_0
4	74,401	0,711	0,000	Tolak H_0
5	78,697	1,64	0,000	Tolak H_0
6	96,987	2,17	0,000	Tolak H_0

Berdasarkan Tabel 5 diatas, diperoleh uji rasio *likelihood* untuk model 1-6 menggunakan Persamaan (6). Dari tabel tersebut, diketahui bahwa model 1 yang hanya mengandung variabel independen Plafon memiliki nilai statistik uji G sebesar $0,0165 < \chi^2_{\alpha,v} = 0,103$ dan $p - value = 0,8977 > \alpha = 0,05$ yang berarti menerima H_0 . Hal ini menyimpulkan bahwa model 1 yang hanya mengandung variabel independen Plafon tidak berarti atau tidak memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur. Sedangkan untuk model 2,3,4,5 dan 6 memiliki nilai statistik uji $G > \chi^2_{\alpha,v}$ dan $p - value < \alpha = 0,05$ yang berarti menolak H_0 . Hal ini menyimpulkan bahwa model 2, 3, 4, 5 dan 6 mempunyai minimal satu variabel independen yang berarti atau berpengaruh signifikan terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur.

Dengan langkah analisis yang sama, berikut hasil pengujian signifikansi parameter secara serempak untuk Model Probit, didapat hasil seperti pada Tabel 6.

Tabel 6. Uji rasio *likelihood* untuk Model Probit

Model	G	$\chi^2_{\alpha,v}$	Sig.	Keputusan
1	0,00169	0,004	0,8965	Terima H_0
2	15,904	0,103	0,000	Tolak H_0
3	15,904	0,352	0,001	Tolak H_0
4	76,521	0,711	0,000	Tolak H_0
5	80,974	1,64	0,000	Tolak H_0
6	100,64	2,17	0,000	Tolak H_0

Dari hasil uji rasio *likelihood* untuk Model Probit diperoleh hasil yang sama dengan Model Logit. Hal ini dapat dilihat bahwa uji rasio *likelihood* model 1 menerima H_0 yang berarti variabel independen dalam model 1 tidak berarti atau tidak memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas. Sedangkan uji rasio *likelihood* untuk model 2, 3, 4, 5 dan 6 menolak H_0 yang berarti model 2, 3, 4, 5 dan 6 mempunyai minimal satu variabel independen yang berarti atau berpengaruh signifikan terhadap Tingkat Kolektibilitas.

Selanjutnya, untuk mengetahui variabel independen mana yang berpengaruh dari model 2, 3, 4, 5 dan 6 dengan Model Logit dan Model Probit, maka dilakukan pengujian signifikansi parameter secara parsial. Adapun hasilnya dapat dilihat pada Tabel 7 dan Tabel 8.

Tabel 7: Uji *Wald* untuk Model Logit

Model	Variabel	Wald	$Z_{0,025}$	Sig.	Keputusan
1	Plafon (X_2)	-0,128	1,96	0,898	Terima H_0
2	Plafon (X_2)	-1,217	1,96	0,224	Terima H_0
	Angsuran (X_3)	5,011	1,96	$5,4e^{-07}$	Tolak H_0
3	Plafon (X_2)	-1,217	1,96	0,224	Terima H_0
	Angsuran (X_3)	5,011	1,96	$5,4e^{-07}$	Tolak H_0
	Nilai Likuidasi Agunan (X_5)	0,024	1,96	0,981	Terima H_0
4	Plafon (X_2)	-5,001	1,96	$5,69e^{-07}$	Tolak H_0
	Angsuran (X_3)	-0,056	1,96	0,956	Terima H_0
	Nilai Likuidasi Agunan (X_5)	-0,066	1,96	0,947	Terima H_0
	Baki Debet (X_4)	5,433	1,96	$5,53e^{-08}$	Tolak H_0
5	Plafon (X_2)	-4,982	1,96	$6,29e^{-07}$	Tolak H_0
	Angsuran (X_3)	-0,055	1,96	0,956	Terima H_0
	Nilai Likuidasi Agunan (X_5)	-0,067	1,96	0,947	Terima H_0
	Baki Debet (X_4)	5,414	1,96	$6,18e^{-08}$	Tolak H_0
	Status Perkawinan duda/janda (D_1X_{10})	-0,022	1,96	0,982	Terima H_0
	Status Perkawinan Kawin (D_2X_{10})	-1,194	1,96	0,232	Terima H_0

Model	Variabel	Wald	$Z_{0,025}$	Sig.	Keputusan
6	Plafon (X_2)	-4,982	1,96	$9,73e^{-06}$	Tolak H_0
	Angsuran (X_3)	-0,055	1,96	0,994	Terima H_0
	Nilai Likuidasi Agunan (X_5)	-0,067	1,96	0,964	Terima H_0
	Baki Debet (X_4)	5,414	1,96	$1,52e^{-06}$	Tolak H_0
	Status Perkawinan duda/janda (D_1X_{10})	-0,022	1,96	0,983	Terima H_0
	Status Perkawinan Kawin (D_2X_{10})	-1,194	1,96	0,415	Terima H_0
	Status Debitur lama (D_1X_8)	4,986	1,96	$6,16e^{-07}$	Tolak H_0

Dari hasil analisis tersebut diperoleh kesimpulan untuk masing-masing model, yaitu:

1. Variabel Plafon yang terdapat dalam model 1 tidak berarti atau tidak memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur.
2. Variabel Angsuran yang terdapat dalam model 2 berarti atau memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur tetapi Variabel Plafon tidak memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur.
3. Variabel Angsuran yang terdapat dalam model berarti atau memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur tetapi Variabel Plafon dan Nilai Likuidasi Agunan tidak memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur.
4. Variabel Plafon dan Baki Debet yang terdapat dalam model 4 berarti atau memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur tetapi Variabel Angsuran dan Nilai Likuidasi Agunan tidak memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur.
5. Variabel Plafon dan Baki Debet yang terdapat dalam model 5 berarti atau memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur tetapi Variabel Angsuran, Nilai Likuidasi Agunan, Status Perkawinan duda/janda dan Status Perkawinan Kawin tidak memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur.
6. Variabel Plafon, Baki Debet dan Status Debitur Lama yang terdapat dalam model 6 berarti atau memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur tetapi Variabel Angsuran, Nilai Likuidasi Agunan, Status Perkawinan duda/janda dan Status Perkawinan Kawin tidak memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas calon debitur.

Adapun untuk Model Probit didapat hasil seperti tercantum pada Tabel 8.

Tabel 8: Uji Wald untuk Model Probit

Model	Variabel	Wald	$Z_{0,025}$	Sig.	Keputusan
1	Plafon (X_2)	-0,131	1,96	0,896	Terima H_0
2	Plafon (X_2)	-1,112	1,96	0,266	Terima H_0
		5,230	1,96	$1,7e^{-07}$	
3	Angsuran (X_3)	-1,112	1,96	0,266	Tolak H_0
	Plafon (X_2)	5,230	1,96	$1,7e^{-07}$	Terima H_0
	Angsuran (X_3)	0,007	1,96	0,994	Tolak H_0
4	Nilai Likuidasi Agunan (X_5)	-4,896	1,96	$9,77e^{-07}$	Terima H_0
	Plafon (X_2)	-0,047	1,96	0,963	Tolak H_0
	Angsuran (X_3)	-0,080	1,96	0,936	Terima H_0
	Nilai Likuidasi Agunan (X_5)	5,430	1,96	$5,62e^{-08}$	Terima H_0
5	Baki Debet (X_4)	-4,876	1,96	$1,08e^{-06}$	Tolak H_0
	Plafon (X_2)	-0,046	1,96	0,963	Tolak H_0
	Angsuran (X_3)	-0,082	1,96	0,935	Terima H_0
	Nilai Likuidasi Agunan (X_5)	5,411	1,96	$6,28e^{-08}$	Terima H_0
	Baki Debet (X_4)	-0,025	1,96	0,980	Tolak H_0
	Status Perkawinan duda/janda (D_1X_{10})	-1,237	1,96	0,216	Terima H_0
6	Status Perkawinan Kawin (D_2X_{10})	-4,321	1,96	$1,56e^{-05}$	Terima H_0
	Plafon (X_2)	0,162	1,96	0,871	Tolak H_0
	Angsuran (X_3)	-0,060	1,96	0,952	Terima H_0
	Nilai Likuidasi Agunan (X_5)	4,798	1,96	$1,60e^{-06}$	Terima H_0
	Baki Debet (X_4)	-0,025	1,96	0,980	Tolak H_0
	Status Perkawinan duda/janda (D_1X_{10})	-0,691	1,96	0,489	Terima H_0
	Status Perkawinan Kawin (D_2X_{10})	5,054	1,96	$4,33e^{-07}$	Terima H_0
	Status Debitur lama (D_1X_8)				Tolak H_0

Dari Tabel 8, diperoleh hasil uji *wald* untuk Model Probit pada model 1-6 menggunakan Persamaan (7). Dari hasil analisis tersebut, dapat dilihat bahwa nilai statistik uji *wald* dan nilai *p-value* dari Model Probit tidak jauh berbeda dengan nilai yang dihasilkan dari Model Logit yang terdapat pada Tabel 7. Dengan demikian, hasil analisis yang diperoleh dengan Model Probit menghasilkan kesimpulan yang sama untuk semua model dengan hasil analisis yang diperoleh melalui Model Logit.

Selanjutnya akan dipilih model terbaik antara Model Logit dan Model Probit dengan membandingkan nilai dugaan dan amatan melalui perbandingan nilai *Deviance* antara Model Logit dan Model Probit. Model yang memiliki nilai *Deviance* lebih kecil menunjukkan bahwa model tersebut merupakan metode terbaik. Berikut perbandingan nilai *Deviance* antara Model Logit dan Model Probit.

Tabel 9. Perbandingan nilai *Deviance* antara Model Logit dan Model Probit

Model Logit		Model Probit	
Model	Deviance	Model	Deviance
1	489,862	1	489,8616
2	475,8147	2	473,9743
3	475,8142	3	473,9742
4	415,4772	4	413,3574
5	411,1812	5	408,9041
6	392,8913	6	389,2372

Dari Tabel 9 nampak bahwa nilai *Deviance* dari kedua model relatif sama sehingga kedua model sama baiknya dalam membentuk *Credit Scoring Model*. Dengan demikian, Bank X dapat menggunakan Model Logit dan Model Probit dalam membentuk *Credit Scoring Model* jenis Kredit Mikro Komersial sesuai dengan kebutuhan dari Bank X.

Dari Tabel 9 juga dapat dilihat bahwa model yang paling tepat digunakan dalam menyeleksi tahap pengajuan calon debitur berikutnya pada Kredit Mikro Komersial Bank X adalah model 6 karena dari semua kemungkinan *Credit Scoring Model* yang terbentuk menggunakan Model Logit dan Model Probit, model 6 memiliki nilai *Deviance* yang paling kecil dibandingkan dengan model yang lainnya. Tetapi, variabel independen dalam model 6 tidak semuanya memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas. Oleh karena itu, untuk mendapatkan model yang tepat variabel independen yang memiliki pengaruh terhadap Tingkat Kolektibilitas pada model 6 yaitu Plafon, Baki Debet dan Status Debitur diregresikan lagi terhadap Tingkat Kolektibilitas, sehingga didapat model berikut :

$$\text{logit}[\pi(x)] = -7,216 - 2,383e^{-07}X_2 + 2,561e^{-07}X_4 + 2,288D_1X_8$$

Untuk interpretasi dari persamaan Model Logit dapat menggunakan *odds ratio*.

Dengan langkah yang sama berikut hasil regresi antara Plafon, Baki Debet dan Status Debitur terhadap Tingkat Kolektibilitas menggunakan Model Probit dengan software R 3.0.3 didapat model berikut :

$$\text{probit}[\pi(x)] = -3,253 - 6,414e^{-08}X_2 + 7,136e^{-08}X_4 + 0,74D_1X_8$$

Selanjutnya, akan dicari ketepatan klasifikasi dari Model Logit dan Model Probit. Berikut hasil ketepatan klasifikasi masing-masing model menggunakan software R 3.0.3 didapat sebagai berikut :

Tabel 10. Ketepatan Klasifikasi Model

Model	Ketepatan Klasifikasi
Model Logit	95,08 %
Model Probit	95,24 %

Berdasarkan Tabel 10, diketahui Ketepatan Klasifikasi dengan Model Logit maupun Model Probit memiliki akurasi ketepatan yang hampir sama. Hal ini semakin menegaskan bahwa kedua model sama baiknya dalam membentuk *Credit Scoring Model* jenis Kredit Mikro Komersial pada Bank X.

7. Simpulan

Dari hasil analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa :

1. Model yang paling tepat digunakan dalam menyeleksi tahap pengajuan calon debitur berikutnya pada Kredit Mikro Komersial Bank X menggunakan Model Logit adalah sebagai berikut :

$$\text{logit}[\pi(x)] = -7,216 - 2,383e^{-07}X_2 + 2,561e^{-07}X_4 + 2,288D_1X_8$$

Sedangkan model yang paling tepat untuk Model Probit adalah sebagai berikut:

$$\text{probit}[\pi(x)] = -3,253 - 6,414e^{-08}X_2 + 7,136e^{-08}X_4 + 0,74D_1X_8$$

2. Perbandingan model yang dipakai oleh Bank X yaitu Model Logit dan model yang diajukan oleh peneliti yaitu Model Probit menghasilkan nilai *deviance* yang relative sama, sehingga kedua metode dapat dipilih oleh Bank X dalam membentuk *Credit Scoring Model* sesuai kebutuhan Bank X.

8. Saran

Adapun saran yang diusulkan :

1. Dalam menentukan *Credit Scoring Model*, sebaiknya Bank melakukan seleksi terhadap 14 variabel yang ada.
2. Lakukan kajian seleksi variabel melalui PRU secara inferens

Daftar Pustaka

- [1] Agresti, A. 2002. *Categorical Data Analysis* Second Edition. New York: John Wiley and Sons, Inc. USA.
- [2] Annette J Dobson, 2002, *An Introduction to Generalized Linear Models*, Second Edition, Chapman & Hall CRC.
- [3] Hosmer, D. W., and Lemeshow, S. 1989. *Applied Logistic Regression*. New York: John Wiley & Sons.
- [4] Sanders, A and L. Allen, 2002, *Credit Risk Measurement : New Approaches to Value At Risk and Other Paradigms*, New York : John Willey and Sons.
- [5] Siregar, PPM, A.Z Soleh dan R.S Pontoh, 2009, *Seleksi Variabel Kualitatif melalui Proportional Reduction in Uncertainty*, Bandung, Jurusan Statistika, FMIPA, Unpad

PENGGUNAAN *SOFTWARE CABRI 3D* DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA UPAYA MENINGKATKAN KEMAMPUAN VISUALISASI SPASIAL MATEMATIS SISWA

Alpha Galih Adirakasiwi

*Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Singaperbangsa Karawang
alphagalih1988@gmail.com*

Abstract

This research purpose of this article is to know the increase of the ability of spasioal visualization mathematical based on the learning software cabri on 3D material. Research method used is quasi experiment with group design control post. The experimental units is two classes which use learning with software cabri 3D, and conventional learning. The subject of this research is thirty students class XI SMK in Karawang. Instrument used to measure mathematical spasioal visualization ability is written test in explanation form. The result of data analysis shows that learning with using software cabri 3D gave influence to the increasing of mathematical communication ability on three dimension material.

Keywords: Ability Mathematic Communication, Software Cabri 3D

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui peningkatan kemampuan visualisasi spasial matematis melalui pembelajaran *software cabri 3D* pada materi dimensi tiga. Metode penelitian yang digunakan adalah metode penelitian quasi eksperimen dengan disain kelompok kontrol postes. Unit-unit eksperimen dilakukan di dua kelas yang masing-masing menggunakan pembelajaran dengan *software cabri 3D*, dan pembelajaran konvensional. Subjek penelitian adalah 30 orang siswa kelas XI SMK di kota Karawang. Instrumen yang digunakan untuk mengukur kemampuan visualisasi spasial matematis berupa tes tertulis bentuk uraian. Hasil analisis data menunjukkan bahwa pembelajaran dengan menggunakan *software cabri 3D* memberikan pengaruh berupa peningkatan terhadap kemampuan visulisasi spasial matematis pada materi dimensi tiga.

Kata Kunci: Kemampuan Komunikasi Matematik, *Software Cabri 3D*

1. Pendahuluan

Kemampuan visualisasi spasial adalah kemampuan memahami, memproses, dan berpikir dalam bentuk visualisasi. Siswa dengan kecakapan ini mampu menerjemahkan bentuk gambaran dalam pikirannya ke dalam bentuk dua atau tiga dimensi. Kemampuan visualisasi spasial merupakan salah satu aspek dari kognisi. Kemampuan visualisasi spasial merupakan konsep abstrak yang meliputi persepsi spasial yang melibatkan hubungan spasial termasuk orientasi sampai pada kemampuan yang rumit yang melibatkan manipulasi geometri.

Dalam geometri siswa dituntut untuk mempunyai kemampuan menggambar baik itu gambar bangun datar maupun bangun ruang. Dalam hal inilah kemampuan visualisasi spasial juga terlibat dalam matematika. Kemampuan visualisasi spasial merupakan konsep abstrak yang meliputi persepsi spasial yang melibatkan hubungan spasial termasuk mental. Dalam kemampuan visualisasi spasial diperlukan adanya pemahaman perspektif, bentuk-bentuk geometris, menghubungkan konsep spasial dengan angka dan kemampuan dalam transformasi mental dari bayangan visualisasi. Pada usia sekolah kemampuan visualisasi spasial ini sangat penting karena kemampuan visualisasi spasial erat hubungannya dengan aspek kognitif secara umum.

Seiring dengan perkembangan IPTEK (Ilmu Pengetahuan dan Teknologi), Perkembangan teknologi informasi saat ini telah menjadi pusat perhatian di berbagai bidang kehidupan, salah satunya yakni

bidang pendidikan. Pengaplikasian teknologi informasi bagi dunia pendidikan adalah sebuah tantangan yang nyata dan faktual. Tidak ada alasan untuk menolaknya, karena TIK atau *ICT (Information and Communication Technologies)* telah menjadi program wajib pemerintah. Departemen Pendidikan Nasional dan Departemen Agama bahkan telah mewajibkan semua sekolah yang berada dibawahnya untuk mengajarkan materi TIK atau *ICT*. Lembaga pendidikan harus menghasilkan sumber daya manusia yang berkualitas yang mampu memenuhi tuntutan permintaan pasar tenaga kerja yang cenderung berkembang sejalan dengan perkembangan teknologi.

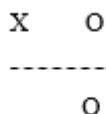
Dengan hadirnya *ICT* dalam dunia pendidikan bisa membawa dampak positif untuk meningkatkan kualitas pembelajaran. Penggunaan *ICT* pada pembelajaran disekolah telah menjadi salah satu pilihan untuk menyampaikan konsep yang bersifat abstrak menjadi lebih konkrit. Seperti halnya, dalam pembelajaran matematika berfungsi untuk menyampaikan konsep yang bersifat abstrak menjadi lebih konkrit. Dengan adanya kehadiran perangkat komputer sebagai media pembelajaran matematika. Salah satu penggunaan komputer dalam pembelajaran matematika adalah *software* cabri 3D. *software* Cabrie 3D merupakan alat peraga yang berbasis IT yang dapat memudahkan siswa dalam menggambarkan bangun tiga dimensi yang ukurannya seperti benda asli. Melalui *software* Cabri 3D diharapkan dapat mendorong siswa agar termotivasi untuk mempelajari matematika khususnya geometri.

Berkaitan dengan hal tersebut, profil guru atau pendidik yang diharapkan adalah pendidik yang mampu memberikan pembelajaran yang menarik kepada setiap siswa yang disertai dengan seiring perkembangan teknologi dan informasi di bidang pendidikan. Untuk itu, para pendidik harus merancang strategi yang sesuai. Berdasarkan kenyataan di atas, maka melakukan penelitian ilmiah dengan mengambil judul : “Penggunaan *Software Cabri 3D* Dalam Pembelajaran Matematika Upaya Meningkatkan Kemampuan Visualisasi Spasial Matematis (Studi Eksperimen di Sekolah Menengah Kejuruan (SMK) di Kabupaten Karawang)”

Mengacu pada masalah yang telah dirumuskan, maka tujuan dari dari penelitian ini adalah menelaah kemampuan visualisasi spasial matematis siswa dengan menggunakan *software* cabri 3D. penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi berbagai kalangan. Terutama pada guru SMA/SMK/Sederajat. Sehingga guru dapat menggunakan alat peraga berbasis IT untuk merangsang siswa dalam meningkatkan kemampuan visualisasi spasial dalam geometri.

2. Metode Penelitian

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kuantitatif. Pada kuasi eksperimen ini, subjek tidak dikelompokkan secara acak, tetapi peneliti menerima keadaan subjek apa adanya, (Ruseffendi, 2003). Metode penelitian yang digunakan adalah metode penelitian kuasi eksperimen dengan disain kelompok kontrol postes. Unit-unit eksperimen dilakukan di dua kelas yang masing-masing menggunakan pembelajaran dengan *software cabri 3D* dan pembelajaran konvensional. Dengan demikian disain eksperimen yang dipilih adalah sebagai berikut :



Gambar 1. Bagan Desain penelitian

Keterangan :

X : Perlakuan pada kelompok eksperimen dengan menggunakan *software cabri 3D*

O : Pemberian tes akhir kemampuan pada kedua kelas

----- : Subjek tidak dipilih secara acak

Metode pengumpulan data yang digunakan adalah metode observasi, metode angket dan metode tes. Sedangkan instrument penelitian yang dipakai oleh peneliti adalah lembar pengamatan aktivitas guru, lembar pengamatan aktivitas siswa, lembar tes kemampuan visualisasi spasial matematis siswa, dan angket respon siswa terhadap pembelajaran *software cabri 3D*.

3. Hasil Dan Pembahasan

Desain penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Post Test Only Control Group Design* yaitu desain penelitian yang hanya mengukur pasca perlakuan dan melibatkan kelompok kontrol. Alasan digunakannya desain tersebut didasarkan pada hasil beberapa penelitian terhadap kemampuan visualisasi spasial yang umumnya rendah. Adapun untuk mengetahui apakah sampel-sampel penelitian ini berasal dari populasi yang kemampuan awal matematikanya sama, peneliti menggunakan data nilai hasil ulangan

harian materi sebelumnya pada semester II. Deskripsi data nilai ulangan harian dari kedua kelompok disajikan pada Tabel 1 berikut ini

Tabel 1: Skor Terendah, Skor tertinggi, Rata-rata dan Simpangan Baku Kemampuan Awal Matematis Siswa

Pembelajaran	SMI	X_{\min}	X_{\max}	\bar{X}	s
Eksperimen	100	33	94	67,13	15,005
Kontrol	100	33	98	62,53	20,188

Dari Tabel 1 tampak bahwa skor rata-rata kedua kelompok tidak berbeda signifikan. Skor rata-rata pembelajaran software cabri 3D sebesar 67,13 (67,13% dari skor ideal), dan pembelajaran konvensional sebesar 62,53 (62,53% dari skor ideal). Dengan demikian dapat dikatakan bahwa tidak ada perbedaan kemampuan awal matematik siswa antara kelas eksperimen dan kelas kontrol. Untuk memperkuat deskripsi kesamaan kemampuan awal matematik siswa maka dilakukan analisis data melalui uji statistik dengan menggunakan uji kesamaan dua rata-rata. Dapat dilihat pada Tabel 2 di bawah ini

Tabel 2: Uji Persyaratan Kemampuan Awal Matematis Siswa

Jenis Uji	Kelompok	
	Eksperimen	Kontrol
Normalitas	Sig = 0,200 <i>sig</i> > 0.05	Sign = 0,113 <i>sig</i> > 0.05
Kesimpulan	Normal	Normal
Homogenitas	0,103 <i>sig</i> > 0.05	
Kesimpulan	Homogen	

Setelah skor dinyatakan normal dan homogen maka selanjutnya dilakukan uji kesamaan dua rata-rata dengan menggunakan uji t pada $\alpha = 0,05$ dengan kriteria pengujian : terima H_0 , jika *sig* > $\alpha = 0,05$ pada keadaan lain tolak H_0 . Berikut hasil perhitungan uji kesamaan dua rata-rata menggunakan SPSS. 17

Tabel 3: Uji Kesamaan Dua Rata-rata Kemampuan Awal Matematis Siswa

Kemampuan Awal Matematis	t-test for quality of means		
	Uji T	df	Sig 2 tailed
Equal variances assumed	1,002	58	.321
Equal variances assumed	1,002	53,549	.321

Dari Tabel 3 di atas tampak bahwa nilai *sig* = 0,321 atau dengan kata lain *sig* > $\alpha = 0,05$ artinya H_0 ditolak. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa tidak ada perbedaan yang signifikan antara kemampuan awal matematik kedua kelompok.

Tabel 4: Uji Persyaratan Kemampuan Visualisasi Spasial Matematis Siswa

Jenis Uji	Pembelajaran	
	Software Cabri 3D	Konvensional
Normalitas	Sig = 0,259 <i>sig</i> > 0.05	Sign = 0,277 <i>sig</i> > 0.05
Kesimpulan	Normal	Normal
Homogenitas	0,448 <i>sig</i> > 0.05	
Kesimpulan	Homogen	

Terlihat pada postes kemampuan visualisasi spasial matematik siswa dinyatakan normal dan homogen. Berikutnya uji kesamaan dua rata-rata dapat dilihat pada tabel 5 berikut ini

Tabel 5: Uji Kesamaan Dua Rata-rata Kemampuan Visualisasi Spasial Matematis Siswa

Kemampuan Visualisasi Spasial Matematis	t-test for quality of means		
	Uji T	df	Sig 2 tailed
Equal variances assumed	6.334	58	.000
Equal variances assumed	6.334	56.280	.000

Berdasarkan Tabel 5 terlihat nilai $sig. = 0,000 < 0,05$, ini berarti H_0 ditolak. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa kemampuan visualisasi spasial matematis siswa SMK yang mengikuti pembelajaran dengan software cabri 3D lebih baik dibandingkan yang mengikuti pembelajaran konvensional.

3.1. Respon Siswa terhadap Pembelajaran Software Cabri 3D

Pemberian skala pendapat kepada siswa dalam penelitian ini berdasarkan sikap afektif yang bertujuan untuk mengetahui pendapat siswa terhadap pembelajaran *software cabri 3D*. Skala pendapat ini terdiri dari 20 pernyataan yang terbagi atas 10 pernyataan positif dan 10 pernyataan negatif.

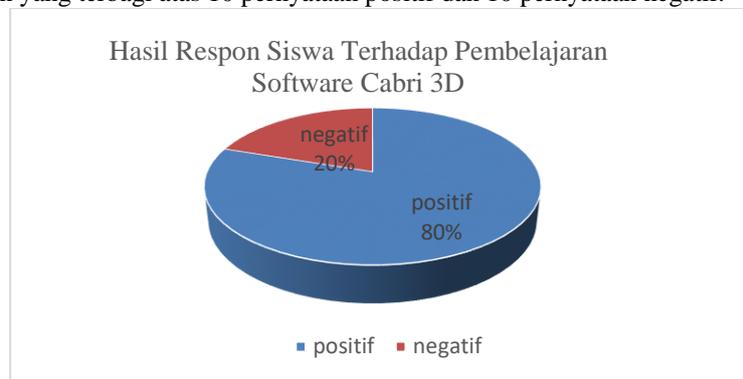


Diagram 1. Hasil Aktivitas Guru Pada Pembelajaran *Software Cabri 3D*

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa siswa menyatakan sikap positif terhadap pembelajaran dengan menggunakan software cabri 3D yang diberikan. Siswa menyatakan merasa terbantu dengan adanya media pembelajaran yang berupa *software* khususnya geometris dan mengubah pelajaran matematika menjadi menarik.

3.2. Analisis Lembar Observasi Aktivitas Guru

Pengamat mengisi lembar observasi sesuai dengan keadaan yang sebenarnya karena peneliti sudah menjelaskan komponen yang ada dalam lembar observasi dan bagaimana cara mengisi lembar observasi tersebut, serta tidak ada unsur paksaan dalam proses pengisiannya.

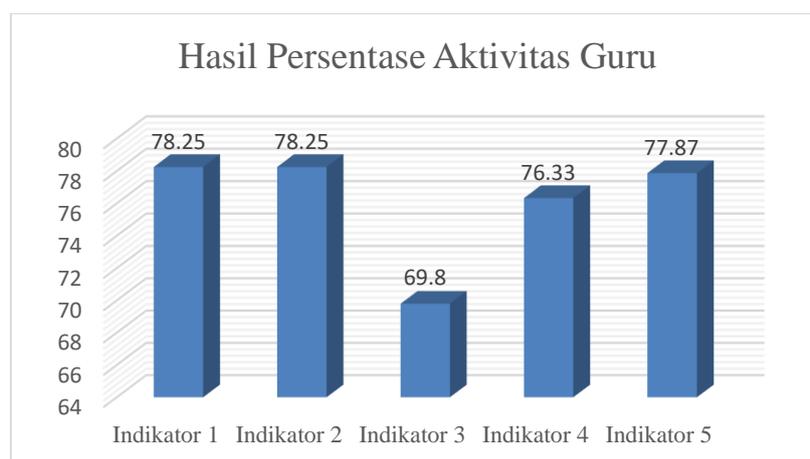


Diagram 2. Hasil Aktivitas Guru Pada Pembelajaran *Software Cabri 3D*

Hasil observasi aktivitas guru dalam proses pembelajaran matematika dengan menggunakan software cabri 3D secara keseluruhan pada semua aspek aktivitas guru yang diamati sudah dari 70% hanya saja untuk indikator 3 mendapatkan 69,8 %. Indikator 1 yang mendapatkan 78,25% meliputi mempersiapkan alat/bahan untuk proses pembelajaran. Selanjutnya yang mendapatkan 78,25% meliputi indikator 2 memusatkan perhatian siswa terhadap materi yang akan dipelajari. Dan yang mendapatkan 69,8 % adalah indikator 3 Perhatian guru terhadap siswa. Kemudian yang mendapatkan 76,33 % adalah indikator 4 yaitu guru sebagai motivator dan indikator 5 guru sebagai fasilitator mendapat 77,87%

3.3. Analisis Lembar Observasi Aktivitas Siswa

Adapun lembar observasi aktivitas siswa dengan menggunakan pembelajaran software cabri 3D untuk mengukur ketercapaian pembelajaran siswa.

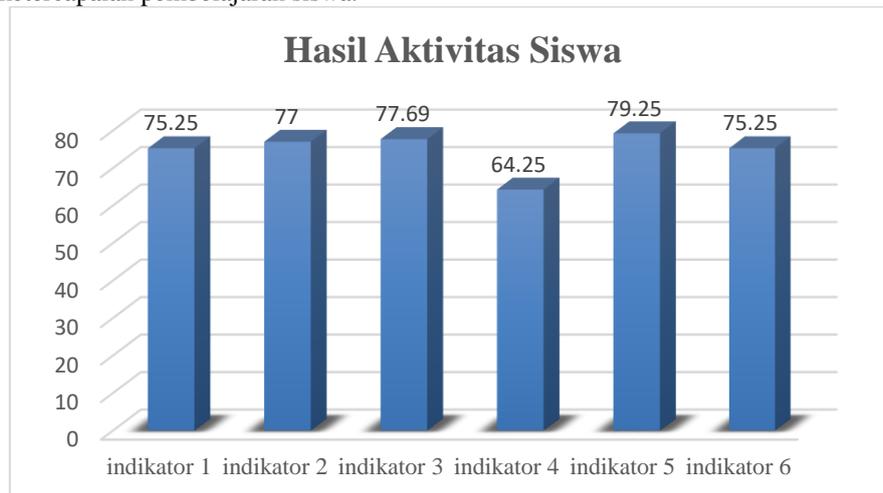


Diagram 3. Hasil Lembar Observasi Aktivitas Siswa Pada Pembelajaran Software Cabri 3D

Hasil observasi aktivitas siswa dalam prose pembelajaran matematika dengan menggunakan software cabri 3D yaitu aktivitas siswa selama pembelajaran berlangsung mencapai 74,78%. Persentase tersebut menunjukkan bahwa aktivitas siswa dalam pembelajaran matematika sudah sangat baik.

4. Pembahasan

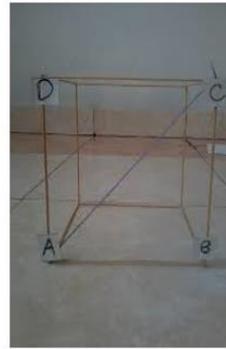
Berdasarkan skor hasil postes untuk kemampuan visualisasi spasial matematis siswa kelas eksperimen yang diberikan pembelajaran dengan menggunakan software cabri 3D lebih tinggi dibanding siswa pada kelas kontrol yang mendapat pembelajaran konvensional. Siswa pada kelas eksperimen memperoleh rata-rata skor 19,83 dan kelas kontrol 14,87 dari skor maksimum 30. Hasil uji perbedaan rata-rata hasil postes kedua kelompok tersebut menunjukkan nilai $sig = 0,000 < 0,05$ artinya terdapat perbedaan yang signifikan. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa kemampuan visualisasi spasial matematis siswa yang mengikuti pembelajaran dengan software cabri 3D lebih baik dibanding yang mengikuti pembelajaran konvensional. Hal ini serupa dengan temuan (Buchori, 2012, Kartika, 2013, Hamdan, 2014, Sinurat dan Syahputra, 2015 dan Wulandari, 2013). Buchori (2012) dengan menggunakan berbantuan software geogebra pada siswa SMA, Kartika (2013) dengan menggunakan software matlab pada siswa SMA, Hamdan (2014) dengan berbantuan software geogebra dalam meningkatkan spasial ability pada siswa SMP, Sinurat dan Syahputra (2015) pengembangan media pembelajaran dengan berbantuan program flash pada siswa SMP dan Wulandari (2015) dengan menggunakan software cabri 3D V2 pada siswa SMK. Dari hasil penelitian tersebut melaporkan bahwa siswa yang diajarkan dengan menggunakan software ataupun berbantuan mencapai nilai yang lebih baik pada kemampuan matematis daripada siswa kelas konvensional.

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa siswa yang belajar dengan menggunakan software cabri 3D memperoleh hasil yang lebih baik daripada siswa yang mendapat pembelajaran konvensional pada kemampuan visualisasi spasial matematis yang diteliti. Hal ini dimungkinkan karena pembelajaran dengan menggunakan software cabri 3D memudahkan siswa dalam membuat gambar geometris. Tentunya pembelajaran *software cabri 3D* juga harus didukung dengan adanya sarana dan prasarana sekolah yang memadai terutama dalam hal pengadaan laboratorium komputer. *Software cabri 3D* selain membantu siswa dalam membuat gambar, software ini juga dapat mengukur suatu objek secara akurat misalnya subpokok bahasan dalam hal jarak dan sudut. Ada beberapa hambatan yang ditemui dalam pembelajaran yang menggunakan *software cabri 3D* yaitu Siswa baru mengetahui adanya perangkat pembelajaran matematika seperti halnya *software cabri 3D*, maka guru harus membuat siswa lebih menarik dan membuat siswa interaktif, Sarana dan prasarana harus didukung oleh adanya laboratorium komputer, Membutuhkan tambahan waktu dalam penyampaian materi pembelajaran dengan menggunakan *software cabri 3D*, Tetap perlu adanya penjelasan konsep dari materi dimensi tiga sebelum menggunakan *software cabri 3D* dan Untuk penjelasan tools pada *software cabri 3D* perlu adanya pengarahan/bimbingan sebelumnya.

Kemampuan visualisasi spasial dengan menggunakan software cabri 3D dapat dilihat bagaimana awalnya siswa terbiasa menggunakan papan tulis/whiteboard untuk menggambar bangun ruang ataupun penggunaan alat peraga seperti kerangka kubus dan bangun ruang lainnya yang terbuat dari kerangka besi. Seperti halnya pada subpokok bahasan jarak dengan menggunakan alat peraga maka untuk menentukan garis hanya dengan menggunakan benang seperti yang ada pada gambar dibawah ini.

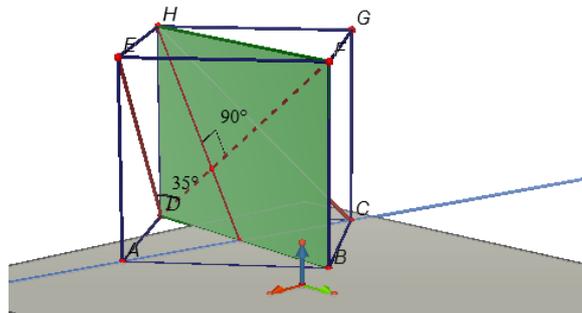


Gambar 1. Alat Peraga Kerangka Besi Bangun Ruang Kubus ABCD.EFGH



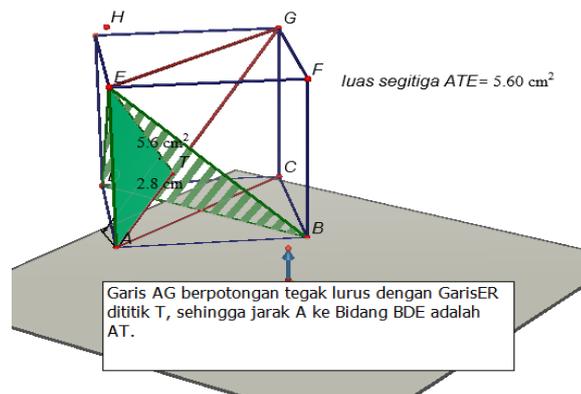
Gambar 2. Penggunaan Alat Peraga menghitung jarak antara titik A ke titik C

Terlihat dengan menggunakan alat peraga tersebut siswa kesulitan dalam memvisualisasikan dan melakukan perhitungan jarak antara titik A ke titik C. Dengan pembelajaran *software cabri 3D* siswa dimudahkan dengan membuat sketsa gambar bangun ruang sesuai dengan ukuran yang diinginkan. Seperti terlihat pada gambar di bawah ini



Gambar 3. Tampilan Pada Software Cabri 3D Pada Pokok Bahasan Sudut

Terlihat pada Gambar 3 dengan menggunakan software cabri 3D dapat langsung diketahui sudut yang terbentuk diagonal ruang DF dan diagonal sisi CH pada kubus ABCD.EFGH



Gambar 4. Tampilan Pada Software Cabri 3D Pada Pokok Bahasan Jarak

Pada Gambar 4 dengan menggunakan *software cabri 3D* untuk mengetahui kubus ABCD.EFGH jarak pada titik A ke Bidang BDE adalah garis AT serta dapat diketahui luas dan volume dari suatu bangun ruang.

Nilai rata-rata kemampuan visualisasi spasial matematis pada postes kelas eksperimen hanya 19,83 atau 66,1% dari skor ideal, sedangkan pada kelas kontrol lebih rendah lagi hanya 14,87 atau 49,56% dari skor ideal yang tentunya termasuk dalam kategori rendah. Hal ini menunjukkan bahwa siswa merasa kesulitan dalam menyelesaikan soal-soal kemampuan visualisasi spasial matematis. Ada beberapa faktor yang menyebabkan hal ini bisa terjadi, yaitu pertama matematika adalah merupakan mata pelajaran yang sulit untuk dipelajari dan diajarkan karena matematika merupakan mata pelajaran yang berstruktur vertikal dimana terdapat suatu runtutan untuk mempelajari materi matematika (Crockcroft dalam Hendriana, 2009:3). Kedua, Pembelajaran masih rendah karena penggunaan model pembelajaran yang kurang tepat. Selama ini guru masih menggunakan strategi konvensional yang hanya berpusat pada guru sehingga proses menggunakan pembelajaran dikelas kurang menyenangkan (Kurniyawati, 2013:3). Ketiga, Dalam kurikulum nasional di Indonesia, dari tingkat sekolah dasar sampai perguruan tinggi siswa/ mahasiswa dituntut untuk dapat menguasai materi geometri bidang dan geometri ruang yang notabene juga membutuhkan kemampuan spasial (Syahputra, 2015:354). Keempat, dalam penelitiannya menemukan pentingnya kemampuan spasial yang dengan nyata sangat dibutuhkan pada ilmu-ilmu teknik dan matematika khususnya geometri. Kemampuan ini tidak ditemukan secara genetik tetapi sebagai hasil proses belajar yang panjang (Nemeth, 2007:123)

Hal lain yang menyebabkan rendahnya hasil postes dalam penelitian ini adalah pembelajaran yang dilakukan sebanyak 8 kali pertemuan nampaknya belum cukup untuk mengembangkan kemampuan matematik seperti yang diharapkan, kemampuan visualisasi spasial diberikan dengan soal-soal yang berkaitan dengan keruangan pada bidang geometris. Kemampuan visualisasi spasial matematis bersifat individu dimana kemampuan visualisasi spasial matematis dapat meningkat tergantung pada kemampuan/usaha pada siswa tersebut.

5. Simpulan dan Rekomendasi

Berdasarkan hasil pengujian hipotesis dan analisis pengolahan data dapat disimpulkan terdapat pengaruh yang signifikan antara kemampuan visualisasi spasial dengan *software cabri 3D* pada pokok bahasan geometri dimensi tiga dengan subpokok bahasan jarak dan sudut.

Beberapa rekomendasi yang berhubungan dengan penelitian pengembangan ini. Rekomendasi ditujukan kepada siapa saja yang berkeinginan untuk melakukan penelitian yang relevan dengan rekomendasi sebagai berikut:

- a. Bagi siswa, perlu banyak berlatih dalam mengerjakan soal-soal yang berkaitan dengan keruangan supaya kemampuan visualisasi spasialnya lebih baik terutama pada subyek yang mempunyai kemampuan geometri rendah. Hal ini juga dapat diharapkan dapat meningkatkan kemampuan visualisasi spasial matematis terutama bidang geometri
- b. Bagi guru, diharapkan dapat memberikan soal-soal yang berkaitan dengan keruangan supaya siswa terbiasa berlatih dalam mengerjakan soal-soal keruangan yang masih dianggap sulit. Pada proses pengerjaan soal, sebaiknya menggunakan langkah-langkah pengerjaan agar dapat terlihat dimana siswa masih banyak melakukan kesalahan.

Daftar Pustaka

- Buchori, Achmad. (2012). *Pengaruh Model pembelajaran Matematika Creative Problem Solving (CPS) Berbantuan Software Geogebra Terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Pada Siswa SMA*. Artikel Penelitian Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. IKIP PGRI Semarang.
- Hendriana, H. (2009). *Pembelajaran Dengan Pendekatan Metaphorical Thinking Untuk Meningkatkan Kemampuan Pemahaman Matematik, Komunikasi Matematik Dan Kepercayaan Diri Siswa Sekolah Menengah Pertama*. Disertasi Sekolah Pasca Sarjana UPI. Bandung : Tidak diterbitkan.
- Kartika, Hendra. (2013). *Pembelajaran Matematika Berbantuan Software Matlab Sebagai Upaya meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematis dan Minat Belajar Siswa SMA*. Tesis pada PPS UPI. Bandung : Tidak diterbitkan.
- Ruseffendi. 2005. *Dasar-dasar Penelitian Pendidikan & Bidang Non-Eksata Lainnya*. Bandung: Tarsito
- Syahputra, Edi. & Sinurat, Mualdin. (2015). *Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbantuan Program Flash untuk Meningkatkan Kemampuan Matematik Siswa SMP*. Jurnal Tabularasa PPS UNIMED, (Online), Vol.12 No. 2/Agustus 2015, ISSN :

Wulandari, I Gusti A.P.A., (2013). *Pengaruh Penerapan Pembelajaran Matematika Realistik Berbantuan Software Cabri 3D. V2 Pada Pokok Bahasan Geometri Dimensi Tiga Terhadap Prestasi Belajar Siswa Kelas X SMK N 1 Denpasar Tahun Ajaran 2012/2013*. Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Mahasaraswati Denpasar.

PENGARUH PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN REFLEKTIF TERHADAP KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH DAN KOMUNIKASI MATEMATIS MAHASISWA CALON GURU

¹Rohana, ²Yunika Lestaria Ningsih

^{1,2}FKIP Pendidikan Matematika, Universitas PGRI Palembang
rohana@univpgri-palembang.ac.id, yunikalestari@univpgri-palembang.ac.id

Abstract

This study aims to : 1) find out the enhancement ability of the problem solving and mathematical communication, 2) the interaction between the learning model and the level of the students' ability toward the enhancement ability of problem solving and mathematical communication. The data were collective through tes and interview. The data were analyzed quantitatively using a t-test and Two Ways Anova. The result show that the enhancement ability of problem solving and mathematical communication of the students' who acquired the Reflective learning model is better than students who received the conventional learning, according to the whole student or students' ability level. There is no interaction between the learning model and level of students' ability toward the enhancement ability of problem solving and mathematical communication. Its mean that the enhancement of students ability is affected by the application of the learning model.

Keywords: Reflective Learning, problem solving ability, mathematical communication ability

1. Pendahuluan

Pemecahan masalah dan komunikasi matematis merupakan bagian penting dari pembelajaran matematika. Pentingnya pemecahan masalah dan komunikasi matematis itu terlihat dari keduanya dimasukkan ke dalam standar proses secara berturut-turut pada urutan pertama dan ketiga dalam *Principles and Standards for School Mathematics* [1].

Terkait dengan pembelajaran matematika, Halmos [2] menegaskan bahwa pemecahan masalah merupakan jantungnya matematika. Oleh sebab itu dapat kita pahami apabila [3] menyatakan bahwa pemecahan masalah bukanlah sekadar tujuan dari belajar matematika, tetapi juga merupakan alat utama agar siswa memiliki keterampilan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari serta memiliki kemampuan membuat keputusan secara benar dan baik dalam kehidupannya. Pada akhirnya diharapkan nilai-nilai matematika yang terintegrasi dalam proses pembelajaran matematika dapat melatih siswa menjadi pemecah masalah yang baik sehingga mampu mengembangkan potensi berpikir siswa secara maksimal.

Keberhasilan individu dalam memecahkan masalah harus didukung oleh kemampuan matematis lainnya, diantaranya adalah kemampuan komunikasi matematis. Kemampuan komunikasi merupakan bagian penting dalam pendidikan matematika. [4] mengemukakan bahwa kemampuan komunikasi merupakan salah satu faktor yang memberikan kontribusi dan turut menentukan keberhasilan pebelajar dalam menyelesaikan masalah. Walle [dalam 5] mempertegas bahwa belajar ber-komunikasi dalam matematika membantu perkembangan ide atau gagasan siswa di dalam kelas karena siswa belajar dalam suasana aktif. Pelibatan siswa secara aktif di kelas berarti melatih siswa untuk memikirkan ide-ide mereka, memberikan argumentasi dari idenya tersebut secara lisan ataupun tulisan supaya mampu menjelaskan dan meyakinkan orang lain, mendengarkan gagasan atau penjelasan orang lain, serta memberi kesempatan pada siswa untuk mengembangkan pengalaman dan membangun pengetahuannya.

Fakta yang ada di Indonesia menunjukkan bahwa kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis siswa masih rendah, baik di tingkat pendidikan dasar dan menengah [5]; [6] maupun pendidikan tinggi khususnya pada mahasiswa calon guru matematika, yang dikemukakan oleh [7],[8],

dan [9]. Cai dalam [5] mengemukakan bahwa rendahnya kemampuan komunikasi matematis dapat berimplikasi pada kesulitan (maha)siswa dalam menyelesaikan suatu masalah matematika.

Informasi di atas tentulah belum menggembirakan karena Romberg & Carpenter dalam [10] menegaskan bahwa tanggungjawab keberhasilan reformasi dalam pendidikan matematika ada di pundak guru. Reformasi yang dimaksud salah satunya adalah menyangkut pendekatan atau model pembelajaran yang dilakukan dalam pembelajaran matematika. Selain itu, [11] menyatakan bahwa pemilihan strategi mengajar yang tepat dan pengaturan lingkungan belajar memiliki pengaruh yang signifikan terhadap kesuksesan pembelajaran matematika.

Menyadari pentingnya suatu pembelajaran yang berpotensi mengembangkan kemampuan berfikir mahasiswa calon guru, peneliti memandang bahwa pembelajaran reflektif (*Reflective Learning*) memiliki banyak kelebihan jika digunakan sebagai alternatif pembelajaran matematika untuk mengembangkan kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis. *Reflective Learning* merupakan pembelajaran dengan melibatkan kegiatan berfikir reflektif pada prosesnya. Refleksi dalam konteks pembelajaran dirumuskan Boud, *et al* dalam [12],[13] merupakan kegiatan intelektual dan afektif yang melibatkan pembelajar dalam upaya mengeksplorasi pengalaman mereka untuk mencapai pemahaman dan apresiasi-apresiasi baru. Pada saat berfikir reflektif berlangsung pada seorang pembelajar, ia mempelajari apa yang sedang dihadapinya, berasumsi, menilai, bersikap, dan mengaplikasikan pemahamannya. Apabila hal ini berlangsung secara terus menerus maka kegiatan berfikir ini akan sampai pada pemahaman yang lebih mendalam, perubahan pemikiran, dan pada akhirnya menyelesaikan permasalahan. Hmelo & Ferrari dalam [14] menyimpulkan lebih jauh bahwa refleksi membantu siswa/mahasiswa untuk membangun keterampilan berfikir tingkat tingginya.

[15] menyatakan bahwa refleksi harus menjadi bagian yang mendasar bagi pengembangan guru karena guru memiliki kewajiban untuk mampu mengevaluasi dan menata kembali kemampuan mengajar agar dapat mengoptimalkan proses belajar-mengajar. Seorang guru reflektif juga diharuskan mampu untuk bersikap kritis terhadap kemampuan mengajarnya sendiri agar siswa bisa mendapatkan pengalaman belajar yang dinamis, yang berharga dan bermakna bagi kehidupan mereka.

Lebih jauh Zeichner dan Liston dalam [16] menyatakan bahwa konsep pembelajaran reflektif sebagai sarana untuk mengembangkan kemampuan profesional guru. Hal tersebut dikarenakan konsep pembelajaran reflektif terdiri dari beberapa proses yang pada umumnya bertujuan menumbuhkan sikap eksplorasi dan penyelidikan sehingga mampu membangkitkan kesadaran calon guru serta menjadi faktor yang mempengaruhi proses pembelajaran calon guru.

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk 1) mengetahui peningkatan kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis mahasiswa calon guru, ditinjau dari keseluruhan maupun berdasarkan level kemampuan awal matematika mahasiswa, 2) mengetahui ada atau tidak interaksi antara model pembelajaran dan level kemampuan matematika mahasiswa terhadap peningkatan kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis mahasiswa.

2. Kajian Pustaka

2.1. Pengertian Reflektif dan Pembelajaran Reflektif

Menurut Fennerty dalam [13], refleksi merupakan kemampuan mensintesa informasi yang dipelajari dan digunakan sebagai konsep penting dalam berbagai keadaan dan situasi. King dalam [17] menggambarkan refleksi sebagai sebuah proses yang disengaja dengan melibatkan peserta didik dalam berbagai kegiatan dan memfokuskan diri pada peningkatan kemampuan, belajar berpikir secara hati-hati terhadap pikiran yang akan diwujudkan dalam tindakan, belajar mengenai apa yang telah terjadi dan mempelajari pengalaman yang telah didapatkan, kesemuanya itu sebagai dasar terhadap apa yang dapat mereka lakukan di masa depan.

Dalam konteks pembelajaran, Boud, *et al* dalam [12] merumuskan refleksi sebagai kegiatan intelektual dan afektif yang melibatkan individu-individu dalam upaya mengeksplorasi pengalaman mereka untuk mencapai pemahaman dan apresiasi-apresiasi baru. Pentingnya refleksi juga dikemukakan oleh [17] bahwa refleksi membantu pembelajar untuk fokus dan berpartisipasi secara aktif dalam membangun diri sehingga menjadi pembelajar yang mandiri, kritis dan efektif.

Secara mental dalam berfikir reflektif dilibatkan proses-proses kognitif untuk memahami faktor-faktor yang menimbulkan konflik pada suatu situasi. Hasil keterlibatan mental ini membuat seseorang aktif membangun atau menata pengetahuan tentang suatu situasi untuk mengembangkan suatu strategi sehingga mampu berproses dalam situasi tersebut. [18] menyatakan dalam berfikir reflektif melibatkan pertimbangan pribadi seseorang tentang proses belajarnya. Oleh sebab itu, berfikir reflektif merupakan suatu komponen yang penting bagi proses pembelajaran.

Dalam dunia pendidikan, konsep berfikir reflektif ini dikembangkan ke dalam pendidikan dalam bentuk sebuah pembelajaran yaitu pembelajaran reflektif. Pembelajaran reflektif bertumpu pada kemampuan berpikir reflektif dan berkaitan erat dengan cara kerja otak manusia. Berpikir reflektif harus ada dalam proses belajar mengajar di kelas sehingga membuat peserta didik lebih menyadari apa yang sedang dipelajarinya dan memberikan kemungkinan pemahamannya yang lebih mendalam dalam setiap apapun yang dipelajarinya. Menurut Perkins dalam [18] pembelajaran reflektif memungkinkan menjadi apapun yang kita mampu, jika kecerdasan reflektif dipupuk dan dikembangkan dengan serius. Lebih lanjut [17] menegaskan bahwa pembelajar yang terlibat dalam pembelajaran reflektif berarti telah berperan aktif dalam belajar dan mengenali tanggung jawab diri pribadi untuk menjadi pembelajar sepanjang hayat.

The International Center for Jesuit Education (ICAJE) merumuskan model pembelajaran reflektif yang dikenal dengan Paradigma Pedagogi Ignasian [12]. Model pembelajaran reflektif berbasis Paradigma Pedagogi Ignasian ini memiliki tiga unsur utama yaitu pengalaman (*experience*), refleksi (*reflection*), dan aksi (*action*). Selanjutnya ketiga unsur tersebut diaplikasikan menjadi lima langkah pembelajaran reflektif yaitu: 1) konteks (*context*); 2) pengalaman (*experience*); 3) refleksi (*reflection*); 4) aksi (*action*); dan 5) evaluasi (*evaluation*) [19]; Drost dalam [12].

2.2. Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis

Kemampuan pemecahan masalah merupakan komponen penting dalam belajar matematika. Sebagaimana dinyatakan dalam [2] bahwa pemecahan masalah merupakan bagian integral dari semua pembelajaran matematika. Pentingnya kemampuan pemecahan masalah dimiliki agar setiap siswa/mahasiswa terbiasa menghadapi berbagai masalah yang semakin kompleks, baik pada masalah matematika maupun di luar matematika.

Melalui kemampuan pemecahan masalah, siswa dapat membangun sekaligus memiliki kemampuan dasar yang lebih bermakna lebih dari sekadar kemampuan berpikir. Hal tersebut ditegaskan [20] bahwa pemecahan masalah merupakan suatu kecakapan hidup (*life skill*) yang penting untuk dimiliki yang meliputi beberapa proses, yakni analisis, interpretasi, penalaran, prediksi, evaluasi, dan refleksi. Dengan demikian, melalui pemecahan masalah siswa didorong untuk berpikir bahwa sesuatu itu multidimensi sehingga mereka dapat melihat banyak kemungkinan penyelesaian masalah dengan ketajaman pengamatan, analisis yang lebih baik, serta pengembangan proses pemecahan masalah itu sendiri.

Menurut [21], indikator kemampuan pemecahan masalah matematis mencakup (1) mengidentifikasi kecukupan data untuk memecahkan masalah, (2) membuat model matematik dari suatu masalah dan menyelesaikannya, (3) memilih dan menerapkan strategi untuk menyelesaikan masalah matematika dan atau di luar matematika, (4) menjelaskan atau menginterpretasikan hasil sesuai permasalahan asal, serta (5) memeriksa kebenaran hasil atau jawaban, dan (6) menerapkan matematika secara bermakna.

2.3. Kemampuan Komunikasi Matematis

Setiap saat orang melakukan kegiatan komunikasi. Komunikasi diperlukan manusia untuk saling berinteraksi, karena untuk mengetahui apa yang difikirkan atau apa yang diinginkan, seseorang perlu menyampaikannya dalam kegiatan komunikasi. Sebagaimana diungkapkan dalam [2], ketika pembelajar ditantang pikiran dan kemampuan berfikir mereka tentang matematika dan mengkomunikasikan hasil pikiran mereka secara lisan atau dalam bentuk tulisan, itu artinya bahwa mereka sedang belajar menjelaskan dan menyakinkan. Menurut [22], "*communication is the ability to use language to communicate mathematical ideas and explain problem solutions*", sedangkan [23] mengemukakan bahwa komunikasi matematis sebagai kemampuan individu yang meliputi kemampuan membaca, menulis, dan menafsirkan gagasan-gagasan matematis. Mendengarkan penjelasan pembelajar yang lain, memberi pembelajar kesempatan untuk mengembangkan pemahaman mereka.

Lebih lanjut [24] mengemukakan bahwa melalui komunikasi, ide matematika dapat dieksploitasi dalam berbagai perspektif; cara berfikir mahasiswa dapat dipertajam; pertumbuhan pemahaman dapat diukur; pemikiran mahasiswa dapat dikonsolidasikan dan diorganisir; pengetahuan matematika dan pengembangan masalah mahasiswa dapat dikonstruksi; penalaran mahasiswa dapat ditingkatkan; dan komunitas mahasiswa dapat dibentuk.

Agar dapat berkomunikasi diperlukan suatu alat. Alat utama dalam melakukan komunikasi adalah bahasa. Matematika merupakan salah satu bahasa yang juga dapat digunakan oleh seseorang dalam berkomunikasi selain menggunakan bahasa nasionalnya sendiri. Matematika merupakan bahasa yang universal, karena untuk satu simbol dalam matematika dapat dipahami oleh setiap orang didunia meskipun bahasa nasionalnya berbeda. Oleh sebab itu, komunikasi menjadi bagian esensial dari matematika dan pendidikan matematika. Sebagaimana dikemukakan [25] bahwa komunikasi perlu

ditumbuh-kembangkan dalam pembelajaran matematika, tidak hanya sebagai alat bantu berfikir, alat bantu menemukan pola, tetapi juga komunikasi juga berperan dalam aktivitas sosial, sebagai wahana interaksi antar mahasiswa, maupun interaksi antardosen dan mahasiswa. [26] mengemukakan bahwa komunikasi matematis merupakan: (1) kekuatan sentral bagi siswa dalam merumuskan konsep dan strategi, (2) modal keberhasilan bagi siswa terhadap pendekatan dan penyelesaian dalam eksplorasi dan investigasi matematis, (3) wadah bagi siswa dalam berkomunikasi dengan temannya untuk memperoleh informasi, berbagi fikiran dan penemuan, tukar pendapat, menilai dan mempertajam ide untuk meyakinkan yang lain. Standar komunikasi yang ditetapkan dalam [2] adalah: (1) mengorganisasi dan mengkonsolidasi pemikiran matematika melalui komunikasi, (2) mengkomunikasikan pemikiran matematik secara koheren dan jelas pada teman, guru dan yang lainnya, (3) menganalisis dan mengevaluasi pemikiran matematik dan strategi-strategi lainnya, dan (4) menggunakan bahasa matematika untuk menyatakan ide-ide matematis secara tepat.

Berdasarkan uraian di atas maka yang dimaksud dengan komunikasi matematis dalam penelitian ini adalah kemampuan mahasiswa untuk menyatakan ide-ide atau gagasan-gagasan matematis, yang diukur berdasarkan kemampuan dalam: 1) menuliskan ide-ide, situasi-situasi, alasan-alasan, dan relasi-relasi dalam menyelesaikan masalah matematis; 2) menggunakan istilah tabel, diagram, notasi, atau rumus matematika dengan tepat; 3) menganalisa dan menilai pemikiran maupun strategi matematis orang lain; serta 4) mengungkapkan kembali suatu uraian atau paragraf matematika ke dalam bahasa sendiri.

3. Metode Penelitian

Metode penelitian ini merupakan penelitian *Quasi-Experimental* karena subjek tidak dikelompokkan secara acak, tetapi diterima apa adanya. Pada penelitian ini, peneliti memberikan perlakuan kepada subjek penelitian untuk selanjutnya ingin diketahui pengaruh perlakuan tersebut. Perlakuan tersebut adalah pembelajaran reflektif (*Reflective Learning*) yang diterapkan pada kelas eksperimen. Kemampuan yang diukur pada penelitian ini adalah kemampuan pemecahan masalah matematis (KPMM) dan kemampuan komunikasi matematis (KKM).

Desain penelitian yang digunakan adalah desain kelompok kontrol pretes dan postes non-ekivalen atau Nonequivalent Pre-Test and Post-Test Control-Group Design. Populasi dalam penelitian ini adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas PGRI Palembang, sedangkan sampel adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang mengikuti perkuliahan Statistika Matematika I pada tahun akademik 2015/2016. Teknik pengambilan sampel yang digunakan adalah purposive sampling. Data dalam penelitian ini ada dua jenis, yaitu data kuantitatif dan data kualitatif. Data kuantitatif diperoleh melalui analisis terhadap jawaban mahasiswa pada tes KPMM dan KKM yang dilakukan sebelum (pretes) dan sesudah (postes) kegiatan pembelajaran. Data kualitatif diperoleh dari hasil wawancara dengan mahasiswa. Data kualitatif dianalisis secara deskriptif untuk mendukung kelengkapan data kuantitatif.

4. Hasil Dan Pembahasan

4.1. Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis

Hasil uji rata-rata gain ternormalisasi peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa pada keseluruhan mahasiswa diperoleh $sig = 0,000$ yang lebih kecil dari taraf nilai signifikansi yaitu $0,005$, yang mengakibatkan H_0 ditolak. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa secara keseluruhan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran reflektif lebih baik daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional.

Hasil peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa ditinjau berdasarkan level kemampuan awal matematika adalah sebagai berikut, level tinggi memperoleh nilai $sig = 0,017$, level sedang nilai $sig = 0,001$, dan rendah nilai $sig = 0,016$. Nilai tersebut lebih rendah dari taraf signifikansi 5% atau $0,05$ sehingga dapat disimpulkan bahwa berdasarkan level kemampuan awal matematika mahasiswa, kemampuan pemecahan masalah matematika mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran reflektif lebih baik daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional.

4.2. Kemampuan Komunikasi Matematis

Hasil uji rata-rata gain ternormalisasi peningkatan kemampuan komunikasi matematis mahasiswa pada keseluruhan mahasiswa diperoleh $sig = 0,000$ yang lebih kecil dari taraf nilai signifikansi yaitu $0,005$, yang mengakibatkan H_0 ditolak. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa secara keseluruhan kemampuan komunikasi matematis mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran reflektif lebih baik daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional.

Hasil peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa ditinjau berdasarkan level kemampuan awal matematika adalah sebagai berikut, level tinggi memperoleh nilai $\text{sig} = 0,046$, level sedang nilai $\text{sig} = 0,000$, dan rendah nilai $\text{sig} = 0,024$. Nilai tersebut lebih rendah dari taraf signifikansi 5% atau 0,05 sehingga dapat disimpulkan bahwa berdasarkan level kemampuan awal matematika mahasiswa, kemampuan komunikasi matematis mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran reflektif lebih baik daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional.

4.3. Interaksi antara Model Pembelajaran dan Kemampuan Awal Matematika terhadap Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis

Interaksi antara model pembelajaran dan kemampuan awal matematika mahasiswa terhadap peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa terlihat dari hasil uji ANOVA dua arah dengan taraf signifikansi 5%. Berdasarkan hasil uji ANOVA dua arah tersebut diketahui bahwa nilai sig untuk interaksi faktor pembelajaran yaitu kelas PR dan PK, dan kelompok KAM terhadap peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa adalah 0,859, nilai ini lebih besar dari taraf signifikansi yaitu 0,05. Dengan demikian H_0 diterima artinya tidak ada pengaruh interaksi antara pembelajaran dan KAM terhadap peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa. Hal ini menunjukkan bahwa peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis mahasiswa terjadi karena faktor pembelajaran.

4.4. Interaksi antara Model Pembelajaran dan Kemampuan Awal Matematika terhadap Peningkatan Kemampuan Komunikasi Matematis

Interaksi antara model pembelajaran dan kemampuan awal matematika mahasiswa terhadap peningkatan kemampuan komunikasi matematis mahasiswa terlihat dari hasil uji ANOVA dua arah dengan taraf signifikansi 5%. Berdasarkan hasil uji ANOVA dua arah tersebut diketahui bahwa nilai sig untuk interaksi faktor pembelajaran yaitu kelas PR dan PK, dan kelompok KAM terhadap peningkatan komunikasi matematis mahasiswa adalah 0,879, nilai ini lebih besar dari taraf signifikansi yaitu 0,05. Dengan demikian H_0 diterima artinya tidak ada pengaruh interaksi antara pembelajaran dan KAM terhadap peningkatan kemampuan komunikasi matematis mahasiswa. Hal ini juga menunjukkan bahwa peningkatan kemampuan komunikasi matematis mahasiswa terjadi karena faktor pembelajaran. Hasil penelitian telah menunjukkan bahwa secara keseluruhan dan kelompok KAM (tinggi, sedang dan rendah) peningkatan kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis mahasiswa calon guru yang mendapatkan pembelajaran reflektif lebih baik daripada mahasiswa calon guru yang mendapatkan pembelajaran konvensional. Hal ini berarti bahwa pembelajaran reflektif memberikan pengaruh positif terhadap peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis, dan kemampuan komunikasi matematis mahasiswa calon guru. Dengan kata lain, hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pembelajaran reflektif secara signifikan lebih baik dalam meningkatkan kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis dibandingkan pembelajaran konvensional.

Berdasarkan temuan-temuan penelitian ini dapat dinyatakan bahwa faktor pembelajaran memberikan pengaruh terhadap aktivitas mahasiswa di kelas selama mengikuti proses pembelajaran. Hasil temuan ini memperkuat dan melengkapi hasil-hasil penelitian terdahulu tentang pembelajaran reflektif, antara lain penelitian yang dilakukan oleh [27], [28], dan [29] yang menyimpulkan bahwa pembelajaran reflektif lebih baik daripada pembelajaran konvensional dalam meningkatkan kemampuan matematis maupun berpikir matematis pada siswa sekolah dasar dan siswa sekolah menengah.

Bila dicermati pada langkah-langkah pembelajaran reflektif, mahasiswa diberi kesempatan untuk berperan aktif dalam proses pembelajaran dan dilibatkan dalam mempertimbangkan keberhasilan belajar mereka. Sebagai contoh, pada langkah *experience*, mahasiswa dihadapkan pada soal-soal berbasis masalah yang mereka kerjakan secara berkelompok. Mahasiswa dilatih dan dibiasakan berpikir reflektif matematis melalui soal-soal berbasis masalah tersebut. Interaksi sosial melalui diskusi kelompok seperti saling bertanya, merespon ataupun mengkritisi jawaban teman, memberikan kesempatan pada mahasiswa untuk memiliki peran yang sangat besar dalam upaya memahami konsep, mengembangkan prosedur, menemukan prinsip, serta menerapkan konsep, prosedur, dan prinsip tersebut dalam penyelesaian masalah yang diberikan. Sebagaimana dinyatakan oleh Piaget dalam [9] bahwa saat seseorang dihadapkan pada pengetahuan baru dan berinteraksi dengan orang lain ia akan mengalami konflik kognitif (*cognitive disequilibrium*). Konflik kognitif tersebut akan mengawali proses kognitif atau rekonstruksi intelektual dalam diri seseorang. Bukan hanya muncul pemahaman kognitif mereka, tetapi secara bersamaan muncul reaksi afektifnya.

Saat mahasiswa melakukan diskusi kelas, mahasiswa menggunakan komunikasi sebagai bagian dari proses penyelesaian masalah. Hal senada juga dikemukakan [1] bahwa ketika peserta didik berpikir,

merespon, berdiskusi, mengelaborasi, menulis, membaca, mendengar, dan menemukan konsep-konsep matematis, mereka telah menemukan dua buah kegiatan berkaitan dengan komunikasi yaitu berkomunikasi untuk belajar matematika dan belajar komunikasi matematis. Dosen berperan sebagai fasilitator dengan memberikan petunjuk atau *scaffolding* melalui pertanyaan-pertanyaan refleksi. [30] mengemukakan bahwa pengajar memiliki peran yang penting dalam membantu pemberdayaan perkembangan kebiasaan-kebiasaan berpikir reflektif dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan seperti : "sebelum kita melanjutkan, apakah kita yakin sudah memahami ini?", "kenapa kita pikir ini benar?". Pertanyaan-pertanyaan ini membuat mahasiswa cenderung belajar bertanggung jawab untuk merefleksikan pekerjaan mereka sendiri dan membuat penyesuaian-penyesuaian yang perlu saat memecahkan masalah. Inti dari pertanyaan-pertanyaan ini adalah agar informasi/pengetahuan itu mengendap dibenak mahasiswa, dan mahasiswa mencatat apa saja yang pernah dipelajari serta merasakan ide-ide baru. Pertanyaan-pertanyaan reflektif ini merupakan bagian dari aktivitas refleksi. Menurut Hmelo & Ferrari dalam [14] refleksi membantu peserta didik untuk membangun keterampilan berpikir tingkat tinggi. Intervensi dosen ini mendorong mahasiswa untuk mengaitkan pengetahuan yang baru dengan pengetahuan yang telah dimilikinya. Hal ini tentu baik sekali untuk memberikan pengalaman pada mahasiswa dalam mengonstruksi pengetahuannya sekaligus memicu berkembangnya kemampuan berpikir matematis mahasiswa.

Karakteristik lainnya dalam pembelajaran reflektif adalah penulisan jurnal reflektif. Penulisan jurnal reflektif dapat membantu mahasiswa merefleksikan proses pembelajarannya. Meskipun menurut [17] jurnal reflektif digunakan untuk mencatat kemajuan studi peserta didik agar menemukan strategi belajarnya sekaligus sebagai evaluasi kinerjanya. Ada dampak pengiring dari penulisan jurnal ini, yaitu melatih peserta didik (mahasiswa) mengkomunikasikan gagasan, harapan, ataupun permasalahannya secara tertulis terkait pembelajarannya.

Secara umum, penulisan jurnal reflektif ini didominasi oleh unsur perasaan (*feeling*). Meskipun terlihat sederhana, banyak hal yang dapat diungkap melalui jurnal reflektif. Melalui jurnal reflektif ini mahasiswa memiliki kesempatan berdialog dengan dosen secara tertulis, sehingga dosen dapat mengakomodasi kendala-kendala atau permasalahan-permasalahan bagi mahasiswa yang belum berani bertanya melalui lisan. Beberapa kendala-kendala yang dihadapi mahasiswa dalam pembelajaran dan terungkap melalui jurnal reflektif antara lain mengenai: materi-materi atau soal-soal yang belum dipahami, konflik dengan teman saat diskusi, kurang jelas melihat tulisan di *white board*, tidak percaya diri, dan sebagainya. Hasil refleksi mahasiswa ini juga menjadi bahan refleksi bagi dosen, dan dosen berusaha untuk membantu menyelesaikan permasalahan tersebut.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis mahasiswa yang memperoleh model pembelajaran reflektif lebih baik daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional, baik ditinjau secara keseluruhan mahasiswa maupun berdasarkan level kemampuan awal matematika mahasiswa. Selanjutnya, berdasarkan hasil penelitian juga diketahui bahwa tidak ada interaksi antara model pembelajaran dan kemampuan awal matematika mahasiswa terhadap peningkatan kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis mahasiswa.

Adapun saran terkait dengan hasil penelitian ini adalah bahwa pembelajaran reflektif dapat dijadikan salah satu pembelajaran yang inovatif dalam meningkatkan kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis mahasiswa.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Menteri Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi, Koordinator Kopertis Wilayah II Palembang, Rektor Universitas PGRI Palembang, Kepala dan staf LPPkMK UPGRIPalembang, Dekan FKIP UPGRIPalembang.

Daftar Pustaka

- [1] Carpenter, J. & Gorg, S. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, (2000).
- [2] National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM, (2000).
- [3] Wahyudin. *Peranan problem solving*. Makalah Seminar Technical Cooperation Project for Development of Mathematics and Science for Primary and Secondary Education in Indonesia, 25 Agustus 2003.

- [4] Stacey, K. The Place of Problem Solving in Contemporary Mathematics Curriculum Document. *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 341-350, (2005).
- [5] Ibrahim. *Peningkatan Kemampuan Komunikasi, Penalaran, dan Pemecahan Masalah Matematis serta Kecerdasan Emosional melalui PBM pada Siswa SMA*. Disertasi Pendidikan Matematika SPS UPI, (2011).
- [6] Pujiastuti, H. *Pembelajaran Inquiry Co-Operation Model untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah, Komunikasi, dan Self-Esteem Matematis Siswa SMP*. Disertasi Pendidikan Matematika SPS UPI, (2014).
- [7] Widjajanti, D., B. *Analisis Implementasi Strategi Perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah dalam Mengembangkan Kemampuan Pemecahan Masalah, Kemampuan Komunikasi Matematis, dan Keyakinan terhadap Pembelajaran Matematika*. Disertasi Pendidikan Matematika SPS UPI, (2010).
- [8] Karlimah. *Pengembangan Kemampuan Komunikasi dan Pemecahan Masalah serta Disposisi Matematis Mahasiswa PGSD melalui PBM*. Disertasi Pendidikan Matematika SPS UPI, (2010).
- [9] Prabawanto, S. *Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah, Komunikasi, dan Self-Efficacy Matematis Mahasiswa melalui Pembelajaran dengan Pendekatan Metacognitive Scaffolding*. Bandung: Disertasi pada SPS UPI, (2012).
- [10] Senger, E.S. Reflective reform in Mathematics: The recursive nature of teacher change. *Educational Studies in Mathematics*, 37, 199-221, (1999).
- [11] Bell, F.H. *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary School)*. Amerika: Wm. C. Brown Company Publishers, (1978).
- [12] Sirajuddin. Model Pembelajaran Reflektif: Suatu Model Belajar Berbasis Pengalaman. Dalam *Didaktika Jurnal Kependidikan* Vol 4 No.2, 189-200, (2009).
- [13] Kurnia, I. *Pengembangan Model Pembelajaran untuk Meningkatkan Kemampuan Reflektif Mahasiswa S1-PGSD pada Mata Kuliah Penelitian Tindakan Kelas*. Disertasi Pengembangan Kurikulum SPS UPI, (2006).
- [14] Song, H.D., Koszalka, T. A., dan Grabowski, B. Exploring Instructional Design Factors Prompting Reflective Thinking in Young Adolescents. In *Canadian Journal of Learning and Technology*, Vol 31, No. 2, 49-68, (2005).
- [15] Insuasty, E.A. & Castillo, L.C.Z. Exploring Reflective Teaching through Informed Journal Keeping and Blog Group Discussion in the Teaching Practicum. *PROFILE: Issues in Teachers' Professional Development* Vol.12 No.2, October 2010. ISSN 1657-0790. Bogotá, Columbia. Pages 87-105, (2010).
- [16] Radulescu, C.. Reinventing Reflective Learning Methods in Teacher Education. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 78, 11 – 15, (2013).
- [17] Coughlan, A. *Reflective Learning: Keeping A Reflective Learning Journal*. DCU Student Learning Resources, (2007).
- [18] Given, B., K. *Brain-Based Teaching*. Bandung: Kaifa, (2007).
- [19] ICAJE, The International Centre for Jesuit Education in Rome. *Ignatian Pedagogy: A Practical Approach*, [Online], Diakses di: http://www.rockhurst.edu/media/filer_private/uploads/ignatian_pedagogy_apractical_approach.pdf. [27 Desember 2013].
- [20] Anderson, J. *Mathematics Curriculum Development and the Role of Problem Solving*. ACSA Conference, (2009).
- [21] Sumarmo, U. *Pendidikan Karakter serta Pengembangan Berfikir dan Disposisi Matematik dalam Pembelajaran Matematika*. Makalah disajikan dalam Seminar Pendidikan Matematika di NTT tanggal 26 Februari 2012.
- [22] Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T., Pollock, E., and Witt, E. *What the United States Can Learn from Singapore's World-Class Mathematics System (and what Singapore can learn from the United States): An Exploratory Study*. NW, Washington: American Institute of Research, (2005).
- [23] Romberg, T.A., Carl, I.M., Crosswhite, F.J., Dossey, J.A., Gate, J.D., Frye, S.M., Hill, S.A., Hirsch, C.R., Lappan, G., Seymour, D., Steen, L.A., Trafton, P.R., and Webb, N. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, (1995).
- [24] Kusumah, Y.S. *Konsep, Pengembangan, dan Implementasi Computer-Based Learning dalam Peningkatan Kemampuan High-Order Mathematical Thinking*. Pidato Pengukuhan Jabatan Guru Besar Tetap dalam Bidang Pendidikan Matematika 2008, Bandung: UPI, (2008).
- [25] Baroody, A.J. *Problem Solving, Reasoning, and Communicating, K-8. Helping Children Think Mathematically*. New York: Macmillan Publishing Company, 1993.

- [26] Greenes, C. dan Schulman, L. *Communication Processes in Mathematical Explorations and Investigation*. In P.C Elliot, and M.J. Kenney (eds). 1996 Yearbook. Communication in Mathematics, K-12 and Beyond. USA: NCTM, (1996).
- [27] Nainggolan, L. *Model Pembelajaran Reflektif untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep dan Kemampuan Komunikasi Matematis*. Tesis Pendidikan Matematika SPS UPI, (2011).
- [28] Lasmanawati, A. *Pengaruh Pembelajaran Menggunakan Pendekatan Proses Berpikir Reflektif terhadap Peningkatan Kemampuan Koneksi dan Berpikir Kritis Matematis Siswa*. Tesis Pendidikan Matematika SPS UPI, (2011).
- [29] Zulmaulida, R. *Pengaruh Pembelajaran dengan Pendekatan Proses Berpikir Reflektif terhadap Peningkatan Kemampuan Koneksi dan Berpikir Kritis Matematis Siswa*. Tesis Pendidikan Matematika SPS UPI, (2012).
- [30] Wahyudin. *Pembelajaran dan Model-model Pembelajaran: Pelengkap untuk Meningkatkan Kompetensi Pedagogis Para Guru dan Calon-Guru Profesional*. Bandung: Tidak Diterbitkan, (2008)

DESAIN PEMBELAJARAN PENGURANGAN BILANGAN CACAH MELALUI PERMAINAN PANCING IKAN UNTUK SISWA KELAS 1

Septy Cartika Sari, Yusuf Hartono, Hapizah

Universitas Sriwijaya

septy_sari@rocketmail.com, yhartono@unsri.ac.id, hapizah@fkip.unsri.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan lintasan belajar pada materi pengurangan bilangan cacah menggunakan permainan pancing ikan. Metodologi yang digunakan adalah *design research* dengan tiga tahap yaitu *preparing for the experiment*, *the design experiment* dan *the retrospective analysis*. Penelitian ini terdiri dari *pilot experiment* dan *teaching experiment*. Namun dalam artikel ini hanya menjelaskan pada tahap *preparing for the experiment* dan *pilot experiment*. Sampel penelitian ini yaitu siswa kelas 1 SDN 179 Palembang. Hasil dari penelitian menunjukkan bahwa pemahaman siswa dalam pengurangan bilangan cacah dapat dirangsang dengan menggunakan permainan memancing ikan sebagai konteks. Semua kegiatan yang dilakukan oleh siswa menghasilkan lintasan belajar. Lintasan belajar yang dihasilkan terdiri dari bermain pancing ikan, menggambarkan situasi, dan menggunakan garis bilangan. Hal ini berguna untuk memahami pengurangan sebagai pendekatan *taking away*, *missing addend* dan pemecahan masalah kontekstual dalam pengurangan bilangan cacah.

Kata kunci: pengurangan, permainan, pancing ikan, design research, PMRI

1. Pendahuluan

Pengurangan bilangan cacah merupakan salah satu materi yang tergolong sulit bagi sebagian besar siswa di kelas rendah (Muslimin, Putri, & Somakim, 2012). Hal ini sesuai dengan yang dikemukakan oleh Nursyahidah, Putri, & Somakim (2012) bahwa beberapa siswa kurang memahami makna dari pengurangan bilangan cacah. Menurut Diba, Zulkardi, & Saleh (2009) dalam proses belajar mengajar tradisional di Indonesia, guru masih menggunakan metode pembelajaran yang konvensional, langsung pada tahap matematika formal seperti melatih siswa dengan simbol matematika langsung. Namun menurut Amir (2014) bahwa siswa SD berada dalam tahap operasi konkret sehingga untuk mengajarkan matematika memerlukan objek konkret yang dapat memanipulasi keabstrakan matematika melalui pengalaman siswa secara langsung. Hal ini senada dengan gagasan implementasi kurikulum 2013 yang menyatakan bahwa dalam belajar matematika siswa dimulai dari permasalahan konkret, kemudian ke semi konkret, dan akhirnya abstraksi permasalahan (Suwarsono, 2013. hal. 4). Untuk mencapai gagasan implementasi dari kurikulum 2013 sebaiknya pembelajaran matematika menggunakan pendekatan Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI).

PMRI merupakan suatu pendekatan pembelajaran yang melalui aktivitas manusia (Gravemeijer, 2004; Wijaya, 2012). Aktivitas manusia adalah segala sesuatu yang berhubungan dengan kehidupan nyata. Fosnot & Dolk (2001, hal. 37) menyatakan '*children off all ages across all cultures, love to play games. Board games, card games, and dice games provide rich context for mathematical learning. Games can also be made that will bring certain mathematical ideas to the surface for exploration*'. Beberapa penelitian PMRI yang melibatkan sebuah permainan pada pembelajaran matematika khususnya dalam materi pengurangan bilangan cacah dapat memberikan pengaruh positif berupa pembelajaran lebih bermakna, menyenangkan dan dapat meningkatkan pemahaman siswa tentang konsep matematika yang dipelajari (Nasrullah & Zulkardi, 2011; Jaelani, 2012; Prahmana, Zulkardardi, & Hartono 2012).

Menurut Musser, Bugger, dan Peterson (2008), Purnomo (2014) dalam mempelajari bilangan cacah sebaiknya menggunakan set model. Hal ini senada dengan pernyataan Muslimin (2013), Pasinggi (2000), menyatakan bahwa untuk menjelaskan konsep pengurangan kepada siswa SD dapat digunakan model

seperti partisi, membandingkan, komplemen, menghitung mundur, invers penjumlahan dan alat peraga yang digunakan adalah himpunan objek (misalnya kelereng, pensil, buku tulis, kubus satuan dan garis bilangan). Lebih lanjut, Musser, Bugger, dan Peterson (2008), Purnomo (2014) menyatakan pengurangan memiliki dua pendekatan yaitu *taking away* (mengambil keluar) dan *missing addend* (penjumlah yang dicari). Kedua pendekatan tersebut dapat menggunakan set model. Untuk jenis permainan yang dapat dimanfaatkan sebagai model dan konteks dalam belajar pengurangan bilangan cacah adalah permainan pancing ikan. Permainan ini sangat terkenal dikalangan anak-anak di seluruh Indonesia sampai sekarang. Permainan pancing ikan dapat dijadikan sebagai *starting point* untuk mengajarkan konsep pengurangan bilangan cacah pada siswa kelas 1 SD.

2. Operasi pengurangan bilangan cacah

Ada dua pendekatan yang digunakan dalam pengurangan yaitu "*taking away*" dan "*missing addend*". Definisi pendekatan *taking away* (mengambil keluar) yaitu diberikan a dan b merupakan sembarang bilangan bulat dan A dan B merupakan suatu himpunan dengan $a = n(A)$, $b = n(B)$ dan $B \subseteq A$, maka $a - b = n(A - B)$. Bilangan $a - b$ disebut beda atau dibaca a min b . Untuk menentukan $7 - 3$ menggunakan himpunan yaitu kita memikirkan 7 element seperti $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ lalu menggunakan himpunan beda, mengambil keluar sebuah himpunan bagian dari 3 element tersebut misal $\{a, b, c\}$ maka hasilnya adalah himpunan $\{d, e, f, g\}$, jadi $7 - 3 = 4$ (Musser, Bugger, & Peterson, 2008). Pada dasarnya *taking away* (mengambil keluar) sering digunakan untuk mengenalkan anak pada konsep pengurangan dengan tipe hasil akhir yang tidak diketahui (Purnomo, 2014). Seperti pada masalah berikut jika Pian memiliki 5 ekor ikan dalam kolam lalu dia mengambil 2 ekor ikan, berapa sisa ikan di kolam?. Hal ini dapat dimodelkan dengan pendekatan mengambil keluar 2 ekor ikan dari himpunan ikan yang berjumlah 5 sehingga bisa dipraktikkan secara nyata oleh siswa.

Fosnot & Dolk (2001), Murdiyani, Zulkardi, Putri, Eerde, & Galen (2013), menjelaskan bahwa pengurangan memiliki dua arti dan masing-masing arti mengarahkan ke strategi yang berbeda. Arti pengurangan sebagai "*Taking away something*" dan sebagai "menentukan perbedaan dari dua bilangan". Pendekatan *taking away something* dapat diajarkan dengan cara memancing satu ikan dari sepuluh ikan yang ada di kolam, kemudian ditanyakan berapa sisa ikan di kolam (contoh $10 - 1 = ?$). Pendekatan ini diiringi dengan penggunaan kata-kata untuk menjelaskan konsep pengurangan tersebut misalnya sepuluh dikurangi satu sama dengan sembilan. Dengan mengajarkan fakta-fakta ini terus menerus kepada anak, mereka akan dapat menarik kesimpulan tentang operasi pengurangan dengan tepat walaupun hal ini belum disampaikan dalam bentuk angka tertulis.

Menurut Musser, Bugger, & Peterson (2008) pendekatan kedua dalam pengurangan yaitu pendekatan *Missing Addend* (penjumlah yang di cari). Definisi pendekatan *missing addend* (penjumlah yang dicari) yaitu misal a dan b sebagai bilangan bulat, maka $a - b = c$ jika dan hanya jika $a = b + c$ untuk suatu bilangan bulat c . c disebut *missing addend* (penjumlah yang dicari). Pendekatan ini sering digunakan ketika membuat perubahan. lebih lanjut, Purnomo (2014) menyatakan bahwa tipe perubahan dan awalan yang tidak diketahui dalam konsep pengurangan dapat diartikan sebagai pendekatan mencari penjumlah yang belum diketahui. Pendekatan ini digunakan dalam situasi ketika mengetahui hasil penjumlahan dan salah satu penjumlahannya, kemudian mencari penjumlah yang belum diketahui dapat dianggap sebagai kebalikan (*invers*) dari proses pengurangan. Misal Septy memiliki uang Rp300 tapi dia membutuhkan Rp 700 untuk membeli sebuah penghapus. Berapa rupiah lagi yang dibutuhkan Septy untuk bisa membeli penghapus?. Hal ini bisa ditulis seperti $300 + \dots = 700$ sehingga $700 - 300 = 400$. Pendekatan penjumlah yang dicari sangat berguna untuk belajar *subtraction facts* (fakta dasar pengurangan) karena berkaitan erat dengan *addition facts* (fakta dasar penjumlahan) melalui *four fact families* (empat fakta keluarga).

Menurut Musser, Bugger, dan Peterson (2008), Purnomo (2014) dalam mempelajari bilangan cacah sebaiknya menggunakan set model. Lebih lanjut Muslimin (2013) dan Pasinggi (2000) menyatakan bahwa untuk menjelaskan konsep pengurangan kepada siswa Sekolah Dasar (SD) dapat digunakan model seperti partisi, membandingkan, kompelemen, menghitung mundur, invers penjumlahan dan alat peraga yang digunakan adalah himpunan objek seperti ikan, kelereng, pensil, buku, kubus dan garis bilangan. Dalam penelitian ini objek yang akan digunakan adalah ikan. Ikan akan dibuat dalam bentuk permainan pancing sehingga dapat membantu siswa memahami materi pengurangan bilangan cacah

3. Permainan pancing ikan

Permainan pancing ikan merupakan jenis permainan edukatif untuk anak SD yang mudah diperoleh, dimana objek yang dipancing bisa berbentuk ikan air tawar, ikan air laut, bentuk bola, kubus dan lain

sebagiannya. Dalam penelitian ini permainan pancing ikan berperan sebagai konteks yang merupakan *starting point* dalam pembelajaran pengurangan bilangan cacah, diharapkan siswa dapat memahami konsep pengurangan bilangan cacah. Desain pembelajaran yang dilakukan dalam penelitian ini merupakan serangkaian kegiatan yang dimulai dari aktivitas berbasis pengalaman bermain pancing ikan sampai menuju kepada konsep operasi pengurangan bilangan cacah. Adapun aturan permainan pancing ikan yang akan dilakukan

1. Siswa bekerja dalam kelompok yang terdiri dari 4 - 5 orang siswa
2. Setiap kelompok mendapatkan satu kolam ikan buatan dan 4 buah alat pancing tiruan.
3. Setiap kelompok akan diberi waktu 5 menit
4. 4 orang siswa berperan sebagai pemancing dan 1 orang sebagai pengamat guna mencatat jumlah ikan yang diperoleh oleh pemancing dan sebagai penghitung waktu (*timer*)
5. Selama permainan berlangsung, pengamat harus mencatat jumlah ikan yang diperoleh



Gambar 1. Contoh permainan pancing ikan

4. Metodologi

Tujuan penelitian ini untuk menghasilkan lintasan belajar pada materi pengurangan bilangan cacah. Untuk mengetahui lintasan belajar siswa, maka peneliti menggunakan *design research* yang mendesain dan menguji serangkaian aktivitas pembelajaran dan aspek-aspek lain dalam mendesain. *Learning trajectory* dapat diketahui dengan mendesain *hypothetical learning trajectory* (HLT) terlebih dahulu. *Hypothetical learning trajectory* merupakan instrumen utama dalam *design research*. Penelitian ini terdiri dari dua siklus yaitu *pilot experiment* dan *teaching experiment*. Adapun langkah-langkah *design research* yaitu *preliminary design*, *pilot experiment* dan *teaching experiment* serta *retrospective analysis*. Dalam *preliminary design*, peneliti mengkaji literatur dan mendesain Hypothetical Learning Trajectory (HLT) yang terdiri dari tujuan pembelajaran, pengetahuan awal yang harus dimiliki siswa, deskripsi aktivitas belajar, serta konjektur pemikiran siswa. Dalam *pilot* dan *teaching experiment*, peneliti menguji HLT yang telah dirancang. Kemudian, data dianalisis pada tahap *retrospective analysis* dengan cara membandingkan HLT yang telah dirancang dengan proses belajar siswa yang sebenarnya di kelas. Dalam artikel ini hanya menjelaskan proses pada tahap *preliminary design* dan *pilot experiment*, maka dari itu subjek penelitiannya ada 6 orang siswa kelas 1 SDN 179 Palembang. 6 orang siswa tersebut dipilih berdasarkan hasil diskusi dengan guru kelas yang terdiri dari 2 siswa yang memiliki kemampuan tinggi, 2 siswa yang memiliki kemampuan sedang dan 2 siswa yang memiliki kemampuan rendah. Data dikumpulkan melalui observasi, wawancara, test dan dokumentasi video.

5. Hasil dan Pembahasan

5.1. Aktivitas 1: Bermain pancing ikan

Pada aktivitas pertama, siswa diminta bermain pancing ikan bersama dengan teman sekelompoknya yang masing-masing kelompok terdiri dari 3 orang. Setiap kelompok mendapat satu set permainan pancing ikan yang terdiri dari 20 ekor ikan dan satu Lembar Aktivitas Siswa (LAS). Setiap kelompok mempunyai jawaban yang berbeda karena jumlah ikan yang mereka dapatkan berbeda setiap orangnya. Selanjutnya, melalui aktivitas bermain pancing ikan tersebut siswa dapat menemukan arti bahwa pengurangan sebagai *taking away* yaitu pada saat siswa mendapatkan ikan dari kegiatan memancing tersebut sehingga ikan yang ada di kolam akan berkurang. Guru mengeksplorasi hasil permainan tersebut untuk membimbing siswa dalam menemukan konsep pengurangan sebagai *taking away* melalui pengalaman bermain pancing ikan dapat dilihat pada cuplikan wawancara guru dan siswa sebagai berikut:

- Guru : “*Bagaimana hasil permainan kalian? Siapa yang mendapatkan ikan paling banyak?*”
 Siswa : “*Nabil*”
 Guru : “*Kenapa Nabil?*”
 Siswa : “*Karena Nabil dapat 7 ikan*”
 Guru : “*Kalo yang paling sedikit siapa?*”
 Siswa : “*Rozak*”
 Guru : “*Kenapa Rozak?*”
 Siswa : “*Karena Rozak dapat 2 ikan*”
 Guru : “*Jadi ada berapa sisa ikan disini?*”
 Siswa : “*7 ikan*”
 Guru : “*kenapa 7?*”
 Siswa : “*Karena Nabil dapat 7 ikan, Rozak dapat 2, Amira dapat 5, jadi $20 - 7 - 2 - 5$ dan hasilnya 7*”

Dari cuplikan wawancara diatas dapat terlihat bahwa guru membantu siswa memahami pengurangan sebagai *taking away* dengan mengetahui sisa ikan yang ada di kolam setelah mereka melakukan permainan pancing ikan. Selanjutnya, aktivitas siswa pada saat bermain pancing ikan dapat dilihat pada Gambar 2



Gambar 2. Siswa sedang bermain pancing ikan

Dari aktivitas 1, peneliti melihat bahwa siswa merasa senang ketika bermain pancing ikan bersama teman sekelompoknya masing-masing sehingga siswa mulai memahami salah satu makna pengurangan sebagai *taking away*. Hal ini disebabkan terdapat proses ikan yang berkurang dari dalam baskom karena pemancing mendapatkan ikan.

5.2. Aktivitas 2: Menggambarkan situasi

Guru memberikan LAS pada masing-masing kelompok yang terdiri dari 2 pertanyaan pengurangan.

1. Boy mengundang teman-temannya untuk menghadiri acara syukuran atas keberhasilannya mendapat nilai terbaik di sekolah. Acara tersebut dilakukan dalam bentuk membakar ikan bersama. Ibunya telah menyiapkan 10 ekor ikan. Namun ternyata Boy mengundang 15 orang temannya, sehingga Ibunya meminta Boy memancing ikan di kolam untuk menutupi kekurangan tersebut. Berapa banyak ikan yang harus dipancing oleh Boy?
2. Pada hari minggu, Steven mengundang teman-temannya untuk memancing di rumahnya. Dirumahnya terdapat kolam ikan yang berisi 50 ekor ikan nila. Setelah 3 jam, ternyata Steven mendapatkan 8 ekor ikan, Lino mendapatkan 5 ekor ikan dan Wahyu mendapatkan 9 ekor ikan. Berapa sisa ikan di kolam tersebut?

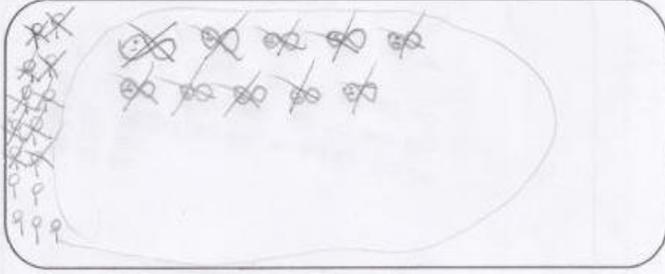
Siswa tidak mengalami kesulitan untuk menyelesaikan soal LAS tersebut. Semua siswa dapat menjawab soal dengan benar. Siswa mengetahui bahwa pertanyaan pertama adalah tentang pengurangan sebagai *Missing addend* dan pertanyaan kedua tentang pengurangan sebagai *taking away*. Untuk jawaban siswa lebih jelas dapat dilihat pada gambar 3 dan cuplikan wawancara anatar guru dan siswa dibawah ini.

- Guru : “*Berapa banyak ikan yang harus Boy pancing?*”
 Siswa : “*5.*”
 Guru : “*kenapa 5?*”
 Siswa : “*Karena Ibu Boy mempunyai 10 ikan, Boy mengundang 15 temannya. Jadi ikannya tidak cukup, Boy harus membutuhkan 5 ikan lagi.*”
 Guru : “*Berapa sisa ikan di kolam?*”
 Siswa : “*28*”

- Guru : “Dapat dari mana?”
 Siswa : “50 kurang 22.
 Guru : “22 itu apa?”
 Siswa : “ikan Steven 8, Lino 5, dan Wahyu 9, jadi semuanya 22”

Boy mengundang teman-temannya untuk menghadiri acara syukuran atas keberhasilannya mendapat nilai terbaik disekolah. Acara tersebut dilakukan dalam bentuk membakar ikan bersama. Ibunya telah menyiapkan 10 ekor ikan. Namun ternyata Boy mengundang 15 orang temannya, sehingga Ibunya meminta Boy memancing ikan dikolam untuk menutupi kekurangan tersebut.

a. Gambarkan situasi tersebut



The diagram shows an oval-shaped pond. On the left side, there are 15 small human figures standing in a line, representing 15 people invited to the event. Inside the pond, there are 10 fish drawn, representing the 10 fish prepared by the mother. The fish are arranged in two rows of five.

b. Berapa banyak ikan yang harus dipancing oleh Boy?

5

Pada hari minggu, Steven mengundang teman-temannya untuk memancing dirumahnya. Dirumahnya terdapat kolam ikan yang berisi 50 ekor ikan nila. Setelah 3 jam, ternyata Steven mendapatkan 8 ekor ikan, Lino mendapatkan 5 ekor ikan dan Wahyu mendapatkan 9 ekor ikan.

a. Gambarkan situasi tersebut



The diagram shows an oval-shaped pond filled with 50 fish drawn in a dense, somewhat chaotic pattern, representing the 50 fish in the pond.

Gambar 3. Jawaban siswa pada LAS 2

Dari Gambar 3 dan cuplikan wawancara antara guru dan siswa diatas, kita dapat melihat bahwa siswa diminta untuk menggambarkan situasi yang ada pada soal cerita tersebut. Kemudian siswa dapat menyilang ikan dan orang secara bersama seperti terlihat pada soal no 1, Jika ada orang yang tidak dapat disilang itu berarti orang tersebut belum mendapatkan ikan, maka siswa dengan mudah menghitung bahwa ada 5 orang yang belum mendapatkan ikan berarti Boy harus mencari 5 ikan lagi. Pertanyaan ini dapat membantu siswa memahami makna bahwa pengurangan sebagai *missing addend*.

Untuk pertanyaan no 2, siswa diminta menyilang jumlah sesuai dengan jumlah ikan yang di dapatkan oleh Wahyu, Lino dan Steven. Lalu siswa dengan mudah menghitung jumlah ikan yang tidak disilang. Dalam kegiatan menyilang ini, siswa dapat menemukan sisa ikan dikolam. Oleh karena itu, pertanyaan kedua ini dapat membantu siswa memahami makna pengurangan sebagai *taking away*.

Dari aktivitas ke dua, kita dapat melihat bahwa beberapa siswa dapat memahami dan menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan pengurangan bilangan cacah. Siswa dapat memahami makna pengurangan sebagai *missing addend* dan *taking away* serta siswa dapat menggunakan notasi matematika.

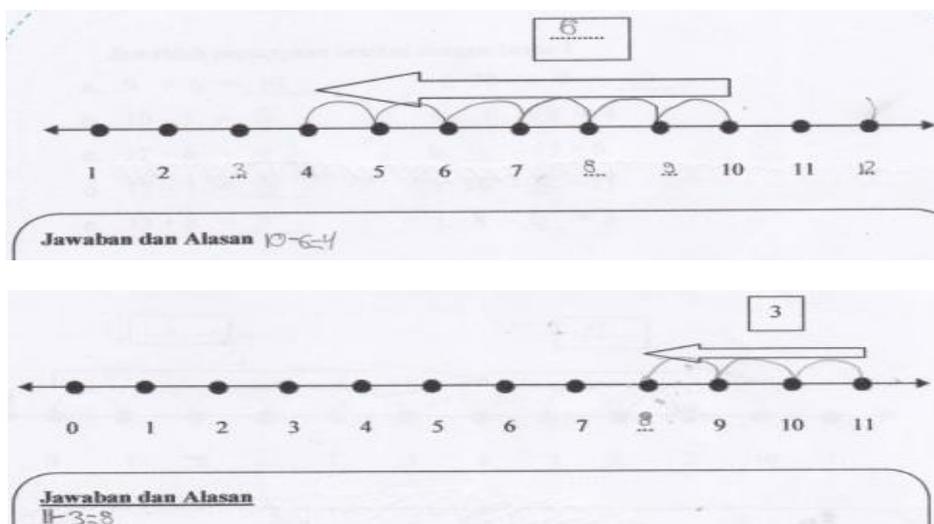
5.3. Aktivitas 3: Menggunakan garis bilangan

Guru memberikan LAS 3 yang terdiri dari 3 garis bilangan yang berkaitan dengan pengurangan bilangan cacah. Siswa harus melengkapi garis bilangan tersebut dan mencari angka yang ada di dalam kotak. Untuk mencari angka di dalam kotak siswa harus melakukan loncatan dari satu angka ke angka yang lainnya. Jawaban siswa dapat dilihat pada gambar 4 dan cuplikan wawancara antara guru dan siswa dibawah ini

Guru : “Angka berapa yang ada di kotak ini?”
 Siswa : “6”
 Guru : “Kenapa 6?”
 Siswa : “Dari 10 ke 4, itu 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jadi ada 6 langkah”

Guru : “Angka berapa yang ada di kotak ini?”
 Siswa : “8”
 Guru : “kenapa 8?”
 Siswa : “11 dan 1, 2, 3. Maka disini 8”

Dari Gambar 4 dan cuplikan wawancara antara guru dan siswa, maka terlihat bahwa siswa harus melakukan loncatan dari satu angka ke angka lainnya, dari angka terbesar ke angka terkecil atau sebaliknya. Hal ini dilakukan untuk menentukan angka berapa yang harus ada di dalam kotak tersebut. Beberapa siswa mampu memrepresentasikan jawaban untuk melengkapi garis bilangan. Siswa terlihat menggunakan strategi menghitung *backward* dan *counting on* untuk menyelesaikan LAS 3 tersebut.



Gambar 4. Jawaban siswa menggunakan garis bilangan

5.4. Aktivitas 4. Menyelesaikan soal pengurangan bilangan cacah

Guru memberikan siswa LAS 4 yang terdiri dari 10 soal yang langsung menggunakan simbol dan 2 soal kontekstual. Soal tersebut berkaitan dengan pengurangan bilangan cacah. Untuk soal kontekstual yang pertama mengenai pengurangan sebagai *taking away*. Sedangkan untuk soal kedua berkaitan dengan pengurangan sebagai *missing addend*. Jawaban siswa dapat dilihat pada gambar 5 dan cuplikan wawancara antara guru dan siswa dibawah ini :

Guru : “Jadi sisa ikan Ayah sekarang berapa?”
 Siswa : “9”
 Guru : “Kenapa 9?”
 Siswa : “Karena $25 - 9 - 7$, maka jawabannya 9”
 Guru : “Berapa ikan lagi yang dibutuhkan Leo?”
 Siswa : “3”
 Guru : “Kenapa 3?”
 Siswa : “20 kurang 17”

Jawablah pertanyaan berikut dengan benar !

a. $9 + 6 = 15$	f. $20 + 7 = 27$
b. $10 - 5 = 5$	g. $12 - 8 = 4$
c. $12 + 6 = 18$	h. $10 - 13 = 6$
d. $17 - 7 = 10$	i. $16 - 5 = 11$
e. $13 + 8 = 21$	j. $8 - 5 = 3$

Ayah mempunyai 25 ekor ikan di kolam. Karena banjir ada 9 ekor ikan menghilang dan 7 lainnya mati.

a. Berapa banyak ikan yang Ayah punya sekarang ?
b. berapa banyak jumlah ikan yang hilang dan mati?

Jawaban $25 - 9 - 7 = 9$
 $9 + 7 = 16$

Gambar 5. Jawaban siswa pada LAS 4

Dari Gambar 5 dan cuplikan wawancara antara guru dan siswa dapat dilihat bahwa beberapa siswa dapat menyelesaikan soal pada LAS 4. Berdasarkan aktivitas 4, terlihat siswa telah memahami pengurangan sebagai *taking away*, pengurangan sebagai *missing addend* dan mampu menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan pengurangan sehingga jawaban siswa sesuai dengan HLT yang telah di desain. Ada berbagai strategi yang digunakan oleh siswa diantaranya menggambarkan situasi, menggunakan simbol, garis bilangan dengan menghitung *backward* dan *counting on*, meski siswa menggunakan cara yang berbeda namun siswa dapat menjawabnya dengan benar. Peneliti masih menemukan beberapa siswa masih menggunakan tanggapan mereka untuk menghitung angka yang mudah.

6. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat ditak kesimpulan bahwa pemahaman siswa dalam pengurangan bilangan cacah dapat dirangsang dengan menggunakan permainan pancing ikan sebagai konteks. Semua strategi dan model yang digunakan oleh siswa dapat membantu mereka untuk memahami konsep pengurangan bilangan cacah. Semua kegiatan yang dilakukan oleh siswa menghasilkan lintasan belajar. Setiap lintasan belajar memiliki peran penting dalam memahami konsep dari informal ke tingkat formal. Lintasan belajar yang dihasilkan terdiri dari bermain pancing ikan, menggambarkan situasi, dan menggunakan garis bilangan. Hal ini berguna untuk memahami pengurangan sebagai pendekatan *taking away*, *missing addend* dan pemecahan masalah kontekstual dalam pengurangan bilangan cacah. Berdasarkan temuan ini, disarankan untuk menerapkan PMRI dalam proses belajar mengajar agar lebih bermakna bagi siswa. Untuk peneliti selanjutnya dapat mengembangkan penelitian ini lebih luas lagi dan menggunakan konteks yang berbeda.

Daftar Pustaka

- Amir, A. (2014). Pembelajaran matematika SD dengan menggunakan media manipulatif. *Forum Pedagogik*, 6(1), 72-89.
- Fosnot, C. T. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work : constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth, NH : Heinemann.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teacher in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-18.
- Jaelani, A., Putri, R.I.I., & Hartono, Y. (2013). Students strategies of measuring time using tradisional gasing game in third grade of primary school. *IndoMS, J.M.S*, 4(1), 39-40
- Murdiyani, N.M., Zulkardi, Putri, R.I.I., Eerde, D.V., & Galen, F.V. (2013). Developing a model to support students in solving subtraction. *IndoMS.JME*, 4(1), 95-112
- Musser, G.L., Burger, W.F., Peterson, B.E. (2008). *Mathematics for Elementary Teachers A Contemporary Approach 8th Edition*. Uniated State of America : John Wiley & Sons Inc
- Muslimin., Putri, R.I.I., & Somakim. (2012). Desain pembelajaran pengurangan bilangan bulat melalui permainan tradisional congklak berbasis PMRI di kelas IV SD. *Jurnal Kreno*, 3(2), 100-112.

- Muslimin. (2013). Desain pembelajaran pengurangan bilangan bulat melalui permainan tradisional congklak berbasis Pendidikan Matematika Realistik Indonesia di kelas IV Sekolah Dasar. Tesis Universitas Sriwijaya. Palembang.
- Nasrullah & Zulkardi. (2011). Building counting by tradisional game : A Mathematics program for young children. *IndoMS. J.M.E*, 2(1), 41-54
- Nursyahidah,F., Putri, R.I.I., Somakim. (2012). Supporting first grade students' understanding of addition up 20 using tradisional game. *IndoMS. JME*, 4(2), 212-223.
- Pasinggi, Y.S. (2000). Membantu mengatasi kesulitan memahami konsep pengurangan bilangan cacah siswa SD kelas III. Diakses pada 9 februari 2016 dari <http://mulok.library.um.ac.id/>
- Purnomo, Y.W. (2014). Serial *Matematika untuk PGSD Bilangan Cacah dan Bulat sebuah Tinjauan Konsep dan Instruksional dalam Pembelajaran*. Bandung: Alfabeta.
- Prahmana, R.C.I., Zulkardi, & Hartono,Y. (2012). Learning multiplication using Indonesia tradisional games in third grade. *IndoMS. J.M.E*, 3(2), 115-132.
- Suwarsono. (2013). Pengembangan kreativitas dalam pembelajaran matematika pada kurikulum 2013. Dalam *prosiding SNMPM Universitas Sebelas Maret, 1*, 1-11. Solo: Universitas Sebelas Maret. Diakses dari <http://math.fkip.uns.ac.id/wp-content/uploads/2014/06/MAKALAH-UTAMA-Vol-1.pdf>
- Wijaya, A. (2012). *Pendidikan Matematika Realistik – Suatu Alternatif Pendekatan Pembelajaran Matematika*. Yogyakarta : Graha ilm.

PENGEMBANGAN MODUL SEGI EMPAT BERBASIS PENEMUAN TERBIMBING UNTUK MEMFASILITASI KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS SISWA SMP

Zubaidah Amir MZ, Liti Novyanti

*Program Studi Pendidikan Matematika FTK UIN Suska Riau
zubaidah.amir@uin-suska.ac.id*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan pengembangan modul pembelajaran berbasis penemuan terbimbing yang valid dan praktis dalam memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematis matematika siswa. Jenis penelitian ini merupakan penelitian pengembangan dengan menggunakan model ADDIE (*Analysis, Design, Development, Implementation, dan Evaluation*). Penelitian ini dilakukan di Sekolah Menengah Pertama Negeri 25 Pekanbaru. Subjek penelitian adalah 30 siswa kelas VII.9 dan objek penelitian adalah modul pembelajaran berbasis penemuan terbimbing, dan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa. Instrumen pengumpulan data berupa angket uji validitas, angket uji praktikalitas dan tes. Data yang diperoleh kemudian dianalisis dengan teknik analisis statistik deskriptif. Modul hasil pengembangan telah teruji dengan tingkat kevalidan 84,14% (valid) dan tingkat kepraktisan 86,26% (praktis). Modul pembelajaran berbasis penemuan terbimbing telah berhasil dalam memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematis siswa, hal ini ditunjukkan dengan nilai rata-rata tes yang berada pada kategori tinggi yaitu 81,54. Dari hasil tersebut mengidentifikasi bahwa modul yang dikembangkan valid dan praktis dalam memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.

Kata Kunci: ADDIE, pemecahan masalah validitas, praktikalitas.

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari juga sering kita jumpai konsep matematika, seperti dalam perdagangan, manajemen, dan lain-lain. Menurut Noviarni [1] salah satu tujuan yang diharapkan dari pelajaran matematika sekolah, yakni dapat mengerti dan paham dengan konsep matematika dan mampu memecahkan masalah matematis yang berguna bagi kehidupan sehari-hari di masyarakat, untuk itu manusia pada zaman sekarang ini harus menguasai matematika. Ini juga didukung oleh pendapat Russeffendi [2] bahwa matematika lebih menekankan kegiatan dalam dunia rasio (penalaran), bukan menekankan dari hasil eksperimen atau hasil observasi. Matematika terbentuk karena pikiran-pikiran manusia yang berhubungan dengan ide, proses dan penalaran. Hal ini berarti kemampuan pemecahan masalah matematika merupakan fondasi untuk mendapatkan atau mengkonstruksi pengetahuan matematika.

Suatu masalah matematis menurut Duncer yang dikutip oleh Robertson [3] bermakna memiliki suatu tujuan menyelesaikan persoalan matematis namun tidak mengetahui bagaimana cara agar tujuan itu dapat dicapai. Situasi ini memerlukan tindakan, berpikir untuk membuat perencanaan untuk memediasi situasi yang ada dengan situasi yang diharapkan. Dengan demikian berarti guru di sekolah harus mengembangkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa dalam pembelajaran matematika.

Dalam proses pembelajaran, setiap siswa berbeda secara individual dalam memperoleh kemampuannya, baik dari segi kecepatan belajarnya maupun dari bakat yang telah dimilikinya. Selain itu gaya mengajar guru juga mempengaruhi belajar siswa, ada gaya mengajar yang cocok bagi siswa tertentu akan tetapi kurang cocok bagi siswa yang lain. Salah satu usaha untuk mempertimbangkan perbedaan individual itu adalah dengan pengajaran berdasarkan sumber-sumber belajar. Pengajaran berdasarkan sumber belajar ini menurut Nasution [4] diantaranya adalah pengajaran modul. Pengajaran dengan

menggunakan modul memberi kesempatan yang lebih besar dan waktu yang lebih banyak kepada guru untuk memberikan bantuan dan perhatian individual kepada setiap murid yang membutuhkannya, tanpa mengganggu atau melibatkan seluruh kelas. Tujuan penyusunan modul menurut Hamdani [5] adalah untuk menyediakan bahan ajar yang sesuai dengan tuntutan kurikulum dengan mempertimbangkan kebutuhan siswa, yakni bahan ajar yang sesuai dengan karakteristik materi ajar dan karakteristik siswa, serta setting atau latar belakang lingkungan sosialnya.

Sementara itu, bahan ajar yang tersedia saat ini di SMP pada umumnya berupa buku paket dengan materi yang disajikan terkadang terlalu padat sehingga kurang menarik bagi siswa untuk mempelajarinya. Selain itu juga terdapat LKS yang digunakan guru dalam pembelajaran, namun LKS ini hanya digunakan sebagai latihan siswa dalam menjawab soal-soal. Kemudian contoh-contoh soal yang terdapat di dalam buku maupun LKS cenderung mudah sedangkan soal-soal latihan yang diberikan cenderung sulit. Soal-soal yang disajikan kebanyakan adalah soal-soal yang masih umum untuk pemahaman konsep, sehingga kurang dapat membantu dalam memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematika siswa seperti yang diharapkan penulis dalam penelitian ini.

Berdasarkan permasalahan tersebut, maka diperlukan suatu bahan ajar yang dapat memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematis siswa. Dalam hal ini penulis mengembangkan sebuah modul dengan suatu metode pembelajaran sehingga dapat memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematis siswa. Metode yang dimaksud adalah Metode Penemuan Terbimbing, dimana penemuan terbimbing merupakan metode penemuan yang dipandu oleh guru. Setiawan [6] menjelaskan bahwa dalam penemuan terbimbing peran siswa cukup besar karena pembelajaran tidak lagi berpusat pada guru tetapi pada siswa, siswa banyak belajar sendiri, mengembangkan kreativitas dalam memahami konsep dan memecahkan masalah. Hal tersebut sejalan dengan yang dikemukakan Effendi [7] bahwa kemampuan pemecahan masalah siswa yang belajar menggunakan metode penemuan terbimbing lebih baik dari pada siswa yang menggunakan metode konvensional. Sehingga diharapkan dengan modul berbasis penemuan terbimbing bisa memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematika siswa.

Soedjana [8] menyimpulkan bahwa kata penemuan sebagai metode mengajar merupakan penemuan yang dilakukan oleh siswa itu sendiri. Hal ini berarti, penemuan yang dimaksud di sini bukan penemuan hal baru, sebab apa yang ditemukan itu sebenarnya telah ditemukan orang sebelumnya. Setiawan [6] menegaskan bahwa penemuan di sini adalah penemuan pura-pura dan baru bagi siswa yang bersangkutan saja yang telah direkayasa dan disiapkan oleh guru, dan sampai seberapa jauh siswa dibimbing tergantung pada kemampuannya dan pada materi yang sedang dipelajari. Berdasarkan latar belakang di atas, penulis melakukan penelitian pengembangan untuk menghasilkan produk berupa Modul berbasis penemuan terbimbing khusus pada materi segi empat untuk siswa SMP.

2. Metodologi

2.1. Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang dilakukan adalah metode penelitian dan pengembangan (*Research and Development*). Menurut Sugiyono [9] metode penelitian dan pengembangan ialah metode penelitian yang digunakan untuk menghasilkan produk tertentu dan menguji keefektifan produk tersebut. Didalam *penelitian* pengembangan ini akan digunakan model pengembangan ADDIE. Benny A. Pribadi [10] mengungkapkan bahwa salah satu model desain pembelajaran yang memperlihatkan tahapan-tahapan dasar desain sistem pembelajaran yang sederhana dan mudah dipelajari adalah model ADDIE. Model ini terdiri dari lima fase atau tahap utama, yaitu (*A*)*nalysis*, (*D*)*esign*, (*D*)*evelopment*, (*I*)*mplementation*, dan (*E*)*valuation*. Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2015/2016 pada bulan April sampai dengan Mei di SMP Negeri 25 Pekanbaru.

2.2. Subjek dan Objek Penelitian

Objek penelitian pada penelitian pengembangan ini adalah modul matematika berbasis penemuan terbimbing dan kemampuan pemecahan masalah matematika siswa. Subjek penelitian untuk melihat kevalidan instrumen adalah ahli instrumen yaitu 2 dosen Pendidikan Matematika UIN SUSKA Riau, sedangkan subjek penelitian untuk melihat kevalidan syarat didaktik, konstruktif, dan metode penemuan terbimbing adalah ahli materi pembelajaran yang terdiri dari 2 dosen Pendidikan Matematika UIN SUSKA Riau dan Guru SMP Negeri 25 Pekanbaru. Kemudian subjek penelitian untuk melihat kevalidan syarat teknis adalah ahli teknologi pendidikan yang terdiri dari 2 dosen Pendidikan Matematika UIN SUSKA Riau.

Subjek uji coba penelitian untuk melihat kepraktisan produk adalah siswa kelas VII SMP Negeri 25 Pekanbaru. Subjek uji coba ini dipilih sesuai rekomendasi dari guru bidang studi matematika di sekolah tersebut. Siswa yang menjadi subjek uji coba keompok kecil adalah siswa kelas VII.8 yang dipilih

sebanyak 7 orang. Kemudian subjek uji kelompok terbatas adalah siswa kelas VII.9 yang berjumlah 30 orang siswa.

2.3. Teknik Pengumpulan dan analisis Data

Teknik pengumpulan data untuk menentukan nilai validitas modul matematika berbasis penemuan terbimbing melalui proses validasi dan wawancara dengan validator. Teknik pengumpulan data praktikalitas modul yaitu dengan menggunakan angket praktikalitas kepada siswa baik kelompok kecil maupun kelompok terbatas. Sedangkan data kemampuan pemecahan masalah matematika siswa setelah menggunakan modul matematika berbasis penemuan terbimbing dikumpulkan melalui tes pemecahan masalah matematis. Data validitas dan praktikalitas dianalisis secara statistic deskriptif persentase dengan kriteria tingkat kevalidan dan kepraktisan berpandu pada Riduwan [11], sedangkan kriteria kemampuan pemecahan masalah matematis berpandu pada Zubaidah [12] pada tabel 1 dan 2 berikut:

Tabel 1: Interpretasi Data

No	Interval	Interpretasi
1	90 % - 100 %	Sangat Praktis/Sangat Valid
2	70 % - 89 %	Praktis/Valid
3	50 % - 69 %	Cukup Praktis/Cukup Valid
4	30 % - 49 %	Kurang Praktis/Kurang Valid
5	20 % - 29 %	Tidak Praktis/Tidak Valid

Sumber: Riduwan [11]

Tabel 2: Kriteria Umum Kualifikasi Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa

%	Predikat
80-100	Tinggi
60-79	Sedang
<60	Rendah

Sumber: Zubaidah [12]

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Tahap Analisis Kinerja

3.1.1. Hasil Analisis Kinerja

Analisis kinerja dilakukan dengan merinci isi materi ajar dalam bentuk garis besar. Analisis ini mencakup analisis struktur isi dan analisis konsep.

3.1.2. Hasil Analisis Kebutuhan

Modul berbasis penemuan terbimbing ini digunakan oleh siswa SMP kelas VII. Penemuan terbimbing merupakan metode yang memungkinkan siswa untuk melakukan kegiatan penemuan melalui pembelajaran yang aktif. Penekanan utama dalam proses pembelajaran dengan metode penemuan terbimbing terletak pada kemampuan siswa untuk memahami, kemudian mengidentifikasi dengan cermat dan teliti, dan diakhiri dengan memberikan jawaban atau solusi atas permasalahan yang ada. Jadi dengan Modul berbasis penemuan terbimbing diharapkan dapat memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematika siswa.

3.2. Tahap Perancangan

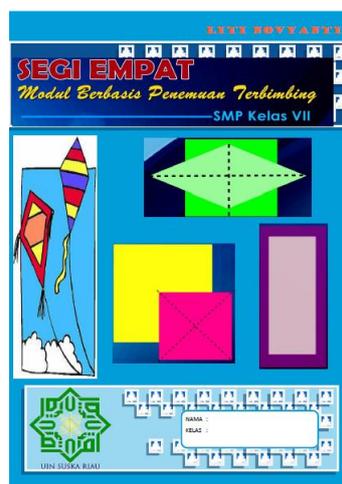
Sistematika penulisan modul tertera pada tabel berikut ini mengadopsi dari Daryanto dan Aris Dwicahyono [13]

Tabel 3: Sistematika Penulisan Modul

Halaman Sampul
Kata Pengantar
Daftar Isi
I. PENDAHULUAN
A. Petunjuk Penggunaan Modul
B. SK, KD, dan Indikator Pembelajaran
C. Peta Konsep
II. PEMBELAJARAN
A. Pembelajaran 1
1) Tujuan
2) Uraian Materi
3) Rangkuman
4) contoh
5) Tes
6) Evaluasi
B. Pembelajaran 2 – n (dan seterusnya, mengikuti jumlah pembelajaran yang dirancang)
1) Tujuan
2) Uraian Materi
3) Rangkuman
4) Contoh
5) Tes
6) Evaluasi
III. Kunci Jawaban
IV. Daftar Pustaka
V. Tentang Penulisan

Berikut ini ditampilkan beberapa komponennya sebelum dan setelah direvisi beserta penjelasannya sebagai berikut.

Cover atau sampul merupakan salah satu unsur penting yang menjadi daya tarik siswa untuk membaca. Cover modul segi empat berbasis penemuan terbimbing didesain dengan variasi warna agar menarik perhatian siswa. Kemudian pada cover juga ditampilkan gambar bangun datar sesuai dengan materi yang terdapat pada modul. Adapun desain cover dapat dilihat seperti gambar berikut.



Gambar 1. Disain Cover

Animasi yang lucu dan berwarna membuat siswa lebih tertarik untuk belajar dengan menggunakan modul.



Gambar 2. Gambar Animasi dalam Modul
Sumber: <https://www.google.co.id> [14]

3.3. Tahap Pengembangan

Setelah selesai pembuatan desain modul, kemudian modul yang dikembangkan divalidasi oleh validator ahli teknologi pendidikan dan ahli materi pembelajaran dengan menggunakan angket. Hasil validasi oleh ahli teknologi pendidikan dan ahli materi pembelajaran pada tabel 4 dibawah.

Hasil analisis data menunjukkan bahwa modul segi empat berbasis penemuan terbimbing dikategorikan valid dengan nilai validitas 84,14%. Hal ini menunjukkan bahwa modul berbasis penemuan terbimbing yang dihasilkan telah teruji dan dinyatakan valid oleh validator sehingga sudah layak dijadikan bahan ajar sebagaimana tertera pada tabel 5 dibawah.

Tabel 4: Hasil Penilaian Ahli Teknologi Pendidikan Terhadap Modul Segi Empat Berbasis Penemuan Terbimbing

No	Indikator	Nilai Validas	Kriteria
1	Penggunaan huruf dan tulisan yang sesuai	84, 28%	Valid
2	Desain Modul	80%	Valid
3	Penggunaan gambar	93,33%	Sangat Valid
4	Modul berpenampilan menarik	80%	Valid
	Rata-rata	84,12%	Valid

Tabel 5: Hasil Penilaian Ahli Materi Pembelajaran Terhadap Modul Segi Empat Berbasis Penemuan Terbimbing

No	Variabel Penelitian	Indikator	Nilai Validitas	Kriteria
1	Syarat Didaktik	Kesesuaian modul dengan kurikulum dan indikator pembelajaran	86,7%	Sangat valid
		Penekanan pada kemampuan pemecahan masalah matematika	65%	Cukup valid
		Ketercapaian kompetensi pada latihan soal	80%	Valid
2	Syarat Konstruksi	Penggunaan bahasa yang sesuai dengan tingkat perkembangan siswa	90%	Sangat valid
		Penyajian materi dengan jelas dan sederhana serta memiliki judul dan rincian materi	90%	Sangat valid
		Penyediaan ruang khusus untuk menulis atau menggambar sesuatu pada modul	80%	Valid
		Kelengkapan Modul	86,7%	Sangat valid
		Tujuan yang jelas dan bermanfaat	85%	Sangat valid

3	Penemuan Terbimbing	Penyajian kegiatan belajar yang mengarahkan siswa untuk menemukan konsep pembelajaran	90%	Sangat valid
		Penyajian contoh yang kontekstual untuk merangsang daya pikir dan analisis siswa.	90%	Sangat valid
		Mengarahkan siswa dalam pencapaian pemecahan masalah	80%	Valid
Rata-rata			84,17%	valid

Hasil analisis data menunjukkan bahwa modul berbasis penemuan terbimbing yang dihasilkan telah valid dari segi syarat teknis (84,12%), dari penilaian ahli materi aspek didaktik, konstruksi, dan pendekatan penemuan terbimbing (84,17%). Hasil validasi yang dilakukan oleh ahli teknologi pendidikan dianalisis secara deskriptif. Untuk melihat hasil penilaian validitas secara keseluruhan maka penilaian dari ahli teknologi pendidikan dan ahli materi pembelajaran dijumlahkan dan dibagi dua seperti tampak pada tabel berikut.

Tabel 6: Perhitungan Data Hasil Uji Validitas Secara Keseluruhan

No.	Variable Validitas Modul	Persentase Keidealan	Kategori
1	Ahli Teknologi Pendidikan	84,12%	Valid
2	Ahli Materi Pembelajaran	84,17%	Valid
Rata-rata		84,14%	Valid

3.4. Tahap Implementasi

3.4.1. Data Praktikalitas

Setelah direvisi berdasarkan saran dari para ahli baik teknologi pendidikan maupun materi pembelajaran. Selanjutnya modul tersebut diujicobakan pada kelompok kecil yang berjumlah 7 orang melalui angket praktikalitas modul. Hasil penilaian uji praktikalitas pada saat uji coba dipaparkan dalam tabel sebagai berikut.

Tabel 7: Persentase Praktikalitas Pada Saat Uji Coba Kelompok Kecil

No.	Variabel Validitas Modul	Nilai Praktikalitas	Kriteria
1	Minat siswa dan tampilan modul	84,57%	Praktis
2	Proses penggunaan	80%	Praktis
3	Penemuan terbimbing dan kemampuan pemecahan masalah matematika	81,71%	Praktis
4	Waktu	80%	Praktis
5	Evaluasi	74,28	Praktis
Rata-rata		82.21%	Praktis

Hal ini berarti secara keseluruhan modul matematika yang dikembangkan diminati oleh siswa karena memudahkan siswa memahami materi segi empat serta praktis digunakan sebagai bahan ajar. Dengan demikian modul ini bisa dilanjutkan dengan uji kelompok terbatas. Selanjutnya dilakukan uji coba kelompok terbatas yang dilakukan di kelas VII.9 SMP Negeri 25 Pekanbaru yang berjumlah 30 siswa. Hasil penilaian uji praktikalitas pada saat uji coba dipaparkan dalam tabel sebagai berikut.

Tabel 8: Persentase Praktikalitas Pada Uji Coba Kelompok Terbatas

No.	Variabel Validitas Modul	Nilai Praktikalitas	Kriteria
1	Minat siswa dan tampilan modul	88,87%	Praktis
2	Proses penggunaan	84,13%	Praktis
3	Penalaran dan materi	81%	Praktis
4	Waktu	79,33%	Praktis
5	Evaluasi	89,33%	Praktis
Rata-rata		86,26%	Praktis

Hal ini berarti secara keseluruhan modul matematika yang dikembangkan diminati oleh siswa karena memudahkan siswa untuk memahami materi segi empat serta praktis digunakan sebagai bahan

ajar. Siswa merasa tertarik belajar dengan menggunakan modul segi empat berbasis penemuan terbimbing karena penyampaian materi disampaikan secara teratur. Modul matematika ini juga sangat menarik karena di dalamnya terdapat gambar dan warna yang dapat memotivasi siswa untuk belajar.

3.4.2. Data Tes Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa

Setelah siswa diberikan pembelajaran menggunakan modul segi empat berbasis penemuan terbimbing, diakhir pembelajaran siswa diberikan soal pemecahan masalah guna mengetahui tingkat kemampuan pemecahan masalah matematis siswa. Berikut data hasil tes kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.

Tabel 9: Hasil Tes Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa

No.	Jumlah siswa	Interval	Kriteria
1	19 orang	80-100	Tinggi
2	11 orang	60-79	Sedang
Rata-rata kelas		81,54	Tinggi

Berdasarkan data di atas, secara kalsikal siswa kelas VII.1 yaitu 19 dari 30 siswa memiliki kategori tinggi dalam kemampuan pemecahan masalah matematis. Dengan demikian 63,3% siswa memperoleh prediket tinggi. Sedangkan presentasi nilai rata-rata siswa adalah 81,54, maka kemampuan pemecahan masalah matematika siswa berada pada kategori tinggi.

3.5. Tahap Evaluasi

Tahap evaluasi dilakukan setelah melakukan validasi dan uji coba lapangan. Modul segi empat berbasis penemuan terbimbing sudah dinyatakan valid oleh ahli teknologi pendidikan dan ahli materi pembelajaran. Kemudian, pada tahap uji coba modul dinyatakan praktis berdasarkan penilaian siswa serta berdasarkan hasil tes modul dinyatakan dapat memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematika siswa. Saran-saran yang diberikan oleh validator dan siswa dijadikan sebagai bahan pertimbangan dalam penyempurnaan Modul segi empat berbasis penemuan terbimbing.

4. Penutup

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diuraikan sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan bahwa:

1. Modul segi empat berbasis penemuan terbimbing dinyatakan valid pada uji validitas dengan persentase keidealan 84,14%. Hal ini menunjukkan bahwa modul yang dikembangkan telah memenuhi syarat didaktik, syarat konstruksi, syarat teknis dan metode penemuan terbimbing. Dengan demikian, modul yang dikembangkan dapat digunakan dalam proses pembelajaran.
2. Modul segi empat berbasis penemuan terbimbing termasuk kategori praktis pada uji coba kelompok kecil dengan persentase keidealan 82,21% dan kategori praktis pada uji coba kelompok terbatas dengan persentase keidealan 86,26%. Hal ini menunjukkan bahwa modul yang dikembangkan dapat menarik minat siswa dan mudah digunakan dalam proses pembelajaran.
3. Setelah mengikuti pembelajaran menggunakan modul segi empat berbasis penemuan terbimbing, rata-rata nilai tes kemampuan pemecahan masalah matematis siswa adalah 81,54. Dengan nilai rata-rata tersebut siswa diberi prediket tinggi dalam penguasaan kemampuan pemecahan masalah matematis. Hal ini menunjukkan bahwa modul sudah dapat memfasilitasi kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.

4.2. Saran Pemanfaatan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, peneliti menyarankan hal-hal berikut ini:

1. Peneliti menyarankan agar modul ini digunakan dalam pembelajaran bangun datar segi empat di kelas VII pada semester genap karena telah diuji cobakan dengan hasil yang baik.
2. Penggunaan modul segi empat berbasis penemuan terbimbing ini dikolaborasikan dengan pembelajaran matematika yang menarik lainnya agar pembelajaran menjadi lebih bervariasi, seperti dengan menggunakan *cooperative learning*, *the power of two* dan lain sebagainya.

4.3. Saran Pengembangan Produk

Modul segi empat berbasis penemuan terbimbing ini dikembangkan lebih lanjut dengan melakukan eksperimen menggunakan kelas pembanding agar kualitas modul ini benar-benar teruji dalam hal pemanfaatannya. Peneliti menyarankan bagi peneliti selanjutnya agar mengembangkan modul segi empat berbasis penemuan terbimbing pada materi yang sama atau berbeda terhadap kemampuan pemecahan

masalah matematis. Sehingga modul ini dapat dijadikan sebagai bahan ajar, atau sebagai contoh yang dapat digunakan dalam proses pembelajaran.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada validator dosen pendidikan matematika UIN Suska Riau, guru matematika dan siswa SMPN 25 pekanbaru yang terlibat dalam pengambilan data penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] Noviarni. (2014). *Perencanaan Pembelajaran Matematika dan Aplikasinya*. Pekanbaru: Benteng Media.
- [2] Ruseffendi, E.T. (2006). *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- [3] Robertson, S. I. (2005). *Problem Solving*. Philadelphia: Psychology Press the Taylor & Francis e-Library, ISBN 0-203-76619-9.
- [4] Nasution. S. (2011). *Berbagai Pendekatan dalam Proses Belajar dan Mengajar*. Jakarta: Bumi Aksara.
- [5] Hamdani. (2011). *Strategi Belajar Mengajar*. Bandung : Pustaka Setia.
- [6] Setiawan. (2010). *Strategi Pembelajaran Matematika*. Yogyakarta: Depdiknas.
- [7] Effendi L.A. (2012). Pembelajaran Matematika dengan Metode Penemuan Terbimbing untuk meningkatkan Kemampuan Representasi dan Pemecahan Masalah Matematis SMP, *Jurnal Pendidikan* Vol. 13 No. 2.
- [8] Soedjana. (1985). *Strategi Belajar Mengajar Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka. h. 82
- [9] Sugiyono. (2013). *Metode Penelitian Pendidikan*. Bandung: Alfabeta.
- [10] Benny A Pribadi. (2009). *Model Desain Sistem Pembelajaran*. Jakarta: Dian Rakyat.
- [11] Riduwan. (2011). *Skala Pengukuran Variabel variable Penelitian*. Bandung: Alfabeta. h. 14-15
- [12] Zubaidah Amir MZ. (2010). The Implementation of Mathematics Teaching with Open-Ended Approach to UIN Suska Riau Mathematics Student's Ability of Mathematical Creative Thinking. *Proceeding International Seminar Mathematics with tema "on Mathematics and It's Usage in other areas*. Universitas Riau.
- [13] Daryanto dan Aris Dwicahyono. (2014). *Pengembangan Perangkat Pembelajaran*. Yogyakarta: Gava Media.
- [14] <https://www.google.co.id/imgres?imgres?imgurl=http://www.motivasibelajar.com/pic1/skora13.gif&imgref>

DAMPAK PEMAHAMAN MATEMATIS SISWA SD MARGINAL MELALUI PENDEKATAN LABORATORIUM MINI KAWASAN KEBUN SAWIT

Sehatta Saragih

Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Riau,
ssehatta@yahoo.com

Abstract

The idea of this study starts from the scientific approach as the main approach to curriculum 2013, and the weakness of reading ability of students at marginal school in palm oil area. In connection with that, to optimize the implementation of scientific, the utilization of simple media known as a mini laboratory (lab-mini) based environment is viewed exactly as an alternative on improving the quality of learning. Mathematical Understanding Ability (KPM) is needed to be built optimally because this ability is the fundamental ability on developing the other mathematical abilities. The purpose of this study is to assess the impact of mini-lab approach using media designed palm oil environment to mathematics understanding ability of students at marginal school in palm oil area comprehensively. The object of this study is limited on the introduction topic of number 1-20. The used study design is One Group Pretest and PostTest Design. The subject were students at first grade from four marginal elementary schools in palm oil area. The analyzed data showed that the implementation of mini-lab approach had a positive impact to mathematical understanding ability of students, viewed as a whole or in terms of the ability to identify math objects, to interpret ideas or concepts, to find examples as facts or concepts, to give examples and not examples about fact or concept.

Keywords: Mini-lab approach, Mathematical Understanding Ability

Abstrak

Ide penelitian ini berangkat dari pendekatan saintifik sebagai pendekatan utama dalam kurikulum 2013, dan lemahnya kemampuan membacakan siswa sekolah marginal kawasan kebun sawit. Sehubungan dengan itu maka untuk mengotimalkan penerapan saintifik tersebut memanfaatkan media-media sederhana yang dikenal dengan laboratorium mini (lab-mini) berbasis lingkungan sebuah alternative yang dipandang tepat dalam meningkatkan kualitas pembelajaran. Kemudian Pemahaman Matematis (KPM) adalah kemampuan yang mendasar dalam membangun kemampuan matematis lainnya, maka kemampuan ini perlu dibangun secara optimal. Tujuan penelitian ini adalah mengkaji secara komperhensip dampak pendekatan lab-mini menggunakan media berdesain lingkungan kebun sawit terhadap KPM siswa SD marginal kawasan kebun sawit. Objek kajian dalam penelitian ini dibatasi pada topic mengenal bilangan 1-20. Desain penelitian yang digunakan adalah *One Group Pre and Post Test Design*. Subjek penelitian ini adalah siswa kelas I dari empat SD marginal kawasan kebut sawit. Dari hasil analisis data diperoleh fakta bahwa penerapan pendekatan lab-mini memberikan dampak positif terdapat KPM siswa, baik ditinjau secara keseluruhan maupun ditinjau dari aspek yakni kemampuan kengidentifikasi objek matematika, menginterpretasi gagasan atau konsep, menemukan contoh sebagai fakta atau konsep, memberikan contoh dan bukan contoh fakta atau konsep.

Kata kunci: Pendekatan lab-mini, KPM

1. Pendahuluan

Kemampuan Pemahaman Matematis (KPM) dipandang sebagai kemampuan mendasar dalam membangun kemampuan matematis lainnya, seperti kemampuan komunikasi, kemampuan penalaran, kemampuan koneksi, kemampuan representasi dan kemampuan pemecahan masalah. Hal inilah yang mendasari KPM menjadi salah satu tujuan pembelajaran matematika pada semua jenjang pendidikan.

Pernyataan senada juga dinyatakan dalam NCTM bahwa pemahaman matematis merupakan aspek yang sangat penting dalam prinsip pembelajaran matematika^[1].

Dalam K13 dinyatakan bahwa pendekatan utama dalam pembelajaran semua bidang studi adalah saintifik. Mengingat tahap perkembangan mentalnya siswa seumur Sekolah Dasar (SD) masih pada tahap konkrit, maka pendekatan ini dipandang tepat diterapkan di jenjang SD. Pendekatan saintifik menekankan pemanfaatan lingkungan terdekat siswa sebagai sarana membangun pengetahuan siswa. Hal ini mengindikasikan bahwa untuk siswa SD yang berada di kawasan kebun sawit seharusnya dibelajarkan dengan memanfaatkan lingkungan kebun sawit sebagai sumber belajar.

Selanjutnya, hasil penelitian terkait dengan SD marginal kawasan kebun sawit menunjukkan bahwa kemampuan membaca yang lemah, KPM siswa sangat rendah, pengelolaan pembelajaran yang jauh dari kata berkualitas, dan interaksi siswa untuk membangun pengetahuannya tidak optimal^[2]. Mengingat SD sebagai peletak dasar pengetahuan matematika, seharusnya memiliki kemampuan pemahaman matematika yang baik, agar mampu memahami matematika yang lebih tinggi maka perlu perbaikan pembelajaran. Dari kedua kondisi ini maka perlu upaya perbaikan proses pembelajaran di SD marginal kawasan kebun sawit agar kualitas pembelajarannya setara dengan sekolah formal lainnya. Disamping itu, Herman H^[3] mengemukakan bahwa perkembangan intelektual siswa yang masih pada tahap konkrit dan karakteristik siswa yang lebih cenderung belajar sambil bermain, maka pembelajaran di jenjang SD sebaiknya menggunakan media-media konkrit yang dekat dengan lingkungan mereka agar lebih dikenal dan diterima dengan baik. Hal inilah yang mendasari pemanfaatan kawasan kebun sawit dijadikan desain media untuk membelajarkan siswa SD marginal kawasan kebun sawit.

Selanjutnya mengingat pendekatan dalam Kurikulum 2013 (K13) yang menerapkan pendekatan saintifik maka pemanfaatan media berdesain kawasan kebun sawit dipandang tepat sebagai alternatif dalam pengelolaan pembelajaran. Mengingat media-media yang digunakan sederhana dan SD marginal hanya memiliki ruang kelas sebagai tempat belajar maka pemanfaatan media berdesain kawasan kebun sawit dalam pembelajaran dapat diintegrasikan kedalam pendekatan laboratorium mini (lab-mini) yang menggunakan media pembelajaran yang berdesain kawasan kebun sawit. Dengan demikian pendekatan lab-mini yang saintifik dalam penelitian ini dapat dimaknai sebagai sebuah pendekatan belajar dimana siswa diberi kesempatan belajar dalam ruang kelas dengan menggunakan media pembelajaran yang berdesain kawasan kebun sawit.

Penerapan metode laboratorium-mini (lab-mini) yang menggunakan alat peraga yang berdesain kawasan kebun sawit yang merupakan lingkungan siswa akan lebih mudah diterima siswa, lebih dikenal, bermakna dan dapat bertahan lama. Berangkat dari kondisi pembelajaran sedemikian rupa, maka dipandang dapat mendorong siswa lebih aktif dan mudah memahami matematika. Implikasinya adalah penerapan Lab-mini dengan menggunakan media-media pembelajaran yang berdesain kawasan kebun sawit akan berkontribusi positif terhadap KPM siswa. Sehubungan dengan hal ini maka perlu dikaji secara konperhensif dampak penerapan pendekatan lab-mini berdesain kebun sawit terhadap KPM siswa.

2. Kajian Teori

2.1. Pendekatan Laboratorium Mini

Pengelolaan pembelajaran senantiasa memperhatikan karakteristik peserta didik dan materi yang disampaikan. Hal ini mendasari guru senantiasa menguasai bahan ajar dan cara penyampaiannya. Karakteristik siswa SD yang masih berpikir konkrit dan belajar sambil bermain, dan jenjang SD merupakan awal dari upaya membangun pengetahuan matematika memberikan pertimbangan bagi guru dalam pengelolaan pembelajaran. Terkait dengan hal ini Bruner(dalam Hudojo)^[3] mengemukakan bahwa cara terbaik bagi seseorang siswa untuk memulai belajar tentang konsep, prinsip atau aturan dalam matematika adalah dengan cara mengkonstruksikan konsep, prinsip atau aturan itu sendiri dan lebih baik lagi, bila siswa itu menggunakan konteks-konteks nyata yang mereka alami dalam merumuskan ide-ide tersebut.

Pernyataan di atas, mengisyaratkan bahwa dalam pengelolaan pembelajaran matematika di SD, guru harus mampu menciptakan kondisi dimana siswa dapat membangun pengetahuannya dengan memanfaatkan media yang kontekstual. Salah satu strategi pembelajaran yang sejalan cara belajar yang dikemukakan Bruner di atas adalah penerapan pendekatan laboratorium mini (lab-mini) dengan menggunakan media yang berdesain lingkungan siswa.

Berdasarkan beberapa sumber, Bell^[4], Collins^[5], Daniel Lucy^[6] tentang pengertian laboratorium mini, dapat disarikan sebagai sarana belajar dengan menggunakan peralatan sederhana, tidak memiliki ruang khusus dan aktivitas belajarnya sama dengan laboratorium umumnya. Bell^[4] berpendapat bahwa *laboratory activities is one way to give our students with interesting problems to solve using newly mathematics objects, create a relaxed learning environment where students can learn at their own rate, and help students to be responsible for their own learning* . Kemudian Collins^[6] mengemukakan bahwa

laboratorium matematika dan laboratorium mini memberikan siswa kesempatan untuk menyelidiki dan menemukan dengan bekerja dalam kelompok kooperatif atau bekerja mandiri. Sedangkan Daniel Lucy^[7] mengemukakan bahwa kegiatan laboratorium mini melibatkan para siswa dalam belajar dengan metode ilmiah, sehingga dapat digunakan untuk melatih kemampuan berpikir kritis.

Pernyataan di atas menunjukkan bahwa kegiatan lab-mini memberikan kesempatan siswa untuk terlibat aktif dalam membangun pengetahuan dan kemampuan berpikir matematis. Daniel Lucy^[6] mengemukakan bahwa keunggulan lab-mini tersebut adalah: (1) dengan peralatan yang minimum, para siswa dapat melakukan kegiatan praktikum; (2) mempermudah siswa dalam memahami materi pelajaran, karena siswa dihadapkan dengan objek langsung; (3) membimbing siswa untuk menemukan sendiri; (4) melatih siswa untuk berpikir kritis; (5) melatih siswa untuk bertanya sehingga siswa lebih aktif; (5) mendorong siswa untuk menemukan konsep-konsep baru; (6) memberikan kesempatan untuk belajar dengan mempelajari menggunakan metode ilmiah.

Beberapa hasil studi pendahuluan terkait dengan penerapan pendekatan lab-mini diantaranya adalah Saragih^[7] mengemukakan penerapan pendekatan lab-mini efektif diterapkan dalam pembelajaran matematika dan meningkatkan KPM siswa SDN 012 Teluk Rimba Kec. Koto Gasib Kab. Siak. Izwita^[8] mengemukakan penerapan metode pembelajaran kooperatif tipe STAD dengan menggunakan lab-mini menunjukkan peningkatan proporsi rata-rata hasil belajar siswa dalam teori peluang sebesar 0,236. Aisah^[9] mengemukakan pembelajaran kooperatif tipe STAD dengan menggunakan lab-mini efektif untuk topik geometri di jenjang SLTP. Lebih lanjut dikemukakan bahwa terdapat peningkatan proporsi rata-rata hasil belajar geometri siswa sebesar 0,37 setelah mengikuti pembelajaran kooperatif dengan menggunakan lab-mini.

2.2. Kemampuan Pemahaman Matematis

Untuk memahami pengertian KPM, terlebih dahulu kita memahami kata pembentuknya, yakni kemampuan dan pemahaman. Menurut kamus besar bahasa Indonesia, kemampuan dapat diartikan sebagai kesanggupan, kecakapan, atau kekuatan. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa kemampuan merupakan kesanggupan atau kecakapan seorang melakukan atau menyelesaikan suatu pekerjaan.

Selanjutnya dari beberapa pernyataan Sumarmo^[10], Ansari^[11], Ruseffendi^[12], dan kamus besar Bahasa Indonesia (Depdiknas)^[13], dapat disarikan bahwa kata “pemahaman” berasal dari kata kerja “paham”, yang berarti mengerti benar atau tahu benar. Mengacu pada pengertian ini, seseorang dikatakan paham tentang konsep jika orang tersebut mengerti benar terhadap suatu konsep, yang ditandai dengan kemampuan menjelaskan kembali dan menarik kesimpulan dari konsep tersebut. Dengan demikian maka dapat dinyatakan bahwa KPM adalah kesanggupan mengatakan fakta, konsep, dan prinsip matematika dengan benar.

Terkait dengan KPM, Polya (dalam Sumarmo)^[10] mengemukakan ada empat tingkat pemahaman suatu konsep, yaitu pemahaman mekanikal, pemahaman induktif, pemahaman rasional, dan pemahaman intuitif. Skemp^[14] membedakan dua jenis pemahaman, yaitu pemahaman instrumental dan pemahaman relasional. Identik dengan Skemp, Hiebert (dalam Even & Tirosh)^[15] mengemukakan, pengetahuan prosedural (*procedural knowledge*) identik dengan pemahaman instrumental, dan pengetahuan konseptual (*conceptual knowledge*) identik pemahaman relasional. Namun demikian, antara Skemp dan Hiebert terdapat perbedaan mengenai hubungan antara dua kemampuan tersebut.

Even & Tirosh^[15] menyatakan bahwa Skemp memberi batas yang jelas antara dua kemampuan tersebut sehingga terdapat dikotomi antara pemahaman instrumental dan pemahaman relasional. Sedangkan Hiebert tidak memberi batas yang tegas antara pengetahuan prosedural dan pengetahuan konseptual, sehingga antara dua kemampuan ini sifatnya *continue*. Pendapat lain tentang pemahaman dikemukakan oleh Bloom yang menyatakan bahwa ada 3 macam pemahaman yaitu: pengubahan (*translation*), interpretasi (*interpretation*), dan pembuatan ekstrapolasi (*extrapolation*).

Dari pendapat di atas, maka KPM secara umum dapat dibagi dua, yakni kemampuan mekanikal atau instrumental dan kemampuan relasional. Pemahaman instrumental diartikan sebagai pemahaman atas objek matematika (fakta, konsep dan prinsip) yang saling terpisah dan hanya hafal rumus serta menerapkannya dalam perhitungan tanpa mengetahui alasan-alasan dan penjelasannya. Sebaliknya, pemahaman relasional termuat suatu skema atau struktur pengetahuan yang kompleks dan berhubungan yang dapat digunakan dalam penyelesaian masalah yang kompleks.

Para ahli banyak bersilang pendapat tentang pemahaman instrumental dan pemahaman relasional. Sehubungan dengan hal ini, Reys^[16] mengungkapkan bahwa kedua pemahaman tersebut sama-sama penting dalam keahlian matematika. Pemahaman prosedural didasarkan pada urutan langkah-langkah dan aturan-aturan yang harus dilaksanakan dalam memecahkan persoalan. Sedangkan pemahaman relasional

atau konseptual didasarkan pada jaringan-jaringan terkoneksi yang menghubungkan dan memilah informasi, di mana hal ini juga sangat dibutuhkan dalam pembelajaran matematika.

Berdasarkan jenis pemahaman matematis yang dikemukakan, dan memperhatikan batasan objek matematika (fakta, konsep dan prinsip) dalam kurikulum SD serta tahap perkembangan intelektual siswa kelas I yang belum sepenuhnya mampu berpikir relasional, maka dalam penelitian ini aspek KPM yang dikaji adalah kemampuan pemahaman instrumental yang terdiri dari kemampuan: (1). mengklasifikasikan objek-objek matematika; 2. menginterpretasi fakta atau gagasan atau konsep; 3. menemukan contoh dari sebuah fakta atau konsep; 4. memberikan contoh dan bukan contoh dari sebuah fakta atau konsep.

3. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian eksperimen yang ditandai dengan pengamatan terhadap gejala yang muncul pada variabel tergantung sebagai dampak perlakuan. Sehubungan dengan hal ini, maka desain penelitian yang digunakan adalah *One Group Pretest and Posttest Design* ^{[12][17][18]}, yang dapat digambarkan :

$$A : O_1 \quad X_1 \quad O_2$$

Mengingat karakteristik SD marginal kawasan kebun sawit yang relatif sama, maka subjek penelitian ini terdiri dari 4 SD marginal kawasan kebun sawit di Kab. Siak dengan jumlah subjek penelitian sebanyak 35 siswa. Data penelitian yang diperlukan adalah KPM siswa, yang dikumpulkan dengan menggunakan tes KPM. Data penelitian dianalisis dengan menggunakan statistik deskriptif untuk menggambarkan KPM siswa ditinjau dari aspeknya. Selanjutnya analisis inferensial digunakan untuk melihat kebermaknaan dampak tindakan yang diberikan.

4. Hasil Penelitian

Berdasarkan skor hasil tes KPM dapat dibuat gambaran KPM siswa seperti yang dimuat pada tabel berikut:

Tabel 1: Deskripsi Data Kemampuan Pemahaman Matematis Siswa

SV	Jlh Sekolah	N	Nilai Tertinggi	Nilai Terendah	Rataan
Sesudah	4	35	83.3	55.6	70,0
Sebelum	4	33	63,7	42,3	56,9

Dari data pada tabel di atas diperoleh informasi bahwa KPM siswa sesudah dibelajarkan dengan pendekatan lab-mini lebih baik dibandingkan dengan sebelumnya. Sehubungan dengan hal ini, perlu diuji kebermaknaan perbedaan tersebut dengan menggunakan uji perbedaan rata-rata. Adapun ringkasan perhitungan uji signifikansi tersebut dimuat dalam tabel berikut:

Tabel 2: Deskripsi Hasil Perhitungan Uji Rataan KPM

SV	Jlh Sekolah	N	Rataan	Varian	t_h	Kes
Sesudah	4	35	70	7.4	8.38	Ho
Sebelum	4	33	56.9	6,2		Ditolak

Hasil uji statistik di atas, menunjukkan bahwa Ho ditolak pada $\alpha = 0.05$. Hal ini berarti terdapat perbedaan rata-rata KPM siswa yang signifikan sebelum dan sesudah perlakuan. Karena rata-rata KPM siswa sesudah perlakuan lebih baik dari sebelumnya maka disimpulkan bahwa penerapan pendekatan lab-mini menggunakan media berdesain kawasan kebun sawit berdampak positif terhadap KPM siswa.

Melihat rata-rata skor KPM siswa sesudah perlakuan hanya mencapai 70.0 dari nilai ideal 100, menunjukkan bahwa KPM belum optimal. Hal ini menunjukkan bahwa siswa masih mengalami kesulitan dalam menguasai bahan ajar. Kesulitan ini dapat dilihat dari miskonsepsi siswa yang terjadi dalam memahami objek matematika yang termuat pada materi bahan ajar. Sehubungan dengan itu, maka perlu dikaji lebih lanjut terkait dengan miskonsepsi tersebut berdasarkan aspek KPM untuk melihat kekuatan pendekatan lab-mini. Adapun gambaran miskonsepsi yang dimaksud diuraikan berikut ini.

4.1. Kemampuan Mengidentifikasi Objek Matematika

Pada aspek ini siswa diminta untuk mengidentifikasi kumpulan benda yang menunjukkan fakta bilangan 3. Dari jawaban yang diberikan diperoleh gambaran miskonsepsi siswa seperti yang dimuat pada Tabel 3.

Dari data pada Tabel.3 diperoleh fakta bahwa miskonsepsi siswa terjadi dalam memahami fakta bilangan 7 pada desain model gambar 2 dan 3. Selanjutnya, dari wawancara dengan siswa diperoleh informasi bahwa untuk Model Gambar 2, terjadinya miskonsepsi siswa karena bentuk dan besarnya

berbeda sehingga ia memahami bahwa desain ini bukan menunjukkan fakta bilangan 2. Sedangkan untuk desain model gambar 3, terjadinya miskonsepsi karena siswa cenderung memandang banyak benda dalam suatu kumpulan untuk menyatakan suatu bilangan melihat kesamaan karakteristiknya. Pada model gambar 1 tidak terjadi miskonsepsi, sebelum dan sesudah perlakuan. Hal ini dimungkinkan karena model gambar tersebut adalah gambar yang umum diperlihatkan guru dalam mengenalkan bilangan.

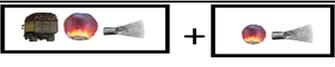
Tabel 3: Deskripsi Miskonsepsi Siswa dalam Mengidentifikasi Objek Matematika

Desain Model Gambar					
					
Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah
0	0	17	6	19	11
0 %	0 %	51%	17,1%	57,6%	31,4%

4.2. Menginterpretasi Gagasan atau Konsep

Dalam aspek ini siswa diminta menginterpretasikan sebuah gagasan tentang penjumlahan $3 + 2$. Dari jawaban siswa diperoleh fakta miskonsepsi siswa seperti yang dimuat pada tabel berikut.

Tabel 4: Deskripsi Miskonsepsi Siswa dalam Menginterpretasi Gagasan

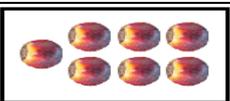
Model Gambar					
					
Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah
16	11	8	0	11	6
48,5%	31,4%	24,2%	0%	31,4%	17,1%

Dari fakta di atas, terlihat bahwa miskonsepsi dominan yang terjadi pada model gambar 1 dan 3. Dari wawancara diperoleh informasi bahwa untuk desain model gambar 1 miskonsepsi terjadi karena mereka terfokus pada banyak benda yang dijumlahkan 3 dengan 2, tanpa memperhatikan syarat cukup dua kelompok objek dapat dijumlahkan. Kemudian pada model gambar 3, pandangan yang sama dengan model gambar 1 tetapi mereka memandang 3 dan 2 menunjukkan benda yang sama, namun syarat cukup untuk dapat dijumlahkan menjadi pertimbangan bagi siswa.

4.3. Menemukan Contoh Sebagai Fakta atau Konsep

Pada aspek ini, siswa diminta menemukan model gambar yang menunjukkan kumpulan benda sebagai contoh fakta bilangan 7. Dari jawaban siswa diperoleh fakta miskonsepsi yang terjadi, seperti yang dimuat pada tabel berikut.

Tabel 5: Deskripsi Miskonsepsi Siswa Dalam Menemukan Contoh Sebagai Fakta atau Konsep

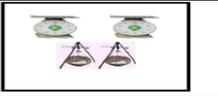
Model Gambar							
							
Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah
0	0	7	0	14	6	19	9
0%	0%	21,2%	0%	42,4%	17,1%	57,6%	25,7%

Miskonsepsi siswa setelah perlakuan dominan terjadi dalam kemampuan ini adalah pada model gambar 2 dan 3. Berdasarkan hasil penelusuran melalui wawancara diperoleh fakta bahwa ukuran bentuk objek pohon kelapa sawit yang berbeda, dan jenis mobil yang berbeda memberikan persepsi mereka bahwa objek tersebut tidak menunjukkan fakta bilangan 7. Hal ini terjadi karena proses berpikir yang digunakan siswa sama dengan proses berpikir pada objek gambar 1, yakni desain model gambarnya sama. Selanjutnya miskonsepsi siswa tentang fakta bilangan 7 pada model gambar 4 umumnya menjawab karena banyak objeknya 7 walaupun objek tersebut tidak memiliki karakteristik yang sama.

4.4. Memberikan Contoh dan Bukan Contoh Fakta atau Konsep

Untuk mengukur kemampuan siswa pada aspek kemampuan ini, diberikan beberapa desain gambar objek yang merupakan contoh dan bukan contoh yang menunjukkan fakta bilangan 4. Dari jawaban siswa diperoleh fakta tentang miskonsepsi siswa yang terjadi seperti yang dimuat pada tabel berikut.

Tabel.6 Deskripsi Miskonsepsi Siswa dalam Memberikan Contoh dan bukan Contoh Sebagai Konsep

Model Gambar							
							
Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah	Sebelum	Sesudah
9	0	13	5	11	1	0	0
0%	0%	37.1%	76.3	25.7%	31.8%	0	2.6%

Dari data yang dimuat pada tabel di atas, diperoleh informasi bahwa miskonsepsi siswa tidak terjadi ketika model gambar yang diperlihatkan adalah objek yang sama, atau model gambar yang banyak objeknya bukan 4 seperti model gambar 4. Hal ini menunjukkan bahwa secara umum siswa telah memiliki ide dasar yang menunjukkan sebuah fakta. Selanjutnya miskonsepsi siswa mulai terjadi ketika banyak objeknya adalah 4, tetapi desain objeknya berbeda. Umumnya mereka tidak menaruh perhatian pada karakteristiknya objeknya dalam menunjuk sebuah konsep bilangan 4, seperti model gambar. 2. Siswa lebih terfokus memandang konsep tersebut dari banyak objek dalam kumpulan, seperti miskonsepsi-miskonsepsi sebelumnya.

Dari analisis data miskonsepsi yang terjadi setelah mendapat perlakuan diperoleh beberapa informasi, yakni: (1) Siswa tidak mengalami miskonsepsi, jika desain model model gambar yang menunjuk konsep adalah model yang umum digunakan guru dalam mengenalkan konsep tersebut; (2) Miskonsepsi siswa terjadi ketika desain model gambar yang menunjuk konsep berbeda baik bentuk maupun ukurannya.

5. Pembahasan

Hasil analisis data menunjukkan bahwa penerapan pendekatan lab-mini berdesain kawasan kebun sawit memberikan kontribusi positif terhadap KPM siswa. Hasil penelitian ini, memperkuat temuan-temuan dalam penelitian sebelumnya yakni Saragih^[7] penerapan pendekatan lab-mini efektif diterapkan dalam pembelajaran matematika dan meningkatkan kemampuan pemahaman matematis siswa SDN 012 Teluk Rimba Kec. Koto Gasib Kab. Siak yang merupakan salah satu sekolah marginal di Kab.Siak. Saragih^[19] penerapan pendekatan lab-mini dalam *setting* kooperatif tipe STAD efektif diterapkan dalam pembelajaran bangun ruang di jenjang SMP. Rusmiyanti^[20] mengatakan bahwa pengembangan kegiatan pratikum melalui kegiatan lab-mini dapat meningkatkan kualitas belajar siswa.

Lebih lanjut Izwita^[8] mengemukakan bahwa penerapan metode pembelajaran kooperatif tipe STAD dengan menggunakan lab-mini menunjukkan peningkatan proporsi rata-rata hasil belajar siswa dalam teori peluang sebesar 0,236. Sedangkan, Aisah^[9] mengemukakan bahwa pembelajaran kooperatif tipe STAD dengan menggunakan lab-mini efektif untuk topik geometri di jenjang SLTP. Lebih lanjut dikemukakan bahwa terdapat peningkatan proporsi rata-rata hasil belajar geometri siswa sebesar 0,37 setelah mengikuti pembelajaran kooperatif dengan menggunakan lab-mini.

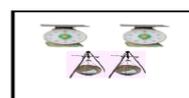
Selanjutnya, fakta miskonsepsi siswa yang terjadi menunjukkan bahwa KPM siswa yang dibelajarkan dengan lab-mini menggunakan media berdesain kebun sawit belum optimal. Pada beberapa desain model gambar yang menunjuk sebuah fakta atau gagasan miskonsepsi masih terjadi dengan persentase yang berbeda. Secara umum dapat digambarkan miskonsepsi siswa terjadi secara terurut dari prosentasi terkecil, sebagai berikut:



Objek sama, ukuran berbeda



Objek sama, variasi dan ukuran berbeda



Objek sama, jenis berbeda

Selanjutnya dari fakta hasil pengamatan selama pelaksanaan tindakan ada beberapa faktor yang

menyebabkan miskonsepsi tersebut terjadi, yakni:

1. Walaupun siswa diberi kesempatan untuk membangun pengalamannya tentang objek matematika dengan menggunakan media berdesain lingkungan siswa, minimnya variasi model gambar yang menunjuk sebuah fakta atau konsep, membuat pengetahuan siswa tentang objek matematika yang dimaksud sangat terbatas. Sebagai contoh, pada desain model gambar yang menunjuk fakta bilangan 3 dan bilang 5 kekontrasan variasi model sangat minim.

Angka					
3					
Dibaca Ti-ga	3	3	3	3	3

Angka					
5					
Dibaca Li-ma	5	5	5	5	5

2. Panataan desain model gambar dalam buku ajar yang digunakan tidak terstruktur dengan baik, sehingga terjadi loncatan pengalaman belajar yang cukup tinggi. Kondisi ini membuat siswa kurang memiliki pengalaman belajar yang matang, untuk mengenal bilangan lain.
3. Walaupun siswa diberi kesempatan untuk bekerja dengan media yang menampilkan berbagai variasi desain model gambar yang menunjukkan sebuah fakta atau konsep, aktivitas belajar siswa melalui media tersebut tidak sepenuhnya terkait dengan tugas-tugas belajar siswa. Beberapa siswa ditemui aktivitasnya menggunakan media lebih cenderung sebagai permainan bukan aktivitas belajar.

Melalui proses pembelajaran yang diamati, disadari bahwa penyajian variasi desain saja tidak cukup dalam membangun pengalaman belajar siswa dengan baik. Urutan penyajian, variasi desain juga perlu pengaturan tata penempatannya, agar kematangan pemahaman siswa terhadap konsep yang dipelajarinya baik. Terkait dengan hal ini, Sabandar^[19] mengemukakan bahwa pemanfaatan media pembelajaran akan lebih baik jika media tersebut dapat memberikan pengalaman belajar yang matang kepada siswa. Lebih lanjut dikemukakan bahwa kematangan yang diperoleh melalui media-media pembelajaran dimanfaatkan sebagai jembatan untuk memahami objek matematika yang sama dalam bentuk variasi lain, baik dalam variasi desain model maupun tingkat keabstrakannya.

Sehubungan dengan hal ini, maka dalam pemanfaatan media seharusnya dalam mengenalkan fakta bilangan 2 dan bukan 2 kepada siswa, maka salah satu desain model gambar yang dapat diberikan seperti berikut ini.



Adanya pengkontrasan desain yang menunjuk fakta sebuah bilangan dapat memberikan makna konsep yang dimaksud dan pengalaman belajar yang lebih baik. Hal ini sejalan dengan implikasi dalil pengkontrasan yang menyatakan bahwa adanya pengkontrasan konsep baik contoh maupun bukan contoh dari konsep yang dimaksud akan meningkatkan pemahaman siswa tentang konsep tersebut^[22]

6. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data dan pembahasannya maka dapat disimpulkan:

1. Penerapan pendekatan Laboratorium Mini menggunakan media berbasis lingkungan kawasan kebun sawit berkontribusi terhadap KPM Siswa Kelas I SD marginal kawasan kebun sawit.
2. Miskonsepsi siswa dalam memandang konsep suatu bilangan umumnya terjadi pada objek desain gambar yang tidak umum digunakan guru, yakni bila desain model gambar objeknya berbeda baik dari bentuk maupun ukurannya.

7. Saran

Mengacu pada pembahasan dan kesimpulan hasil penelitian dan temuan dalam penelitian, maka dalam penerapan pendekatan Laboratorium Mini dalam pembelajaran matematika, disarankan :

1. Penerapan Laboratorium mini sebagai upaya menumbuhkembangkan KPM adalah salah satu alternatif strategi pembelajaran yang dapat digunakan. Sehubungan dengan ini hal-hal yang perlu

diperhatikan adalah : (1) dalam penyajian informasi awal sebagai pengalaman belajar pertama, guru harus memahami zona perkembangan kemampuan berpikir siswa agar informasi yang diberikan dapat menumbuhkan keinginan tahu siswa tentang isi materi; (2) memberikan intervensi yang tepat kepada siswa dalam menyelesaikan tugas-tugas belajarnya. Hal ini agar kemandirian belajar siswa melalui media-media pembelajaran dapat tetap terjaga dan fokus pada penyelesaian tugas-tugas belajar.

2. Media pembelajaran berbasis lingkungan siswa SD marginal kawasan kebun sawit yang dikembangkan dalam penelitian ini perlu direvisi kembali terkait dengan desain gambar dan tata pengaturannya (struktur) penyajian variasi model gambar. Disamping itu, pengkontrasan desain yang digunakan baik dari segi objek gambar maupun ukuran perlu ditambah. Hal ini bertujuan agar pengalaman belajar yang diperoleh siswa lebih matang, sebagai bekal siswa untuk memahami konsep yang dipelajari dalam bentuk desain lain atau abstraksi konsep tersebut dalam matematika.

Daftar Pustaka

- [1] National Council of Teacher of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. 2000
- [2] Saragih, S. *Pengembangan Buku Ajar, Media Pembelajaran, dan Panduannya Untuk Siswa Kelas I SD Marginal Kawasan Kebun Sawit*. LPPM UR. Tidak diterbitkan. 2015
- [3] Hudoyo, H. *Pengembangan Kurikulum Pembelajaran Matematika*, IKIP Malang. 1981
- [4] Bell, F.H. *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary School)*. United States of America: Win C. Brown Company. 1978
- [5] Collins, William, et al. *Mathematics: Applications and Connections*. New York: McGraw-Hill. 1995
- [6] Daniel, Lucy et al. *Life Science*, New York : McGraw-Hill. 1995
- [7] Saragih, S. *Potret Pengelolaan Pembelajaran Matematika SD Sekolah Marginal Kawasan Kebun Sawit*. Laporan Penelitian., FKIP UR. 2013.
- [8] Izwita, D.L. *Penerapan Metode Pembelajaran Kooperatif Dengan Menggunakan Mini Lab Untuk Meningkatkan Prestasi Belajar Siswa* (Tesis). PPS IKIP Surabaya. 1998.
- [9] Nyimas, A. *Penerapan Pendekatan Laboratorium Mini Dalam Pembelajaran Geometri SMP N I Palembang*, Tesis. PPs. IKIP nsurabaya. Tidak Diterbitkan .1999.
- [10] Sumarmo, U. *Kemampuan Pemahaman dan Penalaran Matematika Siswa SMA dikaitkan dengan Kemampuan Penalaran Logik Siswa dan Beberapa Unsur Proses Belajar Mengajar*. Disertasi. Bandung: FPS IKIP Bandung. 1987.
- [11] Ansari, N.I. *Menumbuhkembangkan Kemampuan Pemahaman Komunikasi Matematis Siswa SMU Melalui Strategi Think-Talk-Write*. Disertasi pada PPs UPI Bandung : tidak diterbitkan. 2003
- [12] Ruseffendi. *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika*. Bandung: Tarsito. 2006
- [13] Depdiknas. *Ringkasan Kegiatan Belajar Mengajar*. Jakarta: Depdiknas. 2002
- [14] Skemp, R.R. *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. *Mathematics Teaching*, 77,20-26. 1976
- [15] Even & Tirosh, D. *Teacher Knowledge and Understanding of Students Mathematical Learning*. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.2002
- [16] Rey,s, R.E. *Helping Children Lear Mathematics*. (5th ed). USA: Ally and Bacon. 1998.
- [17] Tuckman, Bruce. *Conducting Educational Research*. London.HBY. 1978
- [18] McMillan,J.H, & Schumacher,S. *Research in education: A conceptual introduction* (5th ed). New York. Longman. 2001
- [18] Saragih, S. *Penerapan pendekatan Lab-mini dalam setting kooperatif tipe STAD efektif diterapkan dalam pembelajaran bangun ruang di jenjang SMP*. LPPM UR. Tidak diterbitkan . 2001
- [19] Sabandar, J. *Aspek Kontekstual dalam Pembelajaran Matematika*. Makalah disampaikan pada Seminar Nasional Sehari: Penerapan Pendidikan Matematika Realistik pada Sekolah dan Madrasah, tgl 5 Nopember 2001, Medan. 2001.
- [20] Hudoyo. *Mengajar Belajar Matematika*, Malang: IKIP Malang. 1989.

PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN *PROJECT BASED LEARNING* PADA PEMBELAJARAN TIK DI SMAN 1 BATANG ANAI

Khairudin, Karmila Suryani, Jusviani

Universitas Bung Hatta

khai67pmatubh@gmail.com, karmilasuryaniptik@gmail.com, jusviani@gmail.com

Abstract

Hasil belajar siswa kelas XI SMAN 1 Batang Anai masih banyak di bawah Kriteria Ketuntasan Minimum (KKM), ini dikarenakan tingkat kreativitas siswa melalui kemampuan berfikir kreatif antara lain terlihat kurang aktif dalam mengungkapkan pendapat, belum banyak mengungkapkan saran atau pertanyaan, kurang mampu menjelaskan permasalahan secara terperinci, kurang mampu menjawab pertanyaan ketika ditanya oleh guru. Oleh karena itu, salah satu model pembelajaran *Project Based Learning* yang dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan tersebut.

Jenis penelitian ini adalah penelitian eksperimen. Populasi dalam penelitian ini adalah semua kelas XI SMAN 1 Batang Anai tahun pelajaran 2015/2016 yang terdiri dari empat kelas yang homogen. Pengambilan sampel secara *random sampling* setelah memenuhi syarat normalitas, variansi yang homogen serta mempunyai kesamaan rata-rata sehingga terpilih kelas XI IPA 2 sebagai kelas eksperimen dan kelas XI IPA 3 sebagai kelas kontrol. Data hasil belajar TIK pada kelas sampel setelah pembelajaran menunjukkan bahwa melalui uji statistik diperoleh bahwa hasil belajar TIK yang menerapkan model pembelajaran *Project Based Learning* lebih baik dari hasil belajar TIK siswa yang menerapkan pembelajaran biasa.

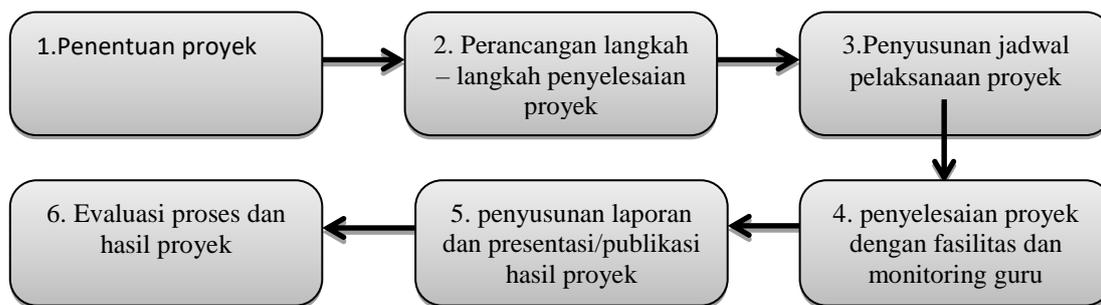
Kata Kunci: Metoda Eksperimen, *Project Based Learning*, Hasil belajar TIK

1. Pendahuluan

Berdasarkan Kurikulum 2013 menyatakan bahwa metode pembelajaran yang dapat mengaktifkan siswa diantaranya: diskusi kelompok, simulasi, studi kasus, pembelajaran kooperatif, pembelajaran kolaboratif, pembelajaran berbasis proyek, pembelajaran berbasis masalah, atau metode pembelajaran lain yang dapat secara efektif memfasilitasi pemenuhan capaian pembelajaran. Pembelajaran berbasis proyek merupakan model pembelajaran yang memberikan kesempatan kepada guru untuk mengelola pembelajaran di kelas dengan melibatkan kerja proyek [3]. *Project based learning (PBL)* merupakan model pembelajaran yang menggunakan proyek/kegiatan sebagai media. "Guru menugaskan siswa untuk melakukan eksplorasi, penilaian, interpretasi, sintesis, dan informasi untuk menghasilkan berbagai bentuk hasil belajar. Model pembelajaran ini menggunakan masalah sebagai langkah awal dalam mengumpulkan dan mengintegrasikan pengetahuan baru berdasarkan pengalaman dalam beraktivitas secara nyata.

John Thomas dalam [3] menyatakan bahwa *project based learning* adalah pembelajaran yang memerlukan tugas-tugas kompleks, didasarkan pada pertanyaan/masalah menantang, yang melibatkan siswa dalam mendesain, memecahkan masalah, membuat keputusan, atau kegiatan investigasi, memberikan siswa kesempatan untuk bekerja secara mandiri selama periode lama, dan berujung pada realistik produk atau presentasi. pembelajaran berbasis proyek (PBL) telah dipraktekkan di Columbus Signature Academy (CSA), sebuah sekolah menengah yang berlokasi di Columbus, Indiana, Amerika Serikat [2]. Sedangkan [6] telah mempelajari keefektifan Pembelajaran Berbasis Proyek (PBL) pada pembelajaran Bahasa Inggris.

Secara umum, langkah – langkah pembelajaran berbasis proyek dapat dijelaskan pada gambar 1:



Gambar 1. Langkah-langkah Project Based Learning

Berdasarkan bagan tersebut, kegiatan yang harus dilakukan pada setiap langkah Pembelajaran berbasis proyek (PBL) adalah sebagai berikut:

- a. Penentuan proyek.
Pada langkah ini, peserta didik menentukan tema/topik proyek berdasarkan tugas proyek yang diberikan oleh guru. Peserta didik diberi kesempatan untuk memilih/ menentukan proyek yang akan dikerjakannya baik secara kelompok ataupun mandiri dengan catatan tidak menyimpang dari tugas yang diberikan guru.
- b. Perancangan langkah-langkah penyelesaian proyek.
Peserta didik merancang langkah- langkah kegiatan penyelesaian proyek dari awal sampai akhir beserta pengelolaannya. Kegiatan perancangan proyek ini berisi aturan main dalam pelaksanaan tugas proyek, pemilihan aktivitas yang dapat mendukung tugas proyek, pengintegrasian berbagai kemungkinan penyelesaian tugas proyek, perencanaan sumber/bahan/alat yang dapat mendukung penyelesaian tugas proyek, dan kerja sama antar anggota kelompok.
- c. Penyusunan jadwal pelaksanaan proyek.
Peserta didik di bawah pendampingan guru melakukan penjadwalan semua kegiatan yang telah dirancangnya. Berapa lama proyek itu harus diselesaikan tahap demi tahap.
- d. Penyelesaian proyek dengan fasilitasi dan monitoring guru.
Langkah ini merupakan langkah pengimplementasian rancangan proyek yang telah dibuat. Aktivitas yang dapat dilakukan dalam kegiatan proyek di antaranya adalah dengan a) membaca, b) meneliti, c) observasi, d) interview, e) merekam, f) berkarya seni, g) mengunjungi objek proyek, atau h) akses internet. Guru bertanggung jawab memonitor aktivitas peserta didik dalam melakukan tugas proyek mulai proses hingga penyelesaian proyek. Pada kegiatan monitoring, guru membuat rubrik yang akan dapat merekam aktivitas peserta didik dalam menyelesaikan tugas proyek.
- e. Penyusunan laporan dan presentasi/ publikasi hasil proyek.
Hasil proyek dalam bentuk produk, baik itu berupa produk karya tulis, karya seni, atau karya teknologi/prakarya dipresentasikan dan/atau dipublikasikan kepada peserta didik yang lain dan guru atau masyarakat dalam bentuk pameran produk pembelajaran.
- f. Evaluasi proses dan hasil proyek
Guru dan peserta didik pada akhir proses pembelajaran melakukan refleksi terhadap aktivitas dan hasil tugas proyek. Proses refleksi pada tugas proyek dapat dilakukan secara individu maupun kelompok. Pada tahap evaluasi, peserta didik diberi kesempatan mengemukakan pengalamannya selama menyelesaikan tugas proyek yang berkembang dengan diskusi untuk memperbaiki kinerja selama menyelesaikan tugas proyek. Pada tahap ini juga dilakukan umpan balik terhadap proses dan produk yang telah dihasilkan.

2. Metodologi Penelitian

Jenis penelitian ini adalah eksperimen. Menurut [4] mengemukakan bahwa penelitian eksperimen adalah penelitian yang mengadakan perlakuan (manipulasi) terhadap variable penelitian (variable bebas) kemudian mengamati kosnsekuensi perlakuan terhadap dua kelas yaitu kelas eksperimen dan kelas kontrol. Pada kedua kelas ini diberikan perlakuan yang berbeda sedangkan faktor lainnya sama. Pada kelas eksperimen menggunakan model pembelajaran *project based learning* dengan menggunakan *project* dan pada kelas kontrol diberikan model konvensional. Desain eksperimen atau model rancangan penelitian yang digunakan adalah *Randomized Control-Group Posttest Only Design*.

Menurut[1]populasi adalah keseluruhan dari objek penelitian. Populasi dalam penelitian ini adalah seluruh siswa kelas XI IPA SMAN 1 Batang Anai tahun ajaran 2014/2015 yang terdiri dari 4 kelas dan

jumlah seluruh anggota populasi adalah 128 orang. Dengan menggunakan teknik simpel random sampling yang memenuhi kriteria data berdistribusi Normal, Homogen dan mempunyai kesamaan rata-rata, maka terpilih kelas Pemilihan sampel dilakukan dengan teknik *random sampling*. kelas XI IPA2 sebagai kelas eksperimen dan XI IPA3 sebagai kelas kontrol.

Prosedur Penelitian

Secara umum prosedur penelitian dapat dibagi dalam tiga tahap yaitu tahap persiapan yang meliputi;

- Mempersiapkan perangkat pembelajaran seperti Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP) kelas eksperimen dan RPP kelas kontrol.
- Mempersiapkan sumber – sumber, alat – alat dan bahan yang diperlukan untuk mendukung model pembelajaran *project based learning* yang sesuai dengan materi yang diajarkan. Bahan yang perlu dipersiapkan adalah Modul/Lembar kerja proyek.
- Membuat kisi-kisi pre test dan uji coba post tes.

Selanjutnya tahap pelaksanaan dengan mengikuti skenario pada Tabel 1.

Tabel 1: Skenario pembelajaran pada kelas kontrol dan kelas eksperimen

Kelas Kontrol	Kelas Ekperimen
<p>A. Kegiatan awal (± 10 menit)</p> <ol style="list-style-type: none"> Guru membuka pelajaran dengan mengucapkan salam Guru memperhatikan kesiapan ruangan, alat dan media pembelajaran yang digunakan dalam proses pembelajaran. Guru mengecek kehadiran siswa. Guru memeriksa kesiapan siswa sebelum pelajaran dimulai. Guru memberikan apresiasi dan motivasi. Guru menyampaikan judul dan tujuan pelajaran. Pemberian pretes <p>B. Kegiatan inti (± 70 menit)</p> <ol style="list-style-type: none"> Guru mencatatkan di papan tulis materi yang akan di ajarkan Guru memberikan penjelasan materi tentang cara akses internet. Guru menanyakan hal – hal mengenai materi pelajaran yang kurang dimengerti siswa. Menjelaskan tentang materi cara akses internet Menugaskan siswa untuk mengidentifikasi internet explorer Menugaskan siswa melakukan tes tulis. Menugaskan siswa mengerjakan tes tulis. <p>C. Kegiatan penutup (± 10 menit)</p> <ol style="list-style-type: none"> Guru membimbing siswa menyimpulkan pelajaran yang telah dipelajari. Guru mengakhir pelajaran dengan mengucapkan salam. 	<p>A. Kegiatan awal (± 10 menit)</p> <ol style="list-style-type: none"> Guru membuka pelajaran dengan mengucapkan salam Guru memperhatikan ruangan, alat dan media pembelajaran yang digunakan dalam proses pembelajaran. Guru mengecek kehadiran siswa. Guru memeriksa kesiapan siswa sebelum pelajaran dimulai. Guru memberikan apresiasi dan motivasi. Menjelaskan teknik dan tujuan pembelajaran. Pemberian pre test <p>B. Kegiatan inti (± 70 menit)</p> <ol style="list-style-type: none"> Penentuan Proyek Perancangan langkah-langkah penyelesaian proyek Penyusunan jadwal pelaksanaan proyek Penyelesaian proyek dengan fasilitas dan monitoring guru Penyusunan laporan dan presentasi/publikasi hasil proyek Evaluasi proses dan hasil proyek. <p>C. Kegiatan penutup (± 10 menit)</p> <ol style="list-style-type: none"> Guru membimbing siswa menyimpulkan pelajaran yang telah dipelajari. Guru meminta siswa untuk mengumpulkan hasil tes/latihan Guru mengakhir pelajaran dengan mengucapkan salam.

Selanjutnya diakhiri oleh tahap penyelesaian, yaitu pemberian tes akhir untuk melihat hasil belajar TIK pada kedua kelas sampel dengan soal tes yang sama. Tes akhir dilaksanakan setelah semua pokok bahasan selesai dipelajari yaitu pada tanggal 18 November 2015 pada kelas kontrol yang dihadiri oleh 30 orang siswa dan 19 November 2015 pada kelas eksperimen yang dihadiri 32 orang siswa. Hasil tes akhir dari kedua sampel peneliti gunakan sebagai data untuk membuat laporan penelitian. Sebelum test akhir diberikan, tes diujicobakan pada sekolah yang KKM-nya sama dengan tempat penelitian, yaitu pada SMA N 2 Batang Anai, sehingga diperoleh tes yang valid dan reliabel. Untuk mengukur peningkatan hasil

pembelajaran di kedua kelas, menurut [5] menggunakan rumus Hake, yaitu;

$$N - gain = \frac{S_{post} - S_{pre}}{S_{max} - S_{pre}}, \quad (1)$$

dimana; S_{post} = skor postes; S_{pre} = skor pretes; S_{max} = skor maksimum.

Dengan kriteria: tinggi jika $G > 0,7$, sedang jika $0,3 < G \leq 0,7$ dan rendah jika $G \leq 0,3$

Melalui uji statistik dengan menggunakan SPSS 20 akan diuji apakah PBL mempunyai pengaruh terhadap hasil belajar dan seberapa besar peningkatan hasil belajar diukur dengan indeks Gain.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada pertemuan pertama dilaksanakan pretest untuk melihat kemampuan awal siswa. Selanjutnya setelah selesai pembelajaran dengan 5 (lima) tatap muka maka diakhir pembelajaran dilaksanakan post test pada kedua kelas, yaitu kelas Eksperimen (Post_KlsE) dan kelas Kontrol (Post_KlsK) di SMA N 1 Batang Anai. Dari post test diperoleh deskripsi hasil belajar yang dilakukan seperti pada tabel 2. Pengolahan data ini menggunakan SPSS 20. Peserta tes pada kedua kelas sampel terdiri dari 64 orang siswa dengan rincian 32 orang siswa kelas kontrol yang hadir dari 32 orang jumlah siswa dan 30 orang siswa kelas eksperimen yang hadir dari 32 orang jumlah siswa.

Tabel 2. Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Minimum	Maximum
Post_KlsE	32	78.38	12.684	52	100
Post_KlsK	30	62.00	15.572	32	88
PreetKlsE	32	66.25	13.320	30	86
PreetKlsK	30	52.33	11.180	26	76

Terlihat pada Tabel 2 bahwa secara deskriptif terjadi perbedaan rata-rata post test hasil belajar pada kedua kelas. Kelompok eksperimen memiliki rata-rata yang lebih tinggi dari kelas kontrol. Untuk membuktikan hipotesis bahwa terdapat pengaruh metoda PBL maka terlebih dahulu dilakukan uji normalitas data karena analisis menggunakan Uji T-Independent. Hasil uji normalitas data terdapat pada Tabel 3.

Tabel 3. Uji Normal dengan One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Post_Kls E	Post_Kls K	PreetKls E	PreetKls K
N		32	30	32	30
Normal Parameters(a,b)	Mean	78.38	62.00	66.25	52.33
	Std. Deviation	12.684	15.572	13.320	11.180
Most Extreme Differences	Absolute	.207	.150	.213	.073
	Positive	.110	.082	.095	.073
	Negative	-.207	-.150	-.213	-.059
Kolmogorov-Smirnov Z		1.171	.822	1.203	.399
Asymp. Sig. (2-tailed)		.129	.509	.111	.997

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Karena nilai $\text{sig}(2\text{-tailed}) > 0,05$ maka disimpulkan Post test untuk kedua kelas eksperimen dan kontrol berdistribusi normal sehingga dapat dilanjutkan dengan uji t-Independent dengan hasil terlihat pada tabel 4. Dari tabel 4 terlihat bahwa pada kolom *Levene's Test for Equality of Variances* terlihat nilai $\text{sig}(0,096) > 0,05$ yang berarti tidak ada variasi antar kelompok eksperimen dan kontrol atau variasi pada kedua kelompok adalah sama, sehingga untuk analisis t digunakan nilai sig terdapat pada baris *Equal variances assumed*. dan berada pada kolom *t-test for Equality of Means*. yaitu $\text{sig}(0,00)/2 < 0,05$. yang berarti menolak hipotesis H_0 dan menerima H_1 yang berarti terdapat pengaruh metoda PBL terhadap hasil belajar.

Tabel 4. Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
				Lower	Upper	Lower	Upper	Lower	Upper	Lower
Nilai	Equal variances assumed	2.863	.096	4.55	60	.000	16.37	3.597	9.180	23.57
	Equal variances not assumed			4.52	56.021	.000	16.37	3.621	9.122	23.62

Dari Tabel 4 diperoleh nilai T hitung jika variansi sama adalah 4,55 maka dibandingkan dengan T tabel atau menggunakan Prob (sign) maka harus dibagi dua, yaitu; $0,076/2=0,038$ yang lebih kecil dari 0,05, maka tolak H_0 .

Selanjutnya untuk mengetahui pada kelas mana terjadi perubahan yang paling baik adalah dengan memperhatikan rata-rata N-Gain seperti terlihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Nilai N-Gain kelompok eksperimen dan kontrol

No	Skor Preetes		Skor Posttes		Gain(E)	Gain(K)
	Kelas	Kelas	Kelas	Kelas		
1	40	40	52	32	0.20	-0.13
2	50	26	52	36	0.04	0.14
3	30	33	56	36	0.37	0.04
4	35	39	56	40	0.32	0.02
5	60	40	64	44	0.10	0.07
6	60	42	68	48	0.20	0.10
7	65	50	68	48	0.09	-0.04
8	55	45	76	48	0.47	0.05
9	67	44	76	52	0.27	0.14
10	65	48	76	56	0.31	0.15
11	70	50	76	56	0.20	0.12
12	65	53	76	56	0.31	0.06
13	50	55	76	60	0.52	0.11
14	68	48	76	64	0.25	0.31
15	70	56	80	64	0.33	0.18
16	75	52	80	68	0.20	0.33
17	76	54	80	68	0.17	0.30
18	75	60	80	68	0.20	0.20
19	68	63	80	68	0.38	0.14
20	67	55	80	68	0.39	0.29
21	69	58	84	68	0.48	0.24
22	73	66	84	72	0.41	0.18
23	74	64	84	72	0.38	0.22
24	78	54	84	76	0.27	0.48
25	76	46	84	76	0.33	0.56

No	Skor Preetes		Skor Posttes		Gain(E)	Gain(K)
	Kelas Eksperimen	Kelas Kontrol	Kelas Eksperimen	Kelas Kontrol		
26	78	56	88	76	0.45	0.45
27	75	58	88	80	0.52	0.52
28	69	69	92	84	0.74	0.48
29	66	76	92	88	0.76	0.50
30	80	70	100	88	1.00	0.60
31	85		100		1.00	
32	86		100		1.00	
Rata-rata					0.40	0.23

Pada Tabel 5 terlihat bahwa N-Gain pada kelas eksperimen berada pada kategori sedang dan N-Gain kelas kontrol berada pada kategori rendah. Dapat dianalisis juga N-Gain mana yang lebih baik dengan melakukan uji T-Independent seperti terlihat pada tabel 6 dan tabel 7

Tabel 6. Uji Normalitas dengan One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Gain.E	Gain.K
N		32	30
Normal Parameters(a,b)	Mean	.3956	.2270
	Std. Deviation	.25567	.19034
Most Extreme Differences	Absolute	.165	.131
	Positive	.165	.131
	Negative	-.097	-.113
Kolmogorov-Smirnov Z		.934	.717
Asymp. Sig. (2-tailed)		.348	.683

- Test distribution is Normal.
- Calculated from data.

Pada Tabel 6 terlihat bahwa data N-Gain untuk kedua kelas sudah berdistribusi normal, sedangkan untuk uji T-Independent pada Tabel 7.

Tabel 7. Uji Independent Samples Test N-Gain

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Nilai	Equal variances assumed	.759	.387	2.93	60	.005	.1686	.05755	.05351	.2837
	Equal variances not assumed			2.95	57.140	.005	.1686	.05701	.05447	.2827

Pada Tabel 7 terlihat data Homogen dan terlihat $\text{sig}(0,05)/2=0,025 < 0,05$ yang berarti bahwa N-Gain untuk kelas eksperimen lebih baik dari N-Gain kelas kontrol.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dikemukakan dapat disimpulkan bahwa menggunakan model pembelajaran Project Based Learning sangat berpengaruh terhadap hasil belajar siswa kelas XI SMAN 1 Batang Anai. Sedangkan peningkatan yang lebih baik berada pada kelas eksperimen dengan kategori sedang

dengan nilai rata-rata *N-Gain* sebesar 0,4 sementara *N-Gain* untuk kelas Kontrol adalah rendah sebesar 0,23.

Daftar Pustaka

- [1] Arikunto, S. (2010), *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktis (Edisi Revisi)*. Jakarta: Rineka Cipta.
- [2] Cho, Y. and Catherine Brown, (2013), Project-based learning in education: integrating business needs and student learning, *European Journal of Training and Development*, Vol. 37 Issue 8 pp. 744 – 765.
- [3] Hosnan, M. (2014), *Pendekatan Scientific dan Kontekstual dalam Pembelajaran Abad 21*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- [4] Lufri. (2005), *Metodelogi Penelitian*. Padang: Universitas Negri Padang.
- [5] Meltzer, D.E. (2002), *The Relationship Between Mathematics Preparation and Conceptual Learning gains in Physics: Possible "Hidden Variable" in Diagnostic Pretest Scores*. *American Journal of Physics*. Vol. 70, No. 12. , 1259-1268.
- [6] Sultana, M., and Sajida Zaki, (2015), Proposing Project Based Learning as an alternative to traditional ELT pedagogy at public colleges in Pakistan, *International Journal for Lesson and Learning Studies*, Vol. 4 Issue: 2, pp. 155-173

ANALISIS KESALAHAN PESERTA DIDIK KELAS VIII.5 DAN III.7 SMP NEGERI 11 PEKANBARU DALAM MENYELESAIKAN SOAL ULANGAN HARIAN MATEMATIKA PADA MATERI RELASI FUNGSI TAHUN PELAJARAN 2014/2015

Puji Karuniakhalida

*Program Pascasarjana Pendidikan Matematika Universitas Riau
Puji.karunia@yahoo.com*

Abstrak

Rendahnya kemampuan pemahaman peserta didik dalam memahami konsep matematika merupakan tantangan yang besar bagi seorang pendidik. Kesalahan peserta didik dalam mengerjakan soal ulangan Relasi dan Fungsi dapat dijadikan suatu petunjuk sejauh mana penguasaan peserta didik terhadap pemahaman matematisnya. Hal ini dapat dilihat dari tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui persentase kesalahan peserta didik dalam mengerjakan soal ulangan Relasi Fungsi yang meliputi kesalahan konsep, kesalahan prinsip dan kesalahan operasi. Kriteria ketuntasan minimal yang ditetapkan sekolah adalah 78 dengan toleransi kesalahan 40%. Subjek penelitian ini adalah peserta didik kelas VIII5 dan VIII7 SMP Negeri 11 Pekanbaru pada semester genap tahun pelajaran 2014/2015 yang berjumlah 66 orang dengan tingkat kemampuan akademik yang heterogen. Penyajian data dilakukan dengan pengujian teknis analisis data deskriptif kualitatif. Berdasarkan analisis data dapat disimpulkan: peserta didik melakukan kesalahan konsep, prinsip dan operasi. Peserta didik telah mengerjakan semua soal yang diberikan akan tetapi di karenakan peserta didik tidak memahami konsep dengan baik sehingga kesalahan peserta didik banyak terletak di kesalahan konsep.

Kata Kunci: relasi dan fungsi, kesalahan konsep, kesalahan prinsip, kesalahan prosedur, analisa kesalahan

1. Pendahuluan

Matematika mempunyai peranan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi dan disiplin ilmu lainnya karena matematika adalah ilmu dasar yang digunakan secara luas dalam berbagai bidang kehidupan. Oleh karena itu dalam dunia pendidikan matematika dipelajari siswa mulai dari sekolah dasar sampai tingkat perguruan tinggi. Peranan penting tersebut dapat juga dimaksud bahwa matematika dapat membekali siswa dengan kemampuan berfikir logis, analitis, sistematis, kritis dan kreatif [2].

Selain itu, matematika bertujuan agar siswa memiliki kemampuan memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan algoritma secara luwes, akurat dan efisien dalam pemecahan masalah. Pencapaian tujuan pendidikan dan pembelajaran matematika dapat dinilai salah satunya dari keberhasilan siswa dalam memahami matematika dan menerapkannya dalam menyelesaikan persoalan matematika.

Banyaknya kesalahan yang dilakukan siswa dalam mengerjakan soal dapat dijadikan petunjuk sejauh mana pemahaman siswa terhadap materi. Adanya kesalahan yang dilakukan siswa saat mengerjakan soal-soal matematika memperlihatkan bahwa terdapat kesulitan yang dialami siswa. Untuk membantu mengatasi kesulitan siswa diperlukan informasi mengenai hal tersebut yang bertujuan untuk mendapatkan alternatif pemecahan yang menjadi penyelesaian agar kesalahan yang sama tidak terjadi lagi dikemudian hari.

Dalam masalah kesulitan belajar yang dihadapi siswa, perlu ditemukan dan dipastikan sumbernya dengan harapan dapat memecahkan masalah tersebut. Ada beberapa faktor yang dapat diduga sebagai penyebab utama kesulitan belajar siswa. Sumber itu berasal dari dalam diri siswa dan dari luar

diri siswa. Dari dalam diri siswa dapat disebabkan oleh faktor biologis maupun psikologis dan dari luar diri siswa dapat bersumber dari keluarga, lingkungan dan masyarakat secara umum [1].

Kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal berkaitan dengan ketidakmampuan belajar atau kemampuan belajar yang tidak sempurna. Karakteristik ketidakmampuan belajar itu antara lain : kecacauan dalam bahasa dan pemahaman, kecacauan dalam perhitungan matematik, kesulitan dalam pembentukan konsep, dan kecacauan dalam perhatian serta konsentrasi [6].

Penyebab kesalahan yang dilakukan oleh siswa dalam menyelesaikan soal-soal dapat dilihat dari berbagai hal. Kesalahan-kesalahan tersebut dapat diklasifikasikan dalam beberapa bentuk yaitu : (1) kesalahan prosedural, yaitu dalam menggunakan algoritma, misalnya kesalahan dalam menggunakan operasi hitung, (2) kesalahan dalam mengorganisasikan data, misalnya kesalahan menuliskan apa yang diketahui dan ditanya dalam soal, (3) kesalahan mengurutkan, mengelompokkan, dan menyajikan data, (4) kesalahan dalam memanfaatkan simbol, tabel dan grafik yang memuat suatu informasi, (5) kesalahan dalam melakukan manipulasi dan sifat-sifat secara matematis dalam menyelesaikan soal, dan (6) kesalahan dalam menarik kesimpulan [3].

Ada beberapa jenis kesalahan yang dilakukan siswa, yaitu:

- (1) Kesalahan konsep, yaitu kesalahan siswa dalam menafsirkan dan menggunakan konsep matematika
- (2) Kesalahan prinsip, yaitu kesalahan siswa dalam menafsirkan dan menggunakan rumus-rumus matematika
- (3) Kesalahan operasi, yaitu kesalahan siswa dalam menggunakan operasi dalam matematika
- (4) Kesalahan karena kecerobohan, yaitu kesalahan siswa karena salah dalam perhitungan
- (5) Kesalahan tanda atau notasi adalah kesalahan dalam memberikan atau menulis tanda atau notasi matematika [5]

Berdasarkan kesalahan-kesalahan yang terjadi perlu adanya dilakukan analisis kesalahan yang diharapkan dapat membantu mengatasi permasalahan. Analisa adalah suatu upaya penyelidikan untuk melihat, mengamati, mengetahui, menemukan, menelaah mengklasifikasi dan mendalami serta menginterpretasikan fenomena yang ada [4]

Melalui analisis kesalahan akan diperoleh gambaran yang jelas dan rinci atas kelemahan-kelemahan siswa dalam menyelesaikan soal yang dapat dijadikan bahan pertimbangan pembelajaran dalam usaha meningkatkan kegiatan pembelajaran. Adanya peningkatan kegiatan pembelajaran diharapkan dapat memperbaiki hasil belajar.

Berdasarkan pendapat para ahli yang telah disebutkan, peneliti menganalisis kesalahan siswa berdasarkan 3 Indikator yaitu: (1) kesalahan konsep, (2) kesalahan operasi, dan (3) kesalahan ceroboh.

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: "Apa saja jenis-jenis kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan soal-soal kesebangunan dan kekongruenan dan seterusnya. Faktor – faktor apakah yang menyebabkan siswa melakukan kesalahan dalam menyelesaikan soal-soal relasi dan fungsi. Seterusnya yang menjadi tujuan penelitian ini adalah (1) Untuk mengetahui jenis-jenis kesalahan apa saja yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan soal-soal relasi dan fungsi. (2) Mengetahui faktor apa saja yang menyebabkan siswa melakukan kesalahan dalam menyelesaikan soal relasi dan fungsi.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di SMP Negeri 11 Pekanbaru tahun pelajaran 2014/2015. Subjek penelitian ini adalah siswa kelas VIII.5 dan VIII.7 SMP Negeri 11 Pekanbaru dengan jumlah siswa 74 siswa. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif.

Teknik pengumpulan data yang dilakukan dalam penelitian ini adalah tes berbentuk essay pada materi Relasi dan Fungsi. Analisis data diperoleh dari hasil tes dan dokumentasi. Analisis data dalam penelitian ini digunakan untuk mengetahui persentase kesalahan siswa dalam mengerjakan soal-soal relasi fungsi dengan rumus:

$$P = \frac{\sum S}{\sum S + \sum B} \times 100\%$$

Keterangan :

- P = Persentase kesulitan
 $\sum S$ = jumlah jawaban salah
 $\sum B$ = jumlah jawaban benar

Untuk menentukan tingkat persentase kesalahan siswa peneliti menggunakan patokan sebagai berikut :

Tabel 1: Rumus Konversi Skor Kualitatif

Rentang Skor	Kriteria
$80\% \leq P < 100\%$	Sangat Tinggi
$60\% \leq P < 80\%$	Tinggi
$40\% \leq P < 60\%$	Cukup Tinggi
$20\% \leq P < 40\%$	Rendah
$0\% \leq P < 20\%$	Sangat Rendah

3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Tes diberikan setelah materi dijelaskan kepada seluruh siswa. Berdasarkan hasil jawaban siswa dalam mengerjakan soal-soal pada materi relasi dan fungsi terdapat beberapa kesalahan yang dilakukan siswa. Dari analisis data kesalahan jawaban siswa diperoleh data yang disajikan pada tabel berikut :

Tabel 2: Persentase Analisis Kesalahan Siswa

Indikator Kesalahan	Jenis Item	Jumlah
Kesalahan Memahami Konsep	ΣB	385
	ΣS	355
Kesalahan Melakukan Operasi	ΣB	443
	ΣS	297
Kesalahan Ceroboh	ΣB	450
	ΣS	290

Keterangan:

ΣB : jumlah jawaban benar

ΣS : jumlah jawaban benar

a. Kesalahan Memahami Konsep

$$P = \frac{355}{385+355} \times 100\% = 47,8\%$$

b. Kesalahan Melakukan Operasi

$$P = \frac{297}{443+297} \times 100\% = 40,13\%$$

c. Kesalahan Ceroboh

$$P = \frac{290}{450+290} \times 100\% = 39,2\%$$

Berikut ini diuraikan secara garis besar kesalahan yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan soal-soal relasi fungsi.

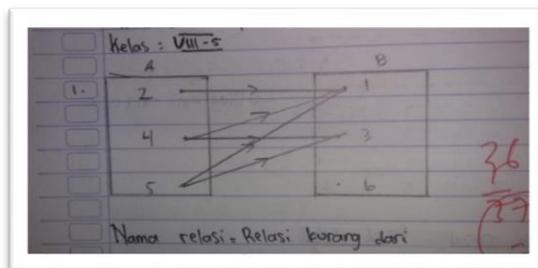
a. Kesalahan Memahami Konsep Indikator 1: Menyatakan pengertian relasi.

Soal yang diberikan adalah :

1. Perhatikan diagram panah di bawah ini!

Relasi atau hubungan apakah yang ditunjukkan oleh diagram panah di atas?

Contoh kesalahan yang dilakukan siswa dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



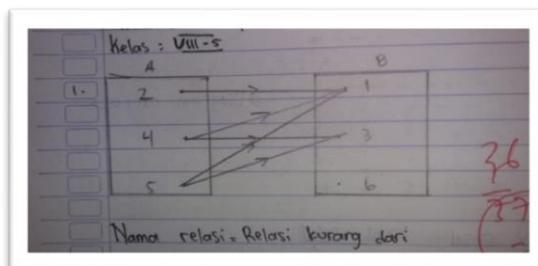
Gambar 1. Contoh Kesalahan Pemahaman Konsep

Kesalahan yang dilakukan siswa adalah siswa belum memahami konsep fungsi dan belum memiliki pemahaman yang lebih luas mengenai fungsi. Siswa belum bisa membaca sebuah relasi jika disajikan dalam diagram panah.

- b. Kesalahan Melakukan Operasi Indikator 6 :** Menghitung banyaknya pemetaan dari dua himpunan
Soal yang diberikan adalah:

5. Diketahui $A = \{\text{bilangan prima} \leq 5\}$
dan $B = \{\text{bilangan ganjil} < 10\}$.
Tentukan banyak pemetaan yang dapat terjadi :
a. Dari A ke B

Contoh kesalahan yang dilakukan siswa dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



Gambar 2. Contoh Kesalahan Operasi

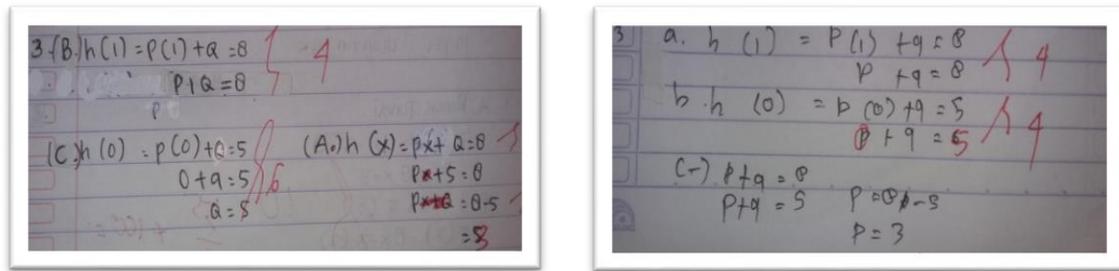
Seharusnya siswa menjawab : Relasinya adalah "*lebih dari*"

Kesalahan yang dilakukan siswa adalah siswa belum memahami konsep fungsi dan belum memiliki pemahaman yang lebih luas mengenai fungsi. Siswa belum bisa membaca sebuah relasi jika disajikan dalam diagram panah.

- c. Kesalahan Ceroboh Indikator 3:** Menyatakan bentuk fungsi jika nilai dan data fungsi diketahui
Soal yang diberikan adalah:

Suatu fungsi ditentukan dengan rumus $h(x) = px + q$.
Jika diketahui $h(1) = 8$ dan $h(0) = 5$, tentukan bentuk fungsinya!

Contoh kesalahan yang dilakukan siswa dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3 dan 4. Contoh Kesalahan Ceroboh

Seharusnya siswa menjawab:

$$h(x) = px + q,$$

$$\text{Untuk } h(1) + q = 8,$$

$$p + q = 8 \quad (1)$$

$$\text{Untuk } h(0) = p(0) + q = 5$$

$$0 + q = 5$$

$$q = 5. \quad (2)$$

Substitusi persamaan (2) ke persamaan (1):

$$p + q = 8$$

$$p + 5 = 8$$

$$p = 8 - 5$$

$$p = 3$$

Jadi, bentuk fungsinya adalah $h(x) = 3x + 5$

Berdasarkan jawaban, siswa masih ceroboh dalam menyelesaikan soal. Seperti pada gambar di atas, siswa salah dalam mengurangkan nilai $8-5$. Siswa juga ceroboh dalam mengalikan nilai p dikalikan dengan 0 . Seharusnya nilainya 0 tapi siswa malah menjawab dengan p .

Dapat dilihat dari keseluruhan kesalahan-kesalahan yang dilakukan oleh siswa pada penelitian ini dapat diketahui bahwa banyak siswa melakukan kesalahan konsep. Dapat diketahui juga berdasarkan persentase kesalahan siswa bahwa kesalahan konsep sebanyak 47,8% yang termasuk kriteria cukup tinggi, kesalahan dalam melakukan operasi sebanyak 40,13% yang termasuk dalam kriteria cukup tinggi dan kesalahan ceroboh sebanyak 39,2% yang termasuk kriteria rendah. Faktor yang menyebabkan hal ini adalah siswa yang kurang menguasai materi, tidak cekatan dalam menyelesaikan soal, dan lupa dengan materi prasyarat.

4. Kesimpulan dan Saran

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan pada penelitian ini, maka dapat disimpulkan bahwa jenis kesalahan yang dilakukan siswa kelas VIII.5 dan VIII.7 SMP Negeri 11 Pekanbaru adalah:

1. Kesalahan siswa dalam memahami Relasi dan Fungsi yang dilihat dari 3 indikator kesalahan dalam menyelesaikan soal siswa masih kurang memahami konsep Relasi dan Fungsi, siswa tidak cekatan dalam menyelesaikan soal dan masih ceroboh dalam melakukan operasi hitung.
2. Berdasarkan persentase kesalahan siswa untuk setiap indikator kesalahan siswa diperoleh data sebagai berikut:
 - a. Kesalahan memahami Konsep 47,8%
 - b. Kesalahan melakukan Operasi 40,13%
 - c. Kesalahan Ceroboh 39,2%

4.2. Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan oleh peneliti memberikan saran sebagai berikut:

- a. Setelah memberikan tes sebaiknya guru memberitahukan kesalahan-kesalahan yang telah dilakukan oleh peserta didik sehingga kesalahan tersebut tidak terulang lagi.
- b. Guru sebaiknya memberikan penghargaan kepada peserta didik yang mendapatkan nilai tertinggi sehingga ada motivasi peserta didik lainnya untuk mendapatkan nilai tertinggi.

Ucapan Terimakasih

Terimakasih kepada Ibu Dra. Titi Solfitri, M.Ed dan Bapak Dr. Sehatta Saragih, M.Pd yang telah memberikan bimbingan dan masukan yang sangat berarti dalam penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] Basuki, Novila Rahmad. 2012. Analisis Kesulitan Siswa SMK Pada Materi Pokok Geometri Dan Alternatif Pemecahannya. Seminar Nasional Pendidikan Matematika. Surakarta, 09 Mei 2012
- [2] Depdiknas. 2006. Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006 : Standar Isi. BSNP. Jakarta
- [3] Soedjadi. 2000. Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia. Jakarta: Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi Departemen Pendidikan Nasional.
- [4] Ulifa, Siti Nur Hasil Analisis Kesalahan Siswa Dalam Menyelesaika soal Matematika Pada Materi Relasi. Jurnal Pendidikan Matematika STKIP PGRI Sidoarjo, ISSN: 2337-8166, Vol. 2 No. 1, Maret 2014
- [5] Wiyartimi, dkk. 2012. Diagnosis Kesulitan Belajar Matematika Siswa pada Materi Trigonometri Rumus-Rumus Segi Tiga. Jurnal Matematika, Aplikasi dan Pembelajarannya, ISSN: 1412-8632, Vol. 9 No. 2, September 2010
- [6] Woolfolk, A.E. (1993). Educational psychology, (4 th ed.). Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice hall, Inc

PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS ICT PADA POKOK BAHASAN LINGKARAN UNTUK SISWA KELAS VIII SMP/MTS

Yoshe Larissa Ulfa, Putri Yuanita, Yenita Roza

Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Riau
yoshelarissa@gmail.com, putri.yuanita@lecturer.unri.ac.id, yenita.roza@lecturer.unri.ac.id

Abstract

The background of this study is the lack of ICT-based learning media especially on geometry in the topic of circle. The topic of circle has potency to be developed visually by using a computer device to facilitate students to understand this topic. This study used Borg and Gall's model that was modified by Sugiyono. The aim of this study is to develop valid and practical ICT-based media for learning mathematics to facilitate the 8th grade junior high school students to understand the topic of circle. The subjects were 35 students at 8th grade Junior High School 20 Pekanbaru. The instruments used were a questionnaire sheet for content validation, media validation and student responses. The questionnaires sheets were analyzed quantitatively and qualitatively. The analyzed data and discussion showed that ICT-based media for learning mathematics is valid with an average score of 3.16 by content validator and 2.85 by media validator. This media is also qualified and practical with an average of student responses was 0.98 on a small group test and 0.93 in the big group.

Keywords : Instructional Media, ICT-based Media, Learning Mathematics.

1. Pendahuluan

Matematika merupakan mata pelajaran yang abstrak, hal ini menjadikan materi matematika sulit dipahami oleh siswa sehingga dibutuhkan variasi dalam penyampaian materi pelajaran. Salah satu cara untuk mengatasi hal tersebut adalah dengan menggunakan alat peraga dan media pembelajaran dalam menyampaikan materi ajar [1].

Pada kurikulum 2013 pendidikan nasional didesain sebagai upaya mewujudkan generasi bangsa yang beriman, berakhlak mulia, percaya diri dan bertanggung jawab, juga untuk membentuk pribadi yang menguasai IPTEK, berbudaya, mempunyai wawasan kemanusiaan dan kebangsaan serta peduli lingkungan. Meskipun struktur kurikulum 2013 tidak mencantumkan mata pelajaran Teknologi Informasi dan Komunikasi (TIK) sebagai mata pelajaran di sekolah dasar dan menengah, namun dengan diterapkannya kurikulum 2013 maka setiap guru wajib menggunakan TIK dalam mengajar pada setiap mata pelajaran. Artinya, meskipun tidak dicantumkan mata pelajaran TIK namun keterampilan menggunakan peralatan TIK digunakan untuk kelancaran proses pembelajaran.

Pembelajaran berbasis ICT (*Information Communication and Technology*) adalah pembelajaran yang berasaskan konsep pembelajaran komputer dan multimedia. ICT atau TIK (Teknologi Informasi dan Komunikasi) atau multimedia terdiri atas teknologi informasi yang berfungsi pada sistem pengolahan informasi dan teknologi komunikasi yang berfungsi untuk pengiriman informasi (*information delivery*) sehingga ICT atau TIK menjadi pilihan yang tepat untuk digunakan oleh pendidik dalam menyampaikan pesan pendidikan, karena dalam penggunaan media yang berbasis ICT/multimedia ini mampu memperjelas setiap makna pesan yang disampaikan kepada peserta didik [2].

Gagne menyatakan bahwa media adalah berbagai jenis komponen dalam lingkungan siswa yang dapat merangsangnya untuk belajar. Sementara itu, Briggs berpendapat bahwa media adalah segala alat fisik yang dapat menyajikan pesan serta merangsang siswa untuk belajar, buku, film, kaset, film bingkai adalah contoh-contohnya [3].

Berdasarkan hasil wawancara peneliti dengan salah seorang guru SMPN 20 Pekanbaru, dalam proses pembelajaran sehari-hari guru lebih sering menjelaskan materi dengan metode ceramah, diskusi, pemberian tugas dan sesekali guru melakukan demonstrasi di kelas untuk materi tertentu. Pada materi

geometri, penggunaan media berupa alat peraga dalam proses pembelajaran sering kali menghabiskan waktu yang cukup banyak. Media pembelajaran dengan menggunakan teknologi komputer pada materi geometri khususnya pada pokok bahasan lingkaran juga sulit untuk ditemukan sehingga guru menjelaskan materi lingkaran secara manual menggunakan benda-benda yang berbentuk lingkaran dalam kehidupan sehari-hari. Ketika guru melakukan demonstrasi dalam menjelaskan konsep-konsep pada materi lingkaran seringkali merepotkan dalam menyiapkan alat dan bahannya. Sehingga, dengan adanya media pembelajaran matematika berbasis ICT diharapkan mampu membantu guru dalam menanamkan konsep-konsep lingkaran kepada siswa dan membantu siswa dalam memahami materi lingkaran dengan mudah dan praktis. Guru tidak perlu lagi menjelaskan materi lingkaran secara manual karena adanya media pembelajaran berbasis ICT melalui perangkat komputer. Hal ini disebabkan materi lingkaran memiliki potensi untuk dapat dikembangkan secara visual sehingga dapat membantu siswa dalam memahami konsep lingkaran serta pemecahan masalahnya. Manfaat lainnya dengan adanya media pembelajaran berbasis ICT pada pokok bahasan lingkaran adalah untuk menghemat waktu dalam mempelajari konsep-konsep materi lingkaran.

Secara umum, manfaat media dalam proses pembelajaran adalah memperlancar interaksi antara guru dengan siswa sehingga pembelajaran akan lebih efektif dan efisien. Tetapi secara khusus ada beberapa manfaat media yang lebih rinci yang dikemukakan oleh Kemp dan Dayton, yaitu (1) Penyampaian pesan pembelajaran dapat lebih terstandar; (2) Pembelajaran dapat lebih menarik; (3) Pembelajaran menjadi lebih interaktif dengan menerapkan teori belajar; (4) Waktu pelaksanaan pembelajaran dapat diperpendek; (5) Kualitas pembelajaran dapat ditingkatkan; (6) Proses pembelajaran dapat berlangsung kapanpun dan dimanapun diperlukan; (7) Sikap positif siswa terhadap materi pembelajaran serta proses pembelajaran dapat ditingkatkan; dan (8) Peran guru mengalami perubahan ke arah yang positif [4]

Dalam pembuatan media pembelajaran berbasis ICT pada pokok bahasan lingkaran ini peneliti menggunakan *Frontpage* dan *Microsoft Power Point*. Peneliti memilih menggunakan *Frontpage* dikarenakan dengan menggunakan program *Frontpage* materi pelajaran dapat diakses melalui web. Selain itu, penggunaan program *Microsoft Power Point* dikarenakan kemampuan *Microsoft Office Power Point* dalam membuat presentasi yang menarik dengan menggunakan animasi, *sound*, gambar, video dan *hyperlink* yang dapat dijadikan tombol-tombol interaktif sehingga memudahkan kegiatan belajar mengajar di kelas maupun siswa secara mandiri. Hal tersebut diharapkan dapat meningkatkan pemahaman siswa pada materi lingkaran. Selain itu, keuntungan yang lain penggunaan *Microsoft Power Point* adalah kemudahan pengoperasiannya serta dapat digunakan pada komputer manapun. Peneliti juga mengemas materi pembelajaran dalam bentuk *Compact Disk* (CD) sehingga siswa dapat mengakses bahan pelajaran tersebut tidak hanya di sekolah tetapi juga di rumah.

Berdasarkan uraian di atas, maka peneliti tertarik untuk mengembangkan suatu media pembelajaran matematika berbasis ICT pada pokok bahasan lingkaran untuk siswa kelas VIII SMP/MTs.

Dengan demikian penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan media pembelajaran matematika berbasis ICT yang memenuhi kevalidan dan kepraktisan untuk membantu siswa memahami materi lingkaran.

2. Metode Penelitian

Bentuk penelitian ini adalah Penelitian dan pengembangan menurut Borg & Gall yang dimodifikasi oleh Sugiyono [5]. Subjek penelitian ini adalah peserta didik kelas VII SMP Negeri 20 Pekanbaru sebanyak 35 orang yang terdiri dari 5 orang peserta didik pada uji coba skala kecil dan 30 orang peserta didik pada uji coba skala besar. Penelitian ini dilakukan kepada siswa kelas VII dikarenakan materi lingkaran pada siswa kelas VIII sudah dipelajari sebelum penelitian ini dilakukan sehingga peneliti memilih siswa kelas VII sebagai subjek penelitian dengan syarat sudah mempelajari materi operasi hitung bilangan bulat dan bilangan pecahan. Teknik pengumpulan data pada penelitian ini yaitu studi literatur dan wawancara. Sementara teknik analisis data pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

Valid

Penilaian kevalidan produk berupa media pembelajaran berbasis ICT dilakukan oleh validator yang terdiri atas validator materi dan validator media. Penilaian oleh validator menggunakan skala 1 sampai 4 yang disajikan pada tabel 1 menurut Sudaryono [6].

Tabel 1: Skala Penilaian Validator

Skala Penilaian	Kriteria
4	Sangat Baik
3	Baik
2	Kurang
1	Sangat Kurang

Kemudian hasil angket validasi dianalisis dengan beberapa langkah yaitu sebagai berikut.

- a) Menghitung rata-rata perolehan skor masing-masing aspek dengan rumus:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{\text{banyak validator}} \quad (1)$$

Keterangan :

\bar{x} = rata-rata perolehan skor

$\sum x$ = banyaknya skor yang diperoleh tiap aspek

- b) Mendeskripsikan rata-rata skor tiap aspek yang diperoleh menjadi data kualitatif menurut kriteria penilaian Eko Putro Widoyoko [7].

Tabel 2: Rumus Konversi Skor Kualitatif

Rentang Skor	Kriteria
$\bar{x} > Mi + 1,8 Sbi$	Sangat baik
$Mi + 0,6 Sbi < \bar{x} \leq Mi + 1,8 Sbi$	Baik
$Mi - 0,6 Sbi < \bar{x} \leq Mi + 0,6 Sbi$	Kurang baik
$\bar{x} \leq Mi - 0,6 Sbi$	Sangat kurang baik

Sumber: Eko Putro Widoyoko, 2009.

Keterangan :

Mi = Rata-rata ideal

$Mi = \frac{1}{2} \times (\text{skor maksimal ideal} + \text{skor minimal ideal})$

Sbi = simpangan baku

$Sbi = \frac{1}{6} \times (\text{skor maksimal ideal} - \text{skor minimal ideal})$

Skor maksimal ideal = \sum butir indikator kriteria \times skor tertinggi.

Skor minimal ideal = \sum butir indikator kriteria \times skor terendah.

Skor maksimal ideal pada angket validasi oleh validator adalah 4 (empat), sedangkan skor minimal ideal adalah 1 (satu). Pada penelitian ini, media pembelajaran dinyatakan valid apabila memenuhi kriteria minimal "Baik".

Praktis

Pada tahap analisis data hasil angket respon siswa, angket ini terdiri atas dua pilihan yaitu, Ya dan Tidak. Perhitungan penilaian terhadap respon siswa ini dilakukan dengan cara memberikan nilai 1 jika siswa menjawab Ya dan 0 jika siswa menjawab Tidak pada tiap pernyataan yang diberikan. Setelah menganalisis jawaban siswa, lalu dapat dihitung kepraktisan dengan cara yang sama dengan analisis data hasil angket validator. Pada penelitian ini, media pembelajaran dinyatakan praktis apabila memenuhi kriteria minimal "Baik".

3. Hasil dan Pembahasan

Pada tahap desain produk dilakukan perancangan dengan menggunakan *paper based design*, dimana materi lingkaran dirancang di atas kertas baik rancangan berupa teks maupun gambar-gambar. Tahapan ini bertujuan untuk memperoleh gambaran tentang apa yang akan ditampilkan pada komputer. Desain produk yang telah dibuat dalam *paper based* lalu dituangkan dalam bentuk *computer based*. Adapun program yang digunakan untuk desain produk *computer based* ini adalah program *microsoft frontpage* dan *microsoft power point*.

Setelah media pembelajaran selesai dibuat lalu dilakukan validasi oleh validator materi dan validator program dan dilanjutkan uji coba keterlaksanaan penggunaan media.

1. Penilaian Validator Materi

Validasi oleh validator materi digunakan untuk menilai materi yang telah disusun dalam media pembelajaran berbasis ICT pada pokok bahasan lingkaran untuk siswa kelas VIII SMP/MTs. Terdapat dua aspek yang dinilai yaitu aspek pembelajaran dan aspek kurikulum.

Tabel 3: Hasil Validasi oleh Validator Materi

Aspek	Butir Indikator	Σ Skor	Σx	\bar{x}
Pembelajaran	1	7	89	3,179
	2	8		
	3	7		
	4	7		
	5	7		
	6	6		
	7	6		
	8	6		
	9	6		
	10	6		
	11	6		
	12	6		
	13	6		
	14	5		
Kurikulum	1	6	44	3,143
	2	6		
	3	6		
	4	7		
	5	6		
	6	6		
	7	7		
Jumlah		133	133	6,322
Rata-rata keseluruhan				3,161

Berdasarkan rata-rata keseluruhan diperoleh $\bar{x} = 3,161$ maka hasil penilaian dari validator materi adalah baik dan dinyatakan valid.

2. Penilaian Validator Media

Validasi yang dilakukan oleh validator media digunakan untuk menilai produk media pembelajaran berbasis ICT pada pokok bahasan lingkaran untuk siswa kelas VIII SMP/MTs. Validator media dilakukan oleh seorang dosen matematika. Terdapat dua aspek yang dinilai yaitu aspek tampilan dan aspek program.

Tabel 4: Hasil Validasi oleh Validator Media

Aspek	Butir Indikator	Σ Skor	Σx	\bar{x}
1. Tampilan	1	4	20	2,857
	2	3		
	3	3		
	4	2		
	5	3		
	6	2		
	7	3		
2. Program	1	3	17	2,833
	2	3		
	3	3		
	4	3		
	5	2		
	6	3		
Jumlah		37	37	5,69
Rata-rata keseluruhan				2,845

Berdasarkan rata-rata keseluruhan diperoleh $\bar{x} = 2,845$ maka hasil penilaian validator media adalah baik dan dinyatakan valid.

3. Hasil Pengujian Kelompok Kecil

Tingkat keterlaksanaan media pembelajaran ini diperoleh dari hasil angket respon siswa sebanyak 5 orang siswa.

Tabel 5: Hasil Angket Respon Siswa Skala Kecil

Aspek	Pernyataan	\sum Skor	$\sum x$	\bar{x}
A	1	5	34	0,971
	2	5		
	3	5		
	4	5		
	5	5		
	6	4		
	7	5		
B	1	5	35	1
	2	5		
	3	5		
	4	5		
	5	5		
	6	5		
	7	5		
C	1	5	29	0,967
	2	4		
	3	5		
	4	5		
	5	5		
	6	5		
Jumlah			98	2,938
Rata-rata keseluruhan				0,979

Berdasarkan angket respon siswa kelompok kecil dapat disimpulkan bahwa media pembelajaran matematika berbasis ICT pada pokok bahasan lingkaran untuk siswa kelas VIII SMP/MTs memiliki tingkat keterlaksanaan yang sangat baik dengan rata-rata 0,979.

4. Hasil Pengujian Kelompok Besar

Tingkat keterlaksanaan media pembelajaran ini diperoleh dari hasil angket respon siswa sebanyak 30 orang siswa.

Tabel 6: Hasil Uji Coba Kelompok Besar

Aspek	Pernyataan	\sum Skor	$\sum x$	\bar{x}
A	1	29	195	0,929
	2	30		
	3	30		
	4	28		
	5	28		
	6	20		
	7	30		
B	1	30	202	0,962
	2	30		
	3	27		
	4	30		
	5	29		
	6	28		
	7	28		
C	1	30	162	0,9
	2	19		
	3	29		

4	27
5	30
6	27
Jumlah	559
Rata-rata keseluruhan	2,79
	0,93

Berdasarkan angket respon siswa kelompok besar dapat disimpulkan bahwa media pembelajaran matematika berbasis ICT pada pokok bahasan lingkaran untuk siswa kelas VIII SMP/MTs memiliki tingkat keterlaksanaan yang sangat baik dengan rata-rata 0,93.

Responden menyatakan bahwa siswa dapat mengoperasikan media pembelajaran ini dengan baik. Uraian materi lingkaran pada media pembelajaran mudah dipelajari, tampilan petunjuk tombol pada media dan materi sangat jelas dan menarik dan menggunakan bahasa yang mudah dimengerti. Siswa juga merasa termotivasi belajar menggunakan media pembelajaran ini. Responden juga menyatakan bahwa pemberian animasi untuk memvisualisasi materi lingkaran sangat membantu mereka dalam memahami materi sehingga lebih mudah dimengerti. Adanya media pembelajaran matematika berbasis ICT ini membuat kegiatan belajar menjadi menyenangkan.

Penelitian sejenis juga pernah dilakukan oleh Yuni Yamasari [8], dimana penelitian yang dilakukan mengukur kevalidan, kepraktisan dan keefektifan media pembelajaran berbasis ICT sedangkan penelitian yang peneliti lakukan hanya sebatas untuk mengukur kevalidan dan kepraktisan saja dikarenakan keterbatasan waktu.

4. Simpulan dan Saran

Melalui penelitian pengembangan ini menghasilkan produk berupa media pembelajaran matematika berbasis ICT pada pokok bahasan lingkaran untuk siswa SMP/MTs. Media ini dinilai sudah valid dan praktis setelah melalui proses validasi oleh para ahli dan dua kali tahapan uji coba untuk melihat tingkat keterlaksanaan media.

Setelah melaksanakan penelitian ini peneliti akan memberikan beberapa saran yang berhubungan dengan penelitian pengembangan ini. Saran ini ditujukan kepada peneliti berikutnya yang berkeinginan untuk melakukan penelitian yang sama. Saran-saran tersebut adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian pengembangan ini, media pembelajaran berbasis ICT yang dibuat peneliti membahas pada pokok bahasan lingkaran sehingga masih banyak pokok bahasan lain pada mata pelajaran matematika yang dapat dikembangkan dalam bentuk media pembelajaran berbasis ICT.
2. Pada penelitian ini pengembangan media matematika berbasis ICT pada pokok bahasan lingkaran untuk siswa SMP/MTs peneliti batasi untuk mengukur aspek praktikalitas media. Bagi peneliti selanjutnya, media ini dapat dijadikan sebagai dasar untuk meneliti aspek-aspek lain dalam pembelajaran, misalnya kaitan media pembelajaran dengan efektifitas pembelajaran.

Ucapan Terimakasih

Ucapan terimakasih peneliti sampaikan Ibu Dra. Putri Yuanita, M.Ed dan Ibu Hj. Yenita Roza, Ph.D yang telah meluangkan waktu untuk berdiskusi dan memberi masukan yang sangat berart pada penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] Sukmadinata, N. S., (2011). *Metode Penelitian Pendidikan*. Bandung. PT. Remaja Rosdakarya.
- [2] Munir, (2010). *Kurikulum Berbasis Teknologi Informasi dan Komunikasi*. Bandung. Alfabeta.
- [3] Daryanto, (2010). *Media Pembelajaran*. Yogyakarta. Gava Media.
- [4] Sadiman, A.S., dkk., (2011). *Media Pendidikan: Pengertian, Pengembangan, dan Pemanfaatannya*. Jakarta. PT. Rajagrafindo Persada.
- [5] Sugiyono, (2008). *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D*. Bandung. Alfabeta.
- [6] Sudaryono, dkk., (2013). *Pengembangan Instrumen Penelitian Pendidikan*. Yogyakarta. Graha Ilmu.
- [7] Widoyoko, E.P., (2009). *Evaluasi Program Pembelajaran (Panduan Praktis bagi Pendidik dan Calon Pendidik)*. Yogyakarta. Pustaka Pelajar.
- [8] Yamasari, Y., (2010). *Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis ICT yang berkualitas*. Dalam *Seminar Nasional Pascasarjana X*. Surabaya, 4 Agustus.

PENGARUH PENERAPAN PENDEKATAN *PROBLEM SOLVING* MODEL POLYA TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI DAN BERPIKIR KREATIF MATEMATIS SISWA MTs

Ramlah¹, Rippi Maya²

¹Universitas Singaperbangsa Karawang, ²STKIP Siliwangi Bandung
ramlah@staff.unsika.ac.id, rippimaya@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menelaah pengaruh penerapan pendekatan *problem solving* model Polya terhadap kemampuan komunikasi dan berpikir kreatif matematis siswa MTs. Hal ini sejalan dengan adanya permasalahan dalam penelitian ini yaitu masih rendahnya kemampuan komunikasi dan berpikir kreatif matematis siswa, yang diperoleh dari hasil observasi terbatas pada tes yang diberikan. Penelitian kuasi eksperimen ini mengambil populasi seluruh siswa kelas VIII di satu MTs Swasta di Kecamatan Purwasari Kabupaten Karawang tahun plajaran 2015/2016. Dipilih dua kelas pada kelas VIII sebagai sampel penelitian, yang satu sebagai kelas eksperimen (kelas VIII A) yang berjumlah 28 siswa, dan yang satu lagi sebagai kelas kontrol (kelas VIII B) yang berjumlah 30 siswa. Kelas tersebut diberikan *prestes* dan *posttes* untuk kemampuan komunikasi matematis dengan soal essay yang sama sebanyak lima soal. Sedangkan *posttes* untuk kemampuan berpikir kreatif matematisnya. Analisis data kuantitatif penelitian menggunakan SPSS 17 for windows. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pencapaian dan peningkatan kemampuan komunikasi matematis siswa yang menggunakan pendekatan *problem solving* lebih baik daripada siswa yang menggunakan pembelajaran konvensional (berada pada level sedang). Kemampuan berpikir kreatif matematis siswa yang memperoleh pembelajaran matematika menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya sama dengan siswa yang memperoleh pembelajaran konvensional (berada pada level rendah). Tidak terdapat asosiasi antara kemampuan komunikasi dengan kemampuan berpikir kreatif matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya

Kata Kunci: Pendekatan *Problem Solving* Model Polya, Kemampuan Komunikasi Matematis, Kemampuan Berpikir Kreatif Matematis.

1. Pendahuluan

1.1. Latar Belakang Masalah

Dalam pembelajaran matematika komunikasi menjadi aspek yang penting untuk menunjang keberhasilan siswa dalam belajar. Dengan komunikasi siswa dapat saling bertukar informasi sehingga ide-ide matematika dapat dieksploitasi lebih mendalam. Komunikasi juga diperlukan untuk memahami ide-ide matematika secara benar.

Menurut Turmudi (2008) aspek komunikasi hendaknya menjadi aspek penting dalam pembelajaran matematika, karena aspek komunikasi melatih siswa untuk dapat mengkomunikasikan gagasan, baik komunikasi lisan maupun komunikasi tulisan. Selanjutnya menurut Turmudi, komunikasi adalah bagian esensial dari matematika dan pendidikan matematika.

Kemampuan komunikasi yang lemah akan berakibat pada lemahnya kemampuan-kemampuan matematika yang lain. Siswa yang mempunyai kemampuan komunikasi matematis yang baik akan bias membuat representasi yang beragam. Hal ini akan lebih memudahkan dalam menemukan alternatif-alternatif penyelesaian yang berdampak pada meningkatnya kemampuan menyelesaikan permasalahan dalam matematika.

Selain kemampuan komunikasi matematis, kemampuan berpikir kreatif merupakan aspek yang sangat penting dimiliki oleh siswa dalam menunjang keberhasilan belajarnya. Dengan kemampuan berpikir kreatif yang baik, kesuksesan siswa sangat ditentukan oleh kreativitasnya dalam menyelesaikan atau menyelesaikan permasalahan dalam matematik.

Untuk itu kemampuan berpikir kreatif menjadi salah satu fokus pembelajaran matematika. Melalui pembelajaran matematika, siswa diharapkan mempunyai kemampuan berpikir logis, analitis, kritis dan kreatif serta mempunyai kemampuan bekerja sama. Berpikir kreatif merupakan salah satu jenis berpikir yang mengarahkan diperolehnya wawasan baru, pendekatan baru, perspektif baru, atau cara baru dalam memahami sesuatu.

Pada kenyataannya, kemampuan komunikasi matematis dan kemampuan berpikir kreatif siswa dikategorikan masih rendah. Hal ini disebabkan karena siswa mengalami kesulitan dalam menyelesaikan persoalan rutin terlebih lagi persoalan yang tidak rutin seperti berpikir kreatif. Proses berpikir yang dilatihkan di sekolah terbatas pada kognisi, ingatan, dan berpikir konvergen, sementara berpikir kreatif kurang begitu diperhatikan. Kegiatan pembelajaran terfokus kepada mencatat, menghafal, dan mengingat kembali.

Bukti lemahnya penguasaan kompetensi dasar, khususnya komunikasi matematis, diperlihatkan oleh prestasi siswa kelas VIII dalam TIMSS 2011:

“Siswa Indonesia menempati peringkat 38 dari 42 negara peserta dengan skor 386 yang rata-ratanya ditetapkan sama dengan 500 dan simpangan baku 100.” Di bidang sains, prestasi siswa Indonesia lebih rendah lagi, yaitu peringkat 42 dari 43 negara peserta.” (Mullis et. al., 2012).

Dari hasil observasi pada kelas delapan di salah satu Sekolah Madrasah Tsanawiyah (MTs) Swasta di Kabupaten Karawang diperoleh hasil yang sangat bervariasi dan sebagian besar (lebih dari 50 persen) menjawab salah. Observasi ini dilaksanakan dengan cara memberikan sebuah soal himpunan berikut:

“Suatu kelas berjumlah 50 orang siswa, sebanyak 15 anak menyukai pelajaran matematika, 10 anak menyukai pelajaran IPA, 5 orang anak menyukai pelajaran IPS, 14 anak menyukai pelajaran kesenian, dan sisanya menyukai pelajaran bahasa Inggris. Sajikanlah data tersebut ke dalam bentuk diagram lingkaran, dan kemudian buat pertanyaan mengenai data tersebut dan selesaikanlah ”

Observasi dari hasil ulangan harian matematika juga memperlihatkan bahwa kriteria ketuntasan minimal (KKM) yang ditetapkan sebesar 60 belum tercapai, “Lebih dari 90% siswa mempunyai KKM kurang dari 60.” Keberhasilan seorang siswa dalam mengikuti pelajaran di sekolah secara umum dapat merupakan ukuran dari berhasil atau tidaknya seorang siswa mencapai tujuan pembelajarannya. Dalam proses pembelajaran siswa dituntut untuk mengembangkan kemampuan komunikasi matematis, kemampuan berpikir kreatif dan kebiasaan berpikir, agar siswa dapat mencapai tujuan pembelajaran dan mencapai prestasi belajar matematika secara maksimal.

Kenyataan di lapangan, kemampuan komunikasi matematis siswa tidak seperti yang diharapkan. Hal ini ditinjau dari hasil penelitian yang menyatakan rendahnya kemampuan komunikasi matematis siswa dalam pembelajaran matematika. Seperti halnya hasil penelitian Qahar (2009) yang menyimpulkan bahwa kemampuan komunikasi matematis siswa masih kurang’rendah’ baik dalam melakukan komunikasi secara lisan ataupun tulisan.

Sedangkan bukti lemahnya kemampuan siswa dalam berpikir kreatif yaitu apa yang diutarakan oleh Rohaeti (2010) salah satu alasannya adalah bahwa proses belajar siswa didominasi oleh guru sehingga siswa tidak bisa menemukan kembali konsep-konsep matematika dan mereka tidak bisa mencapai pemahaman yang bermakna. Siswa cenderung menghafal aturan dan algoritma masalah yang rutin, meniru penjelasan guru atau contoh pemecahan masalah dalam buku teks.

Untuk mengatasi permasalahan dalam meningkatkan kemampuan komunikasi dan berpikir kreatif matematis serta menumbuh kembangkan kebiasaan berpikir siswa melalui pembelajaran matematika dengan pendekatan problem solving. Menurut MCDSM (Mutadi, 2010) *Problem solving* dalam matematika adalah proses dimana seorang siswa atau kelompok siswa menerima tantangan yang berhubungan dengan persoalan matematika, dimana penyelesaiannya dan caranya tidak langsung bisa ditentukan dengan mudah dan penyelesaiannya memerlukan ide matematika.

Pendekatan *problem solving* dalam pengajaran matematika sangat berarti dalam menciptakan pengajaran matematika yang efektif. Alasan pertama adalah harapan untuk membuat matematika lebih dapat diterapkan dalam kehidupan siswa di luar pengajaran kelas atau dalam situasi baru yang belum familiar. *Problem solving* memberikan kesempatan dan dapat mendorong siswa berdiskusi dengan siswa yang lainnya, yaitu pada proses menemukan jawaban permasalahan. Alasan berikutnya adalah karena *problem solving* dapat mendorong siswa untuk menyusun teorinya sendiri, mengujinya, menguji teori temannya, membuangnya jika teori tersebut tidak konsisten dan mencoba yang lainnya (NCTM, dalam Mutadi, 2010).

1.2. Kajian Teori

Kemampuan komunikasi matematis merupakan kemampuan seseorang dalam mengkomunikasikan gagasan atau ide-ide matematika dalam bentuk symbol, tabel, diagram, atau eksperisi matematik atau model matematik untuk memperjelas keadaan atau masalah dalam pemecahan masalah.

Adapun indikator kemampuan komunikasi menurut NCTM (Fachrurazi : 2011) dapat dilihat dari :

1. Kemampuan mengekspresikan ide-ide matematis melalui lisa, tulisan, dan mendemonstrasikannya serta menggambarannya secara visual;
2. Kemampuan memahami, menginterpretasikan, dan mengevaluasi ide-ide matematis baik secara lisan, tulisan, maupun dalam bentuk visual lainnya;
3. Kemampuan dalam menggunkan istilah-istilah, notasi-notasi matematik dan stuktur-strukturanya untuk menyajikan ide-ide, menggambarkan hubungan-hubungan dengan model-model situasi.

Berikut ini adalah salah satu contoh soal kemampuan komunikasi matematis, dengan indikator menyatakan situasi ke dalam model matematika. *“Mobil A berada pada jarak 80 km terhadap mobil B. Jika mobil itu bergerak sama-sama dan berlawanan arah (saling mendekati), mobil itu akan bertemu dalam 1 jam. Jika kedua mobil itu bergerak ke arah yang sama, mobil A akan menyusul mobil B dalam waktu 4 jam. Ilustrasikan situasi diatas dalam bentuk gambar sehingga mudah dipahami, dan nyatakan persoalan ke dalam kalimat matematika untuk menentukan kecepatan mobil A dan mobil B, selesaikan !.”*

Berdasarkan pendapat beberapa ahli mengenai indikator kemampuan komunikasi matematis, penulis menyimpulkan bahwa indikator komunikasi matematis adalah kemampuan menyatakan suatu situasi ke dalam bentuk gambar, tabel, diagram, bahasa, symbol, ekspresi atau model matematika. Dan menyatakan atau menjelaskan model matematika dalam bentuk gambar, tabel, diagram, ekspresi/relasi matematika ke dalam bahasa biasa.

Munandar (Hendriana, dan Sumarmo 2014 : 43-44), merinci ciri-ciri keempat komponen berpikir kreatif sebagai proses sebagai berikut. Ciri-ciri fluency meliputi : 1) mencetuskan banyak ide, banyak jawaban, banyak penyelesaian masalah, banyak pertanyaan dengan lancer; 2) memberikan banyak cara atau saran untuk melakukan berbagai hal; 3) selalu memikirkan lebih dari satu jawaban. Ciri-ciri flexibility diantaranya adalah : 1) menghasilkan gagasan, jawaban, atau pertanyaan yang bervariasi, dapat melihat suatu masalah dari sudut pandang yang berbeda-beda. 2) mencari banyak alternatif atau arah yang berbeda-beda. 3) mampu mengubah cara pendekatan atau cara pemikiran. Ciri-ciri originality diantaranya adalah : 1) mampu melahirkan ungkapan yang baru dan unik, 2) memikirkan cara yang tidak lazim untuk mengungkapkan diri, 3) mampu membuat kombinasi-kombinasi yang tidak lazim dari bagian-bagian atau unsur-unsur. Ciri-ciri elaboration diantaranya adalah : 1) mampu memperkaya dan mengembangkan suatu gagasan atau produk; 2) menambah atau memperinci detail-detail dari suatu objek, gagasan, atau situasi sehingga menjadi lebih menarik.

Adapun indikator dari kemampuan berpikir kreatif matematis menurut Siswono (2007 :26) yang meliputi 4 (empat) kemampuan yaitu:

- 1) Kefasihan adalah kemampuan menghasilkan banyak ide dalam berbagai bidang,;
- 2) Fleksibilitas (luwes) adalah kemampuan untuk menghasilkan jawaban, gagasan atau pernyataan yang bervariasi;
- 3) Orisinalitas (kebaruan) adalah memiliki ide-ide baru untuk menyelesaikan sebuah permasalahan, dan
- 4) Elaborasi (keterincian) adalah kemampuan untuk memecahkan masalah secara detail.

Problem-Solving melibatkan suatu bentuk sederhana (respectual, fisiologis, sensory) dan memanfaatkan informasi itu mencapai suatu penyelesaian (perbedaan individu → tidak ada pendekatan yang berdiri sendiri). Lima langkah problem solving dikemukakan oleh Dewey (Susilawati, 2009 :144) :

1. Mengenali adanya masalah (kesadaran adanya kesukaran)
2. Mengidentifikasi masalah (klarifikasi dan definisi).
3. Memanfaatkan pengalaman sebelumnya.
4. Menguji hipotesis atau kemungkinan-kemungkinan penyelesaian.
5. Mengevaluasi penyelesaian dan menarik kesimpulan berdasarkan bukti.

Sukoriyanto (Bey dan Asriani, 2013 : 225) menyatakan bahwa kelebihan pembelajaran *problem solving*, yaitu : (1) mendidik siswa untuk berpikir secara logis dan sistematis, (2) mampu mencari berbagai jalan keluar dari suatu kesulitan yang dihadapi, (3) belajar menganalisis suatu masalah dari berbagai aspek, (4) mendidik siswa percaya diri sendiri.

Sedangkan kelemahan pembelajaran *problem solving*, yaitu : (1) memerlukan waktu yang cukup banyak, (2) kalau di dalam kelompok itu kemampuan anggotanya heterogen, maka siswa yang pandai mendominasi dalam diskusi sedang siswa yang kurang pandai menjadi pasif sebagai pendengar saja.

Prosedur yang digunakan dalam implementasi pembelajaran dengan pendekatan *problem solving* mengikuti penahapan yang diajukan oleh Polya yakni sebagai berikut : yaitu (1) memahami masalah, pada tahap ini siswa diminta untuk memahami permasalahan terlebih dahulu sebelum menentukan strategi yang akan digunakan untuk menyelesaikannya; (2) merencanakan strategi penyelesaian, pada tahap ini adalah merencanakan strategi yang akan digunakan dalam memecahkan masalah; (3) Melaksanakan rencana, pada tahap ini adalah melaksanakan rencana sesuai dengan strategi yang kita pilih untuk menyelesaikan permasalahan; (4) memeriksa kembali, pada tahap ini, memeriksa kembali hasil yang telah diperoleh apakah telah sesuai dengan data pada soal.

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Menelaah peranan pendekatan *problem solving* model Polya terhadap pencapaian dan peningkatan kemampuan komunikasi matematis siswa MTs.
2. Menelaah ada atau tidaknya perbedaan kemampuan berpikir kreatif matematis siswa MTs antara yang menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya dengan yang menggunakan pembelajaran konvensional.
3. Menelaah asosiasi antara kemampuan komunikasi dan berpikir kreatif matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya .

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kuasi eksperimen. Penelitian ini mengambil dua kelas yang memiliki kemampuan yang sama, yaitu kelas eksperimen yang memperoleh pembelajaran matematika dengan pendekatan *problem solving*, sedangkan kelas kontrol memperoleh pembelajaran matematika dengan pembelajaran biasa. Desain yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccc} O_1 & X & O_1 O_2 \\ \dots\dots\dots & & \\ O_1 & & O_1 O_2 \end{array}$$

Keterangan:

O_1 : Tes kemampuan komunikasi matematis

O_2 : Tes kemampuan berpikir kreatif matematis

X : Pembelajaran matematika dengan menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya

..... : Pengambilan sampel tidak secara acak sampel

Populasi dari penelitian ini adalah seluruh kelas VIII di satu MTs Swasta di Kecamatan Purwasari Kabupaten Karawang. Sedangkan sampel penelitiannya adalah dua kelas dari kelas VIII yang ada di MTs Swasta di Kecamatan Purwasari Kabupaten Karawang tersebut.

Pemilihan sampel penelitian ini berdasarkan sampling purposive, yaitu teknik pengambilan sampel berdasarkan pertimbangan tertentu (Sugiyono, 2011). Pertimbangan yang dilakukan peneliti memilih kelas VIII sebagai sampel penelitian karena kelas tersebut memiliki kemampuan yang sama, karakteristik siswa yang sama, mendapat kurikulum yang sama, dan materi yang sama dan waktu (hari) pelaksanaan pembelajaran yang sama. Pertimbangan ini tentunya berdasarkan rekomendasi dari pihak sekolah terutama dari kepala sekolah dan guru matematika yang ada di sekolah yang bersangkutan. Sehingga ditetapkan 2 kelas dari 4 kelas yang ada yaitu satu kelas sebagai kelas eksperimen (VIII A) yang diberi perlakuan dengan pendekatan *problem solving* model Polya, dan satu kelas yang lain sebagai kelas kontrol (VIII B) yang diberi perlakuan dengan pembelajaran konvensional.

3. Hasil dan Pembahasan

Data yang diolah dan dianalisis pada penelitian ini berupa skor pretes, postes, gain ternormalisasi untuk masing-masing kemampuan komunikasi dan berpikir kreatif matematis. Data skala kebiasaan berpikir siswa terhadap pembelajaran dengan pendekatan *problem solving*. Berikut ini disajikan statistik deskriptif skor pretes, postes, dan gain ternormalisasi dalam bentuk tabel.

Tabel 1. Statistik Deskriptif Kemampuan Komunikasi dan Berpikir Kreatif Matematis

Variabel	Statistik	Pendekatan Problem Solving				Pembeajaran Konvensional			
		N	Prestes	Postes	N-gain	N	Prestes	Pos Tes	N-gain
KKM	Rata-rata	28	5,71	16,93	0,32	28	5,57	13,47	0,23
	s		2,43	4,72	-		2,1	6,62	-
KBK	Rata-rata	30	-	15	-	30	-	14,57	-
	s		-	6,23	-		-	3,58	-

Keterangan:

- Skor ideal untuk kemampuan komunikasi (KKM) dan berpikir kreatif matematis (KBKM) masing-masing adalah 40.

Berdasarkan hasil uji hipotesis kemampuan komunikasi matematis kelas yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya dan pembelajaran konvensional, disimpulkan terdapat perbedaan yang signifikan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa kemampuan komunikasi matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *problem solving* lebih baik daripada siswa yang menggunakan pembelajaran biasa. Temuan kemampuan komunikasi matematis pada siswa kelas *problem solving* yang lebih baik daripada siswa kelas pembelajaran biasa serupa dengan temuan studi Husna (2002) terhadap siswa SMP dengan pendekatan matematika realistik, Junaidi (2012) dengan pembelajaran pendekatan open ended dan problem solving pada siswa SMAN, Melianingsih dan Sugiman (2015) dengan pendekatan problem solving pada siswa SMP.

Selanjutnya hasil uji hipotesis gain ternormalisasi kemampuan komunikasi matematis kelas eksperimen dan kontrol ternyata diperoleh nilai $Sig = 0,021 < \alpha = 0,05$ artinya terdapat perbedaan yang signifikan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa peningkatan kemampuan komunikasi matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *problem solving* lebih baik daripada siswa yang menggunakan pembelajaran biasa. Temuan peningkatan kemampuan komunikasi matematis pada siswa kelas *problem solving* yang lebih baik daripada siswa kelas pembelajaran biasa serupa dengan temuan studi Husna, et. al. (2002) terhadap siswa SMP dengan menggunakan pendekatan matematika realistik, Muriana (2012) terhadap siswa SMP dengan yang menggunakan Group Investigation, Alhaddad, et. al. (2015) melaporkan bahwa secara keseluruhan peningkatan kemampuan komunikasi matematis siswa dengan pembelajaran model Treffinger lebih tinggi daripada siswa dengan pembelajaran konvensional.

Selanjutnya hasil uji hipotesis kemampuan berpikir kreatif matematis kelas eksperimen dan kontrol yang ternyata diperoleh nilai Sig yang lebih besar dari nilai alfa, artinya tidak terdapat perbedaan yang signifikan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat perbedaan kemampuan berpikir kreatif matematis antara siswa yang menggunakan pendekatan *problem solving* dengan siswa yang menggunakan pembelajaran biasa. Hasil penelitian ini tidak sejalan dengan temuan yang lainnya misalnya (Ratnaningsih, 2007, Rohaeti, 2008, Ismaimuza, 2012, Usman, 2014). Penelitian Ratnaningsih (2007) menggunakan pendekatan kontekstual disertai dengan masalah yang terstruktur dan tidak terstruktur melaporkan bahwa siswa yang mendapat pendekatan pertama mencapai nilai yang lebih baik dibandingkan dengan yang mendapat pendekatan kedua pada kemampuan berpikir kreatif matematik dan keduanya lebih baik dibanding yang mengikuti pendekatan konvensional. Rohaeti (2008) menemukan bahwa kemampuan berpikir kreatif matematis siswa SMP kelas eksperimen (pendekatan eksplorasi) lebih baik dibandingkan kelas kontrol, Ismaimuza (2012) dengan menggunakan pembelajaran berbasis masalah dengan strategi konflik kognitif terhadap siswa SMP melaporkan keupayaan berpikir kreatif matematik pelajar yang mengikuti pembelajaran PBLKK lebih baik daripada pelajar yang mengikuti pembelajaran konvensional. Usman (2014) dengan menggunakan pembelajaran inkuiri model Alberta terhadap siswa SMP melaporkan bahwa pencapaian kemampuan berpikir kreatif matematis siswa yang belajar dengan pembelajaran inkuiri lebih baik daripada siswa yang memperoleh pembelajaran konvensional.

Berdasarkan hasil uji statistik asosiasi antara kemampuan komunikasi dan berpikir kreatif matematis dengan menggunakan uji *Chi Square*, diperoleh nilai Sig. adalah 0,771 lebih dari nilai $\alpha = 0,05$, maka dapat diinterpretasikan bahwa atas nilai yang didapat menunjukkan tidak terdapat asosiasi antara kemampuan komunikasi matematis dan berpikir kreatif matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya. Hal ini dapat dilihat pada tabel 2. Berikut:

Tabel 2: Uji *Pearson – Chi Square* Berdasarkan Kemampuan Komunikasi dan Berpikir Kreatif Matematis

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	.085 ^a	1	.771		
Continuity Correction ^b	.000	1	1.000		
Likelihood Ratio	.083	1	.773		
Fisher's Exact Test				1.000	.568
Linear-by-Linear Association	.082	1	.775		
N of Valid Cases	28				

a. 2 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 1,71.

b. Computed only for a 2x2 table

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa siswa yang belajar dengan menggunakan pendekatan *problem solving* memperoleh hasil yang lebih baik daripada siswa yang mendapat pembelajaran biasa pada kemampuan komunikasi dan berpikir kreatif matematis. Ini berarti bahwa pendekatan *problem solving* memberikan kontribusi yang positif bagi kemajuan siswa untuk meningkatkan kemampuan komunikasi matematis dan mengembangkan kemampuan berpikir kreatif matematisnya.

Pembelajaran dengan pendekatan *problem solving* model polya memberikan kesempatan kepada siswa terlibat langsung dalam pembelajaran, mulai dari memahami masalah sampai dengan menyimpulkan masalah yang terkandung dalam masalah tersebut. Siswa secara aktif berdiskusi mengerjakan LKS sehingga terbangun komunikasi yang efektif antara anggota kelompok. Siswa terbiasa diberikan latihan soal sehingga kemampuan komunikasi matematisnya cukup berkembang. Hal ini cukup beralasan karena apabila pendekatan *problem solving* diterapkan dengan baik akan membuat siswa lebih aktif dan percaya diri dalam menyajikan pendapat mereka dalam belajar matematika.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan pada bab sebelumnya diperoleh kesimpulan yang berlaku bagi siswa MTs sebagai berikut:

1. Kemampuan komunikasi matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya lebih baik daripada siswa yang menggunakan pembelajaran konvensional. Kemampuan komunikasi matematis siswa dengan pendekatan *problem solving* model Polya tergolong rendah, sedangkan kemampuan komunikasi matematis dengan pembelajaran biasa juga tergolong rendah.
2. Peningkatan kemampuan komunikasi matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya lebih baik daripada siswa yang menggunakan pembelajaran konvensional. Peningkatan kemampuan komunikasi matematis siswa dengan pendekatan *problem solving* tergolong sedang, sedangkan peningkatan kemampuan komunikasi matematis dengan pembelajaran biasa tergolong rendah.
3. Tidak terdapat perbedaan kemampuan berpikir kreatif matematis siswa yang menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya dengan siswa yang menggunakan pembelajaran konvensional. Kemampuan berpikir kreatif matematis siswa dengan pendekatan *problem solving* model Polya dan pembelajaran biasa tergolong rendah.
4. Tidak terdapat asosiasi antara kemampuan komunikasi dengan kemampuan berpikir kreatif matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *problem solving* model Polya.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih peneliti sampaikan kepada Ibu Dr. Euis Rohati, M.Pd yang telah memberi masukan dan diskusi yang berarti pada penelitian ini, juga kepada Bapak Dr. Dayat Hidayat, M.Pd., Bapak Halimi, S.E.,MM, dan Ibu Tita Kartini, S.Pd yang telah memberikan fasilitas sehingga penelitian ini dapat diselesaikan tepat waktu.

Daftar Pustaka

- Bey, A., dan Asriani. (2013). "Penerapan Pembelajaran Problem Solving Untuk Meningkatkan Aktivitas dan Hasil Belajar Matematika Pada Materi SPLDV". Dalam *Jurnal Pendidikan Matematika*. Vol. 4-No 2. Juli 2013.
- Costa, A. Dan Kallick, B. (2008) Describing 16 Habits of Mind. [Online]. Tersedia : <http://www.habits-of-mind.net/pdf/16HOM2.pdf>. [17 April 2015].
- Fachrurazi, (2011). Penerapan Pembelajaran Berbasis Masalah Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis dan Komunikasi Matematis Siswa SD. *Jurnal UPI* [online] Vol.1, hal 76-89. Tersedia. <http://jurnal.upi.edu/file/8-fachrurazi.pdf> [20 Maret 2015].
- Husna, R, et.al. (2002). Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah Dan Komunikasi Matematik Melalui Pendekatan Matematik Realitas Pada Siswa SMP kelas VII Langsi. *Jurnal Pendidikan Matematik PARADIKMA*, Vol 6-Nomor 2.
- Ismaimuza, D. (2012). Kemampuan Berpikir Kritis Dan Kreatif Matematis Siswa SMP Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah Dengan Strategi konflik Kognitif. *Jurnal Teknologi (Sciences dan Engineering)*, Vol 2-Nomor 2 Tahun 2013.
- Mahmudi, A. (2010). Pengaruh Pembelajaran Dengan Strategi MHOM Berbasis Masalah Terhadap Kemampuan Berpikir Kreatif, Kemampuan Pemecahan Masalah, Dan Disposisi Matematik Serta Persepsi Terhadap Kreativitas. Disertasi Pada Sekolah Pascasarjana UPI. Diterbitkan Pada *Jurnal Educationest*, UPI, Januari 2011.
- Mutadi, (2010). Problem Solving Mathematics. <https://mutadi.wordpress.com> [20 April 2015].
- NCTM, (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM.
- NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, V.A: Author.
- Noer, Hastuti, dan sri, (2011). Kemampuan Berpikir Kreatif Matematis Dan Pembelajaran Matematika Berbasis Masalah Open-Ended UNILA. *Jurnal Pendidikan Matematika FKIP UNELA*. Volume . 5-Nomor 1.
- Qahar, A. (2009). *Mengembangkan Kemampuan Emahaman, Koneksi, Dan Komunikasi Matematis Serta Kemandirian Belajar Siswa SMP Melalui Reciprocal Teaching*. Disertasi PDS UPI. Bandung : Tidak Diterbitkan.
- Rochaerti, E.E. (2008). *Pembelajaran Dengan Pendekatan Eksplorasi Untuk Mengembangkan Kemampuan Berpikir Konteks Dan Kreatif Matematik Siswa SMP*. Disertasi pada sekolah Pascasarjana UPI. Tidak Diterbitkan.
- Rohaeti, Euis.E, (2010). Critical and Creative Mathematical Thinking of Junior High School Students. Dimuat dalam *jurnal EDUCATIONIST*. Vol. IV No. 2. Juli 2010.
- Sumarmo, U, et.al. (2012). Laporan Penelitian. *Mengembangkan Kemampuan Dan Disposisi Berpikir Logis, Kritis Dan Kreatif Matematis Siswa SMA Melalui Pembelajaran Berbagai Masalah Dan Strategi Thing-Talk-write*. STKIP Siliwangi bandung.
- Sumarmo, U. (2013). Kumpulan Makalah Berpikir dan Disposisi Matematika Serta Pembelajarannya. Bandung : Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Pendidikan Indonesia.
- Susilawati, W. (2014). *Belajar dan Pembelajaran Matematika*. Bandung : CV. Intan Mandiri.
- Syafrianto, (2014). *Peningkatan Kemampuan Pemahaman Dan Penalaran Matematis Serta Kebiasaan Berpikir (Habits Of Main) Siswa SMP melalui Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Make A Match*. UPI. Respository. upi. edu. Perpustakaan. Upi. edu.
- Turmudi, (2008). *Landasan Filsafat dan Teori Pembelajaran Matematika (Berparadigma Eksploratif dan Ivestigatif)*. Jakarta: LEUSER CITA PUSTAKA.
- Usman, R, M. (2014). *Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kreatif Dan Komunikasi Serta Disposisi Berpikir Kreatif Matematis Siswa SMP Melalui Pembelajaran Inkuiri Model*. Alberta. UPI.repositoro.upi.edu.perpustakaan.upi.edu.

UJI EFEKTIFITAS BAHAN AJAR METODE NUMERIK MENGUNAKAN SOFTWARE MATLAB

Finola Marta Putri

*Jurusan Pendidikan Matematika, UIN Syarif Hidayatullah Jakarta
finola.marta@uinjkt.ac.id*

Abstrak

Penelitian ini merupakan penelitian lanjutan yang telah peneliti lakukan sebelumnya. Tujuan penelitian ini adalah menguji keefektifan pengembangan bahan ajar Metode Numerik menggunakan software *MATLAB*. Teknik pengumpulan data menggunakan data tes hasil belajar matematika mahasiswa dan teknik analisis datanya yaitu data kuantitatif tes hasil belajar matematika mahasiswa. Metode yang digunakan yaitu langkah 8 dari metode penelitian dan pengembangan, yaitu penelitian untuk menguji keefektifan produk menggunakan metode kuasi eksperimen (*the static-group comparison design*). Hasil penelitian ini adalah terjadi peningkatan skor rerata mahasiswa setelah diadakan perlakuan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB*. Nilai Sig > 0,05 berarti tidak ada hubungan hasil belajar mahasiswa antara sebelum dan sesudah menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB*. Kontribusi pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB* adalah $0,035^2 = 0,001225$ (0,1225%) dan sisanya 99,8775% disebabkan faktor lain. Kesimpulan penelitian ini adalah tidak terdapat perbedaan hasil belajar mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB*. Rata-rata kesalahan yang dilakukan mahasiswa saat menggunakan pengembangan bahan ajar Metode Numerik menggunakan software *MATLAB* terletak pada pemahaman konsep matematis. Kendala waktu juga menyebabkan latihan penggunaan software ini kurang maksimal sehingga hasil belajar yang diperoleh sesudah diberi perlakuan juga kurang optimal. Tanggapan mahasiswa: a) Menyelesaikan masalah metode numerik menggunakan *MATLAB* lebih mudah di banding dengan menggunakan manual karena dengan menggunakan matlab program telah di atur secara otomatis di m-file, b) Menggunakan aplikasi matlab mempermudah penyelesaian tapi harus akan sedikit membingungkan bagi yang kurang latihan, c) Lebih baik memakai matlab karena lebih cepat dan lebih akurat. Software *MATLAB* merupakan salah satu sarana untuk membantu melakukan perhitungan yang kompleks pada Metode Numerik, sangat efektif dan efisien dalam menemukan penyelesaian, akan tetapi software ini tidak dapat memfasilitasi pemahaman mahasiswa terhadap konsep Metode Numerik, salah cara agar mahasiswa tidak mengalami salah konsep adalah dengan cara memperbanyak latihan.

Kata kunci: metode penelitian dan pengembangan, uji efektifitas, software

1. Pendahuluan

Murni (2012 : 1) menyatakan bahwa metode numerik adalah teknik yang digunakan dalam merumuskan masalah matematika agar dapat diselesaikan dengan operasi hitung tambah, kurang, kali, dan bagi. Jenis hitungan terbagi dua yaitu hitungan langsung dan hitungan tak langsung/iteratif. Hitungan langsung merupakan penyelesaian yang diperoleh melalui serangkaian hitungan, sedangkan hitungan tak langsung adalah hitungan langsung yang dilakukan secara berulang. Hasil hitungan tak langsung membentuk barisan yang menuju ke satu nilai yang diharapkan, namun tidak menutup kemungkinan bahwa hasil iterasi tersebut tidak ada atau dengan kata lain tidak memiliki solusi, dan bisa juga solusinya diperoleh setelah melakukan banyak iterasi. Oleh karena itu, perhitungan dengan cara manual sangat menjemukan terutama jika salah perhitungan pada iterasi pertama, maka salah pula penyelesaiannya. Oleh karena itu, hitungan tak langsung harus memiliki tebakan awal, skema iterasi (rumus) dan kriteria penghentian iterasi. Saat melakukan perhitungan harus teliti dan cermat. Selain itu, Semua metode numerik memuat sejumlah besar perhitungan yang menjemukan.

Peranan metode numerik dalam pemecahan masalah juga semakin meningkat dengan adanya perkembangan komputer digital yang cepat dan berdayaguna terutama software-software sehingga metode numerik mampu menangani sistem persamaan linear yang sangat besar, ketaklinearan, dan geometri yang rumit yang seringkali tidak mungkin dipecahkan secara analitis.

Berdasarkan penjelasan di atas maka diperlukan suatu aplikasi software untuk mengatasinya. Salah satu aplikasi software yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah metode numerik adalah *MATLAB*. *MATLAB* (*Matrix Laboratory*) adalah sebuah program untuk analisis dan komputasi numerik dan merupakan suatu bahasa pemrograman matematika lanjutan yang dibentuk dengan dasar pemikiran menggunakan sifat dan bentuk matriks. *MATLAB* pertama kali diadopsi oleh insinyur rancangan kontrol (yang juga spesialisasi Little), tapi lalu menyebar secara cepat ke berbagai bidang lain. Kini juga digunakan di bidang pendidikan, khususnya dalam pengajaran aljabar linear dan analisis numerik, serta populer di kalangan ilmuwan yang menekuni bidang pengolahan citra (Wikipedia).

Mata kuliah prasyarat sebelum mengambil mata kuliah ini adalah Komputer I yang menggunakan software *MATLAB*, sehingga aplikasinya dalam pembelajaran Metode Numerik dapat langsung diterapkan. Mahasiswa juga dapat membuat gambar kurva yang benar (tidak hanya melukis sketsa) menggunakan software *MATLAB*, sehingga dapat dilihat apakah metode numerik mempunyai penyelesaian atau tidak. Oleh karena itu, software *MATLAB* cocok digunakan pada mata kuliah Metode Numerik. Walaupun demikian, *MATLAB* tidak dapat memfasilitasi pemahaman mahasiswa terhadap konsep Metode Numerik. Jadi, pembelajaran secara konvensional untuk memahami konsep Metode Numerik tetap harus dilakukan.

Kenyataan yang dialami mahasiswa pada salah satu kelas dalam Ujian Tengah Semester (UTS) perkuliahan Metode Numerik semester genap tahun ajaran 2015/2016 yang berjumlah 33 orang, 17 di antaranya mendapat nilai di bawah 60 atau sebanyak 51,15%, 9 mahasiswa yang memperoleh nilai 60 keatas tetapi kurang dari 70 atau sebanyak 27,27%, 5 mahasiswa atau sekitar 15,15% memperoleh nilai di atas 70 tetapi di bawah 80, dan hanya 2 orang atau 0,06% yang memiliki nilai di atas 80 tetapi tidak sampai 90. Hal ini menunjukkan bahwa hasil belajar mahasiswa sangat rendah. Oleh karena itu, peneliti berupaya untuk memperbaiki mutu perkuliahan dengan cara mengembangkan bahan ajar Metode Numerik menggunakan software *MATLAB* melalui metode penelitian dan pengembangan sehingga bahan ajar ini dapat meningkatkan hasil belajar mahasiswa.

Sukmadinata (dalam Haryati, 2012: 14) mengemukakan bahwa penelitian dan pengembangan merupakan pendekatan penelitian untuk menghasilkan produk baru atau menyempurnakan produk yang telah ada. Produk yang dihasilkan bisa berbentuk software, ataupun hardware seperti buku, modul, paket, program pembelajaran ataupun alat bantu belajar. Penelitian dan pengembangan berbeda dengan penelitian biasa yang hanya menghasilkan saran-saran bagi perbaikan, penelitian dan pengembangan menghasilkan produk yang langsung bisa digunakan.

Metode penelitian dan pengembangan atau dalam bahasa Inggrisnya *Research and Development* adalah metode penelitian yang digunakan untuk menghasilkan produk tertentu, dan menguji keefektifan produk tersebut. Untuk dapat menghasilkan produk tertentu digunakan penelitian yang bersifat analisis kebutuhan dan untuk menguji keefektifan produk tersebut supaya dapat berfungsi di masyarakat luas, maka diperlukan penelitian untuk menguji keefektifan produk tersebut. Jadi, penelitian dan pengembangan bersifat longitudinal (bertahap bisa *multi years*) (Sugiyono, 2015: 407).

Sugiyono (2015: 408) juga mengemukakan bahwa penelitian dan pengembangan yang menghasilkan produk tertentu untuk bidang administrasi, pendidikan, dan sosial lainnya masih rendah. Padahal banyak produk tertentu dalam bidang pendidikan dan sosial yang perlu dihasilkan melalui *research and development*.

Berdasarkan uraian di atas, maka peneliti mencoba untuk menguji keefektifan pengembangan bahan ajar Metode Numerik menggunakan software *MATLAB*, karena penelitian ini merupakan penelitian lanjutan dari penelitian pengembangan bahan ajar Metode Numerik menggunakan software *MATLAB* yang telah peneliti lakukan sebelumnya. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul Uji Efektifitas Pengembangan Bahan Ajar Metode Numerik Menggunakan Software *MATLAB* dengan melanjutkan langkah kedelapan berdasarkan penelitian dan pengembangan menurut Sugiyono (2015), yaitu uji coba pemakaian (setelah pengujian terhadap produk berhasil, dan mungkin ada revisi yang tidak terlalu penting, maka selanjutnya produk yang berupa sistem kerja baru tersebut diterapkan dalam kondisi nyata untuk lingkup yang luas. Dalam operasinya sistem kerja baru tersebut tetap harus dinilai kekurangan atau hambatan yang muncul guna untuk perbaikan lebih lanjut). Jadi, tujuan dari penelitian ini adalah untuk menguji keefektifan pengembangan bahan ajar Metode Numerik menggunakan software *MATLAB*.

Materi Metode Numerik yang telah dikembangkan dalam penelitian sebelumnya adalah:

- i. Sistem Persamaan Linear, termasuk Sistem Linear Segitiga Atas, Eliminasi Gauss dan pivoting, Dekomposisi Segitiga (Doolittle, Crout, dan Cholesky), Metode Iterasi Jacobi dan Gauss Seidel.
- ii. Interpolasi, termasuk Interpolasi Linear dan Kuadrat, Interpolasi beda terbagi Newton, Interpolasi Titik yang Berjarak Sama (Interpolasi Beda Maju dan Beda Mundur Newton), dan Interpolasi Lagrange.
- iii. Integral Numerik, termasuk Aturan Trapesium, dan Aturan Simpson. (Putri, 2017: 369).

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah langkah 8 dari metode penelitian dan pengembangan atau dalam bahasa Inggrisnya *Research and Development* berdasarkan Sugiyono (2015), yaitu penelitian untuk menguji keefektifan produk.

Penelitian untuk menguji keefektifan produk menggunakan metode kuasi eksperimen. Peneliti memilih kuasi eksperimen karena pemilihan sampel tidak secara random tetapi menerima keadaan sampel seadanya. Cook, Campbell, dan Cordray (Ali, 2010) mengatakan bahwa melalui studi ini diharapkan pembelajaran tersebut berpeluang berjalan secara alami sehingga merepresentasikan kondisi sebenarnya. Desain pembelajarannya yaitu *the one-group pretest-posttest design*. Fraenkel, *et al* (2007) menyatakan bahwa dalam *the one-group pretest-posttest design*, kelompok tunggal diukur atau diobservasi tidak hanya setelah diberi perlakuan tetapi juga sebelumnya. Diagram dari desain ini adalah sebagai berikut.

O	X	O
Pretes	Perlakuan	Postes

Populasi penelitian ini adalah seluruh mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika FITK UIN Syarif Hidayatullah Jakarta semester genap tahun ajaran 2015/2016 yang mengikuti mata kuliah Metode Numerik. Pengambilan sampel dilakukan dengan teknik *purposive sampling*. Unaradjan (2013:121) menyatakan bahwa *purposive sampling* dikenal juga dengan sampling pertimbangan ialah teknik sampling yang digunakan peneliti jika peneliti mempunyai pertimbangan-pertimbangan tertentu di dalam pengambilan sampelnya atau penentuan sampel untuk tujuan tertentu. Sampel penelitian ini adalah 17 mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta kelas B semester genap tahun ajaran 2015/2016 yang mengikuti mata kuliah Metode Numerik. Peneliti memilih sampel 17 mahasiswa dari 31 mahasiswa dengan pertimbangan kevalidan nilai yang diperoleh mahasiswa tersebut murni dari hasil kerja keras dirinya sendiri.

Teknik pengumpulan data adalah data tes hasil belajar matematika mahasiswa. Data yang dianalisis yaitu data kuantitatif berupa tes hasil belajar matematika mahasiswa.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Hasil

Kevalidan bahan ajar dari hasil penelitian dan pengembangan telah peneliti jelaskan dalam penelitian sebelumnya, yaitu data dikumpulkan melalui literature review dan validasi analisis kualitatif dari dua orang validator untuk menyempurnakan pengembangan bahan ajar (Putri, 2017: 369). Oleh karena itu, dalam penelitian ini peneliti langsung saja akan membahas hipotesis pada penelitian ini yang berbunyi: terdapat perbedaan hasil belajar mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB*. Hipotesis ini diuji menggunakan SPSS versi 20 dengan uji *t-tes related samples*.

Table 1: Statistik Deskriptif

	N	Minimum	Maximum
Pretes	17	52	89
Postes	17	24	100
Valid N (listwise)	17		

Table 1 di atas memperlihatkan bahwa skor minimum pada pretes adalah 52, sedangkan pada postes skor minimumnya sangat rendah yaitu 24. Skor maksimum pada pretes adalah 89 dan skor maksimum pada postes yaitu 100 yang merupakan skor idealnya. Rerata skor pretes mahasiswa yaitu 68,353 dan rerata skor postesnya adalah 74,941. Hal ini berarti terjadi peningkatan skor rerata mahasiswa setelah diadakan perlakuan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB*.

Korelasi antara nilai sebelum dan sesudah menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB* adalah 0,035. Berikut data korelasinya:

Tabel 2: Korelasi Sebelum dan Sesudah Perlakuan

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Pretes&Postes	17	,035	,893

Nilai Sig > 0,05 berarti tidak ada hubungan hasil belajar mahasiswa antara sebelum dan sesudah menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB*. Kontribusi pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB* adalah $0,035^2 = 0,001225$ (0,1225%) dan sisanya 99,8775% disebabkan faktor lain.

Hasil uji *t-test* yaitu 0,317. Ini berarti *p-value* > 0,05, sehingga terima H_0 . Artinya tidak terdapat perbedaan hasil belajar mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB*.

3.2 Pembahasan

Pada uji coba lapangan, mahasiswa dapat dengan cepat memperoleh hasil solusi dari permasalahan yang ada. Pada tahap ini juga dijelaskan kembali tentang bahasa pemrograman yang digunakan serta beberapa latihan soal.

Hasil belajar mahasiswa sebelum menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB* dilakukan secara manual, maksudnya adalah melakukan perhitungan numerik menggunakan kalkulator dengan kesepakatan bahwa penyelesaian soal menggunakan galat pemotongan. Menyelesaikan soal-soal ini harus ekstra teliti dan sabar, karena jika salah memodelkan soal maka hasil akhirnya juga salah, terutama jika menggunakan metode tidak langsung yang mengharuskan melakukan iterasi. Sebaliknya, jika menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB* maka hasil akhirnya langsung diperoleh dengan syarat tidak melakukan kesalahan konsep ketika mensubstitusi nilai-nilai dari variabel maupun fungsinya.

Berikut adalah penjabaran dari hasil postes mahasiswa.

Pada soal pertama yang berbunyi:

Tentukan solusi SPL berikut dengan tebakan awal (1,3,2), $M = 3$, dan $EPS = 0.01$

$$8x + 2y - z = 11$$

$$5x - y + z = 10$$

$$-x + y + 4z = 3$$

Sebanyak 4 mahasiswa yang nilainya tidak sempurna. 1 mahasiswa salah konsep Sisanya 13 mahasiswa memperoleh nilai sempurna menggunakan software *MATLAB*. Berikut adalah jawaban mahasiswa yang menjawab benar pada *MATLAB*

masukkan elemen-elemen matriks A dan matriks C !

Input elemen Matriks A : [8 2 -1; 5 -1 1; -1 1 4]

Baris 2 matriks A tidak dominan diagonal.

Matriks A tidak dominan diagonal!

Jadi, soal di atas adalah soal sederhana yang hasilnya tidak ada jika menggunakan iterasi Jacobi maupun Gauss Seidel karena syaratnya harus matriks diagonal. Akan tetapi terdapat juga mahasiswa dengan menggunakan cara lain sehingga solusinya dapat dicari.

SPL dengan Pivoting Parsial

Banyaknya(n) variabel dalam SPL = 3

masukkan elemen-elemen matriks A!

Input elemen Matriks A : [8 2 -1 11; 5 -1 1 10; -1 1 4 3]

Matriks A yang telah anda input adalah:

$$\begin{array}{cccc} 8 & 2 & -1 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

untuk menentukan solusi dari SPL tersebut menggunakan pivoting Parsial, maka kita perlu menolkan semua elemen yang berada dibawah elemen $a(i,i)$ dimana $i=1,2,3,\dots,n-1$ menggunakan algoritma Gauss Naif. Berikut adalah langkah-langkahnya:

Langkah 1

Dengan melakukan operasi pada Baris (B) berikut.

$$B2 - (0.63*B1)$$

$$B3 - (-0.13*B1)$$

diperoleh matriks A baru:

$$\begin{array}{cccc} 8.0000 & 2.0000 & -1.0000 & 11.0000 \\ 0 & -2.2500 & 1.6250 & 3.1250 \\ 0 & 1.2500 & 3.8750 & 4.3750 \end{array}$$

Langkah 2

Dengan melakukan operasi pada Baris (B) berikut.

$$B3 - (-0.56*B2)$$

diperoleh matriks A baru:

$$\begin{array}{cccc} 8.0000 & 2.0000 & -1.0000 & 11.0000 \\ 0 & -2.2500 & 1.6250 & 3.1250 \\ 0 & 0 & 4.7778 & 6.1111 \end{array}$$

$$x_3 = c_3/a(3,3), \text{ maka } \mathbf{x_3 = 1.2791}$$

dengan menggunakan algoritma penyulihan mundur, dimana

$x_i = (c_i - \text{Sigma} \{a(ij).x_j\} \text{ dari } j=i+1 \text{ sampai } n) / a(ii)$,

dengan $i = n-1, n-2, \dots, 1$ maka diperoleh:

$$x_2 = 3.1250 - (2.0785) / -2.2500 = -0.4651$$

$$x_1 = 11.0000 - (-2.2093) / 8.0000 = 1.6512$$

Sebagian mahasiswa sebelum menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB* banyak yang menjawab soal ini dengan benar, Sebagiannya lagi menjawab salah karena kesalahan konsep (menggunakan iterasi Jacobi dan Gauss Seidel) dan juga tidak menggunakan kesepakatan galat pemotongan.

Pada soal kedua berbunyi:

Diketahui sebuah fungsi $f(x) = \tan x$ yang memiliki 4 titik yaitu 0,5; 0,6; 0,7; dan 0,8. Hitunglah $\tan 0,56$ menggunakan semua titik.

Pada soal ini hanya 10 mahasiswa yang mendapatkan nilai sempurna atau 58,8% , 2 mahasiswa kurang lengkap, 1 mahasiswa tidak menjawab, dan sisanya salah konsep. Berikut adalah jawaban salah satu mahasiswa yang salah konsep dasar matematikanya.

Interpolasi Beda Maju Newton

Silahkan masukkan nilai x_0, h , dan $y_i, i=0,1,2,\dots,n$ serta nilai x yang akan ditentukan $p_n(x)$ -nya.

$$x_0 = 0.5$$

$$h = 0.1$$

Gunakan kurung siku di awal dan akhir dalam menginput y_i , <spasi>sebagai pemisah antar indeks.

$$y_i = [0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8]$$

$$x = 0.56$$

Penyelesaian:

Nilai dari $i, x_i, f_i, d1f_i, d2f_i, d3f_i$ berturut-turut adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0.50 & 0.500000 & 0.100000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 1 & 0.60 & 0.600000 & 0.100000 & 0.000000 & \\ 2 & 0.70 & 0.700000 & 0.100000 & & \\ 3 & 0.80 & 0.800000 & & & \end{array}$$

$$r = (x-x_0)/h = 0.6000$$

$$\begin{aligned} p_3(0.5600) &= f_0 + (r.d1f_0)/1! + (r.(r-1).d2f_0)/2! + (r.(r-1).(r-2).d3f_0)/3! \\ &= 0.500000 + (0.6000(0.100000))/1 + (0.6000(0.6000-1)(0.000000))/2 + \\ &\quad (0.6000(0.6000-1)(0.6000-2) (0.000000))/6 \\ &= 0.560000 \end{aligned}$$

Seharusnya nilai dari variabel y_i nya juga ditulis hasil dari $y(x)$, tetapi yang dilakukan adalah tetap menulis variabelnya x nya. Berikut adalah jawaban benar dari salah seorang mahasiswa.

Silahkan masukkan nilai x_0, h , dan $y_i, i=0,1,2,\dots,n$ serta nilai x yang akan ditentukan $p_n(x)$ -nya.

$$x_0 = 0.5$$

$$h = 0.1$$

$$y_i = [0.5463 \ 0.6841 \ 0.8422 \ 1.0296]$$

$$x = 0.56$$

Penyelesaian:

Nilai dari $i, x_i, f_i, d1f_i, d2f_i, d3f_i$ berturut-turut adalah sebagai berikut.

0	0.50	0.546300	0.137800	0.020300	0.009000
1	0.60	0.684100	0.158100	0.029300	
2	0.70	0.842200	0.187400		
3	0.80	1.029600			

$$r = (x-x_0)/h = 0.6000$$

$$\begin{aligned} p_3(0.5600) &= f_0 + (r.d1f_0)/1! + (r.(r-1).d2f_0)/2! + (r.(r-1).(r-2).d3f_0)/3! \\ &= 0.546300 + (0.6000(0.137800))/1 + (0.6000(0.6000-1)(0.020300))/2 + \\ &\quad (0.6000(0.6000-1)(0.6000-2)(0.009000))/6 \\ &= 0.627048 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh hasil dari $tg \ 0,56$ adalah $0,627048$.

Sebagian besar mahasiswa sebelum menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB* benar dalam menjawab soal ini. Sebagian kecil salah karena tidak merubah mode kalkulator menjadi mode *radian* sehingga kalkulatornya masih menggunakan mode *degree*. Hal ini mengakibatkan nilai f_i menjadi tidak benar sehingga hasil akhirnya pun juga salah total meskipun prosesnya benar.

Hasil dari kedua soal tes yang diberikan dapat menggunakan berbagai macam metode. Hasilnya akan selalu sama. Jadi, dalam penelitian ini mahasiswa dapat bebas memilih metode mana yang mereka gunakan.

Berdasarkan paparan di atas, diketahui bahwa rata-rata kesalahan yang dilakukan mahasiswa saat menggunakan pengembangan bahan ajar Metode Numerik menggunakan software *MATLAB* terletak pada soal no.2 yaitu karena pemahaman konsep matematis. Jadi, pemrograman *MATLAB* merupakan salah satu sarana untuk membantu melakukan perhitungan yang kompleks pada Metode Numerik dan tidak dapat memfasilitasi pemahaman mahasiswa terhadap konsep Metode Numerik.

Kendala waktu juga menyebabkan latihan penggunaan software ini kurang maksimal sehingga hasil belajar yang diperoleh sesudah diberi perlakuan juga kurang optimal. Selain itu, menurut Fraenkel, *at all* (2007) desain pada penelitian ini termasuk lemah sehingga hal ini juga termasuk kekurangan dalam penelitian ini. Oleh sebab itu, data pada penelitian ini menghasilkan tidak terdapat perbedaan sebelum dan sesudah penggunaan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB*. Walaupun demikian, terjadi peningkatan skor rerata mahasiswa setelah diadakan perlakuan pengembangan bahan ajar menggunakan software *MATLAB*. Hal ini sejalan dengan penelitian Sobiruddin (2015:8) yang menyatakan bahwa terjadi peningkatan kemampuan mahasiswa jurusan pendidikan matematika khususnya kemampuan menyusun algoritma dan kemampuan menyelesaikan masalah numeric setelah pembelajarannya menggunakan software *MATLAB*, serta melatih kemampuan mahasiswa dalam menyusun pemrograman dengan menggunakan software *MATLAB*.

Berikut adalah tanggapan dari beberapa mahasiswa terkait penggunaan pengembangan bahan ajar ini.

- Menyelesaikan masalah metode numerik menggunakan *MATLAB* lebih mudah di banding dengan menggunakan manual karena dengan menggunakan matlab program telah di atur secara otomatis di m-file.
- Menggunakan aplikasi matlab mempermudah penyelesaian tapi harus akan sedikit membingungkan bagi yang kurang latihan☹
- Lebih baik memakai matlab karena lebih cepat dan lebih akurat.

Demikianlah beberapa tanggapan dari mahasiswa. Intinya software *MATLAB* merupakan salah satu sarana untuk membantu melakukan perhitungan yang kompleks pada Metode Numerik, sangat efektif dan efisien dalam menemukan selesaian, akan tetapi software ini tidak dapat memfasilitasi pemahaman

mahasiswa terhadap konsep Metode Numerik. Oleh karena itu, salah cara agar mahasiswa tidak mengalami salah konsep adalah dengan cara memperbanyak latihan.

4. Penutup

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian ini adalah tidak terdapat perbedaan hasil belajar mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan pengembangan bahan ajar menggunakan software MATLAB. Salah satu penyebabnya adalah mahasiswa salah konsep matematisnya dan kurangnya latihan.

4.2 Rekomendasi

Rekomendasi berdasarkan penelitian ini adalah perbanyak latihan menggunakan softwarena sehingga pemahaman konsep matematis mahasiswa juga berkembang.

Ucapan Terima Kasih

Peneliti ucapkan terima kasih pada pihak yang telah membantu secara substansi maupun finansial, yaitu:

1. PUSLITPEN atas bantuan dana hibah BOPTN DIPA APBN UIN Syarif Hidayatullah Jakarta tahun anggaran 2016.
2. Ibu Dra.Hj. Armis, M.Pd selaku dosen validator dan pembimbing.
3. Bapak Drs. Dindin Sobiruddin, M.Kom selaku dosen validator.
4. Andri Andastem, S.Pd

Daftar Pustaka

- Fraenkel, JR., and Norman E Wallen. (2007). *How to Design and Evaluate Research in Education, Sixth Edition*. Singapore: International Edition.
- Haryati. (2012). *Research and Development (R&D) sebagai Salah Satu Model Penelitian dalam Bidang Pendidikan*. Artikel. [Online]. Tersedia: <http://download.portalgaruda.org/article.php?article=60637&val=4518&title=>. [14 Maret 2015].
- MATLAB. <https://id.wikipedia.org/wiki/MATLAB>. [25 Februari 2016].
- Murni, A. (2012). *Metode Numerik*. Pekanbaru: UR Press.
- Putri, FM. (2017). The Development of Teaching Materials of Numerical Methods by Using MATLAB Software. Dalam *Applied Science and Technology, Proceedings Series*. [Online]. Vol 1, (1), 4 halaman. Tersedia: <http://estech.org/index.php/IJSAT/article/viewFile/58/pdf>. [16 Maret 2017].
- Sobiruddin, D. (2015). Penerapan Software MATLAB Terhadap Kemampuan Menyelesaikan Masalah Numerik Mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika. *Paradikma Jurnal Pendidikan Matematika*. Vol 8, (1), 1-14
- Sugiyono. (2015). *Metode Penelitian Pendidikan Pendekatan Kuantitatif, Kualitatif dan R&D*. Bandung: Penerbit Alfabeta.
- Unaradjan, DD. (2013). *Metode Penelitian Kuantitatif*. Jakarta: Universitas Atma Jaya Jakarta.

MEMPERKENALKAN KONSEP NILAI MUTLAK MELALUI KONTEKS 'AIR AND SEA' PADA SISWA SEKOLAH MENENGAH PERTAMA

Nyaiyu Fahriza Fuadiah

*Program Doktor Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia
Email: fahrizafuadiah@student.upi.edu*

Abstrak

Sebagai bagian dari konsep matematika yang nantinya banyak diaplikasi pada materi lainnya, konsep nilai mutlak perlu diperkenalkan kepada siswa sekolah menengah. Konsep ini dapat terintegrasi pada materi bilangan bulat yang membahas tentang bilangan bulat positif, nol, dan bilangan bulat negatif di kelas 7 sekolah menengah pertama. Kajian penulis terhadap beberapa buku teks matematika yang memuat materi bilangan bulat, konsep nilai mutlak belum dibahas dengan porsi yang sesuai. Kendala yang dialami guru adalah bagaimana menyampaikan kepada siswa bahwa nilai mutlak akan selalu positif atau nol, tapi tidak pernah negatif. Konsep nilai mutlak dapat diperkenalkan sebagai konsep jarak, sesuai dengan kemampuan berpikir siswa saat itu. Peneliti kemudian mendesain suatu situasi didaktis untuk menanamkan konsep ini kepada siswa kelas 7 sesuai dengan tingkat berpikir mereka dengan menggunakan konteks 'Air and Sea'. Ujicoba desain diimplementasikan pada 32 orang siswa kelas 7 di suatu sekolah menengah pertama. Seluruh kegiatan pembelajaran direkam untuk mendapatkan gambaran yang utuh sejauh mana desain ini memberikan kontribusi kepada siswa. Hasil uji coba memperlihatkan bahwa siswa dapat memahami bahwa jarak dua objek benda selalu bernilai positif walaupun berada pada "daerah negatif".

Kata Kunci: jarak, nilai mutlak, situasi didaktis

1. Pendahuluan

Pembelajaran memiliki hakikat perencanaan atau perancangan (desain) sebagai upaya untuk membelajarkan siswa (Uno, 2006:2). Menurut Uno selanjutnya, dalam belajar siswa tidak hanya berinteraksi dengan guru sebagai sumber belajar, tetapi mungkin berinteraksi dengan keseluruhan sumber belajar yang dipakai untuk mencapai tujuan pembelajaran yang diinginkan sehingga pembelajaran memusatkan perhatian pada "bagaimana membelajarkan siswa", dan bukan pada "apa yang dipelajari siswa". Pada pembelajaran matematika Eisenhart (Cobb, Yackel & Wood, 1992) menyatakan bahwa pembelajaran matematika dapat dilihat sebagai proses konstruksi individu maupun sebagai proses akulturasi ke dalam matematika itu sendiri dan kegiatan sosial yang lebih luas. Dapat dikatakan bahwa pembelajaran matematika merupakan proses interaksi antara guru dan siswa yang melibatkan pengembangan pola berpikir dan mengolah logika pada suatu lingkungan belajar yang sengaja diciptakan oleh guru dalam suatu proses yang disebut proses belajar mengajar.

Materi pelajaran matematika yang tertuang dalam silabus mata pelajaran matematika SMP kelas 7 dalam Kurikulum 2013, operasi hitung bilangan bulat menjadi materi pertama yang diberikan kepada siswa (Kemendikbud, 2014). Walaupun tampak mudah, materi ini belum bisa dikuasai dengan baik oleh sebagian siswa kelas 7. Sebagian besar masalahnya adalah operasi hitung yang melibatkan bilangan negatif. Dari beberapa penelitian kesulitan siswa dalam memahami bilangan negatif sebagian besar disebabkan karena sifat abstrak yang melekat pada bilangan negatif (Altıparmak & Ozdoğan, 2010; Larsen, 2012; Heffer, 2011). Kesulitan pada siswa juga terjadi pada konten materi Nilai mutlak atau Nilai mutlak. Ketika siswa menentukan selisih antara dua benda yang direpresentasikan dengan bilangan positif dan negatif maka terdapat berbagai jawaban yang diberikan. Almog dan Ilany (2012) mengungkapkan adanya hambatan epistemologis dalam mengajarkan konsep nilai mutlak yang kemudian menjadi kesulitan tersendiri bagi siswa untuk memahami makna dari konsep nilai mutlak tersebut. Hasil studi yang dilakukan peneliti terhadap 96 orang siswa kelas 7 yang telah mendapatkan materi Bilangan

Bulat, terdapat lebih 84% siswa tidak dapat menjawab dengan tepat selisih dari dua bilangan yang melibatkan bilangan negatif (Fuadiah, Suryadi, & Turmudi, 2016).

Sayangnya, buku teks tidak selalu menyajikan informasi dalam cara-cara yang meningkatkan pembelajaran dan hanya menempatkan siswa dalam peran pasif (Ormrod, 2002:160). Ormrod mengungkapkan dari berbagai analisis buku teks di sekolah ditemukan bahwa fokus sebagian besar teks adalah mengajarkan fakta-fakta tertentu dengan sedikit perhatian untuk membantu siswa mempelajari fakta-fakta tersebut dalam cara-cara yang bermakna. Hal ini terlihat di kurikulum matematika SMP di Indonesia, konsep nilai mutlak tidak terlalu menjadi perhatian utama. Dari beberapa buku teks matematika yang ditelaah peneliti, konsep ini secara implisit terkandung dalam operasi hitung bilangan bulat tanpa menyebutkan secara jelas konsep nilai mutlak. Tidak mengherankan jika nilai mutlak menjadi materi yang sulit dipelajari siswa ketika mereka berada di sekolah menengah atas bahkan perguruan tinggi seperti yang diungkapkan dalam hasil beberapa studi.

Dalam konteks aritmatika, definisi nilai mutlak memiliki aturan bahwa nilai bilangan positif tidak berubah dan mengubah bilangan negatif menjadi positif (Wilhelmi, Godino & Lacasta, 2007). Nilai mutlak $|x|$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} |x|=x & \text{jika } x \geq 0 \\ |x|=-x & \text{jika } x < 0 \end{array}$$

Misalnya, $|5|=5$, $|0|=0$, dan $|-7|=-(-7)=7$.

Nilai mutlak biasanya tidak menjadi obyek perhatian khusus dalam pelajaran matematika di sekolah, materi ini biasanya dijelaskan sepintas dalam materi bilangan positif dan negatif (Chiarugi, Fracassina, & Furinghetti, 1990). Pada kurikulum matematika untuk sekolah menengah di Jepang, nilai mutlak mendapat perhatian khusus dengan selalu menanamkan konsep nilai mutlak di setiap konten materinya, seperti definisi bilangan positif lebih besar dari nol, nilainya akan semakin besar sesuai dengan pertambahan nilai mutlaknya dan bilangan negatif lebih kecil dari nol, nilainya akan semakin menurun sesuai dengan pertambahan nilai mutlaknya (Keirinkan, 2013:18). Sama seperti di Jepang, di Indonesia konsep nilai mutlak disinggung dalam materi bilangan positif dan negatif pada siswa kelas 7 (yang terintegrasi dalam materi Bilangan Bulat).

Berdasarkan pengamatan dan kajian peneliti, kesulitan utama yang di alami siswa dalam menentukan selisih antara dua bilangan adalah adanya bilangan negatif. Misalnya menentukan selisih -3 dan 5, beberapa siswa menuliskan sebagai $-3 + 5$ atau $5 - 3$. Glaeser (dalam Heeffer, 2011) menyatakan sejumlah kendala epistemologis siswa dalam mempelajari bilangan negatif yaitu ketidakmampuan untuk memanipulasi jumlah negatif dan kesulitan memberi makna pada bilangan negatif. Siswa kesulitan dalam memaknai bilangan negatif karena jumlah benda-benda yang ada di sekitar mereka dilambangkan sebagai bilangan positif. Inilah yang memunculkan kendala apabila siswa dihadapkan pada operasi bilangan bulat yang melibatkan bilangan negatif. Konsep nilai mutlak yang memuat konsep bilangan negatif menjadi kendala terbesar siswa dalam mempelajari materi nilai mutlak. Konsep ini kemudian berlanjut ke jenjang berikutnya ketika siswa berada pada sekolah menengah atas dengan materi persamaan nilai mutlak.

Gagatsis dan Panaoura (2014) menjelaskan penjabaran pengertian nilai mutlak melalui tiga tahap perkembangan dalam sejarahnya, yaitu (i) nilai mutlak sebagai konsep implisit; (ii) gagasan nilai mutlak dalam aljabar dari ketidaksamaan; (iii) transisi ke konteks konseptual baru di mana nilai mutlak berkembang menuju notasi dan formalisasi. Pada tahap kedua inilah nilai mutlak muncul sebagai bilangan tanpa tanda dan sebagai suatu jarak dari nol. Menurut Purcell (1993:19) salah satu cara terbaik untuk membayangkan nilai mutlak adalah sebagai jarak (tak berarah) melalui pengertian jarak antara x dan titik awal, misalnya $|x-a|$ adalah jarak antara x dengan a . Konsep inilah yang kemudian peneliti kembangkan sebagai dasar utama dalam mendesain pembelajaran mengenai nilai mutlak.

Salah satu aspek yang perlu dipertimbangkan dalam mendesain pembelajaran adalah karakteristiknya siswa sesuai dengan perkembangan intelektual dan kognitifnya (Uno, 2006:3). Dalam memahami matematika, proses belajar dan tingkat berpikir yang disebut sebagai lintasan belajar (learning trajectory) menjadi hal yang harus diperhatikan untuk mencapai tujuan yang diharapkan (Clements & Sarama, 2004:83). Lebih jauh Clements dan Sarama menjelaskan bahwa lintasan belajar adalah gambaran pemikiran siswa saat proses pembelajaran berupa dugaan dan hipotesis dari serangkaian desain pembelajaran untuk mendorong perkembangan berpikir siswa agar tujuan pembelajaran matematika dapat tercapai sesuai dengan yang diharapkan. Oleh karena itu pembelajaran matematika yang sesuai dengan lintasan belajar anak melalui aktivitas yang menarik akan membangkitkan motivasi anak dalam mempelajari matematika. Aktivitas pembelajaran yang terpusat pada siswa, tidak hanya bertujuan

membantu pembelajaran dan prestasi saja, melainkan juga untuk meningkatkan kemampuan metakognitif dan pengaturan diri yang sangat penting bagi kesuksesan jangka panjang (Ormrod, 2002:150).

Aktivitas belajar mengajar memiliki keterkaitan yang erat antara guru, siswa, dan materi sebagai komponen didaktis yang mempunyai kepentingan yang setara. Suryadi (2013) menjelaskan bahwa fokus guru yang lebih besar kepada penjabaran tujuan pembelajaran mengakibatkan minimnya antisipasi yang bersifat didaktis. Selain itu keragaman respon siswa yang kurang dipertimbangkan dalam rencana pembelajaran akan berdampak ketidaksesuaian proses situasi yang dikembangkan berikutnya dengan learning trajectory yang seharusnya dilalui seorang siswa. Hal tersebut antara lain disebabkan sebagian respon siswa atas situasi didaktik yang dikembangkan di luar jangkauan pemikiran guru atau tidak tereksplor sehingga kesulitan belajar yang muncul beragam tidak direspon guru secara tepat atau tidak direspon sama sekali. Jika hambatan ini tidak diantisipasi maka akan berlanjut pada materi-materi berikutnya terutama materi-materi yang berkaitan dengan materi sebelumnya. Oleh karena itu diperlukan suatu proses pembelajaran dapat mendorong terjadinya situasi belajar yang lebih optimal, yang harus dilakukan sebelum pembelajaran (Suryadi, 2013).

Setiap siswa memiliki potensinya masing-masing. Untuk menggali potensi itu guru memegang peranan penting untuk mendorong ide-ide matematika dalam suatu konteks melalui proses penyelidikan (Brousseau, 2002). Oleh karena itu, kita perlu menyadari sepenuhnya bahwa penting bagi guru untuk merancang pembelajaran dengan desain didaktis untuk mengantisipasi semua tanggapan siswa mungkin pada situasi didaktis (Suryadi, 2013). Penerapan teori situasi didaktik melalui desain situasi didaktik yang diciptakan oleh guru dalam kegiatan pembelajaran di kelas diharapkan untuk mengembangkan potensi siswa, yang mereka dapat membangun pengetahuan mereka sendiri yang akan dicapai melalui serangkaian proses abstraksi. Tindakan dan umpan balik melalui strategi akan memungkinkan pembentukan pengetahuan baru. Brousseau mengidentifikasi tiga situasi utama, yaitu action, formulation, dan validation (Artigue et.al, 2014; Brousseau, 2002). Konsep yang mendasar dalam materi matematika juga perlu mendapat perhatian lebih, karena konsep dasar yang dapat dimaknai dengan baik oleh siswa memberikan pengaruh dalam memahami suatu konteks ditingkat yang lebih tinggi.

Berdasarkan uraian yang telah dijabarkan, peneliti merancang desain pembelajaran nilai mutlak dengan mengintegrasikan konten nilai mutlak melalui materi Bilangan Bulat, memperkenalkan konsep nilai mutlak sebagai konsep jarak, dan mendesain situasi didaktis dengan konteks yang sesuai dengan tingkat berpikir siswa. Pembelajaran dilaksanakan melalui situasi didaktis dengan konteks yang dekat dengan siswa dan mendukung proses penyelidikan. Oleh karena itu, peneliti mendesain situasi didaktis yang mendukung konsep nilai mutlak untuk siswa kelas 7 yang sesuai dengan tahap berpikirnya. Tujuan penelitian ini secara khusus adalah untuk memperkenalkan konsep nilai mutlak kepada siswa melalui konteks "Air and Sea" yang telah mereka kenal, sedangkan secara umum adalah untuk memberikan kontribusi kepada guru dalam menciptakan suatu desain pembelajaran berbasis situasi didaktis.

2. Metode

Desain pembelajaran nilai mutlak yang dirancang merupakan bagian dari rumusan *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) yang didesain peneliti dalam materi Bilangan Bulat Negatif. Implementasi desain dilaksanakan pada 32 siswa pada salah satu kelas 7 di salah satu SMP Negeri di kota Palembang sebagai subjek penelitian. Peneliti bertindak sebagai observer partisipan yaitu peneliti bertindak langsung sebagai guru model. Guru mata pelajaran matematika di kelas subjek bertindak sebagai observer yang mengamati kegiatan pembelajaran dengan maksud dapat memberikan masukan dan saran berkaitan dengan alur pembelajaran. Adapun desain pembelajaran disusun berdasarkan aspek kurikulum matematika kelas 7, konsep nilai mutlak, dan karakter berpikir siswa berdasarkan hasil studi pendahuluan dan studi literatur yang dialami peneliti. Desain pembelajaran disusun berdasarkan tahap-tahap pembelajaran dalam teori situasi didaktis. Alur pembelajaran didesain seperti pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Desain pembelajaran Nilai Mutlak

Tujuan Pembelajaran	Fase	Situasi Didaktis (Input guru)	Aktivitas Siswa	Hipotesis Matematis
	<i>Action</i>			
1. Jarak merupakan selisih dari dua objek		Guru menyiapkan beberapa pertanyaan yang berkaitan dengan jarak dan selisih (sebelumnya siswa telah mengenal garis bilangan).	Siswa menentukan jawaban sesuai dengan pertanyaan yang diberikan melalui diskusi dengan teman sebangku atau kelompoknya	Siswa memberikan jawaban dengan menggunakan operasi hitung
2. Jarak selalu bernilai		Kalimat pertanyaan yang diajukan seperti: Seekor ikan berada 20		

positif dengan tidak memperhatikan arahnya.	meter di bawah permukaan laut. Pada saat yang sama seekor burung berada tepat di atas ikan setinggi 10 meter di atas permukaan laut. Berapakah jarak ikan dan burung tersebut?		
<i>Formulation</i>	Guru meminta siswa menggambarkan konteks lautan pada sehelai kertas dan menyebutkan apa saja yang mereka temui. Meminta siswa menggambarkan garis bilangan yang merepresentasikan konteks "Air and sea" Guru menyebutkan beberapa objek dengan posisi yang telah ditentukan baik sebagai bilangan positif maupun negatif.	Menggambarkan beberapa objek yang terdapat di lautan. meletakkan beberapa objek dengan posisi yang telah ditentukan Menentukan jarak antara dua objek	Siswa mengkonstruksi konteks "Air and Sea" melalui sebuah garis bilangan Siswa dapat menentukan jarak dari dua objek yang berbeda
<i>Validation</i>	Mengajak siswa memeriksa dan jawaban, kemudian guru memberikan penguatan terhadap jawaban siswa dan mengarahkan pada kesimpulan dan memberikan penguatan	Siswa menjelaskan jawaban yang diminta dengan memberikan argumennya sendiri	Siswa dapat menyimpulkan bahwa jarak tidak memperhatikan arahnya yang dimaknai sebagai nilai mutlak

Seluruh kegiatan pembelajaran direkam melalui kamera video dan catatan lapangan yang didapat melalui pengamatan. Data yang didapat dianalisis secara deskriptif kualitatif. Analisis terhadap rekaman video bertujuan untuk merefleksikan pembelajaran pada materi nilai mutlak secara kemungkinan dapat terjadi revisi atau perbaikan desain pembelajaran.

3. Hasil dan Pembahasan

Kegiatan pembelajaran di kelas dilaksanakan dalam tiga tahap, yaitu 1) *Action*, 2) *Formulation*, dan 3) *Validation*. Siswa kelas 7 pada semester awal merupakan siswa pada tahap transisi dari sekolah dasar ke sekolah menengah. Oleh karena itu pembelajaran dengan menggunakan gambar-gambar yang merepresentasikan suatu konteks menjadi lebih menarik bagi mereka. Pada tahap *action*, guru memberikan konteks "Air and Sea", siswa menyebutkan objek-objek apa saja yang pernah mereka temui, kemudian menggambarkan konteks tersebut (Gambar 1). Pada tahap ini siswa membangun model secara implisit: seperangkat aturan dan hubungan untuk mengambil suatu keputusan baru tanpa disadari atau perlu diungkapkan secara eksplisit (Manno, 2006). Hal ini sejalan dengan prinsip psikologis tentang mengajar yaitu kegiatan belajar mengajar haruslah dimulai dari yang sederhana kepada yang kompleks dan dari konkret kepada yang abstrak (Uno, 2006:7).



Gambar 1. Salah satu gambar siswa dalam konteks "Air and Sea"

Konteks lautan memiliki representasi sebagai garis bilangan. Siswa telah mengenal garis bilangan sebelumnya di sekolah dasar. Dalam kegiatan ini guru mengaitkan isi pembelajaran yang akan dibahas dengan pengetahuan yang telah dimiliki siswa sebelumnya. Proses mengaitkan dan menghubungkan pengetahuan awal (*prior knowledge*) yang dimiliki siswa dengan isi pembelajaran yang akan dibahas akan sangat membantu dalam meningkatkan motivasi belajar siswa (Wena, 2011:18). Dalam hal ini, konsep garis bilangan yang telah diketahui siswa dapat membantu untuk merepresentasikan jarak dari dua objek. Selanjutnya siswa meletakkan objek-objek yang telah ditentukan pada garis bilangan tersebut (Gambar 2). Objek-objek ini merupakan analogi dari bilangan-bilangan positif dan negatif. Menurut Wena (2011:27) analogi dapat dipakai untuk memperjelas suatu konsep, prosedur, atau prinsip sehingga mudah dipahami siswa. Objek yang berada di atas permukaan laut merupakan analogi dari bilangan positif, memiliki arah ke atas. Sedangkan objek yang berada di bawah permukaan laut merupakan analogi dari bilangan negatif, disimbolkan dengan tanda minus dan memiliki arah ke bawah, berlawanan dari arah positif.



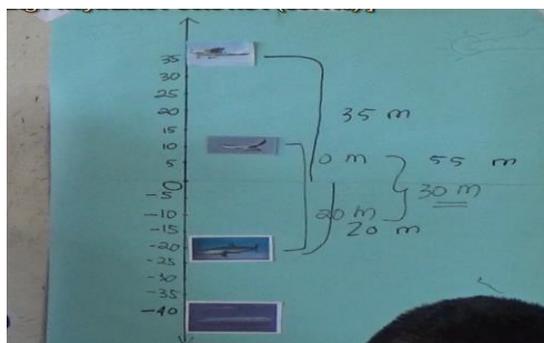
Gambar 2. Merepresentasikan konteks "Air and Sea" dalam sebuah garis bilangan vertikal

Tahap selanjutnya adalah *formulation*. Pada tahap ini memberikan siswa kesempatan untuk menciptakan model mereka sendiri secara implisit untuk mengungkapkan strategi dengan kata-kata yang dapat dipahami siswa lain, membahas, dan beragumen yang membuat siswa lainnya menerima penjelasannya (Kinslenko, 2005). Siswa memberikan jawaban atas pertanyaan yang diajukan oleh guru mengenai jarak dua objek yang berbeda; satu objek berada pada daerah positif sedangkan yang lainnya pada daerah negatif. Beberapa orang siswa menjawab pertanyaan dengan melakukan operasi hitung (lihat Gambar 3). Seorang siswa mencoba memberikan jawabannya: seekor ikan yang berada 20 meter di bawah permukaan laut direpresentasikan sebagai -20, sedangkan seekor burung yang terbang setinggi 10 meter di atas permukaan laut direpresentasikan sebagai 10, sehingga jarak keduanya dituliskan sebagai $10 + (-20) = -30$ meter. Jawaban siswa ini memperlihatkan jika ia dapat merepresentasikan posisi suatu objek kepada bilangan yang tepat, namun kurang tepat dalam menentukan operasi hitung yang mewakili jarak serta keliru dalam menentukan hasil operasinya. Jarak yang dituliskan sebagai bilangan negatif menandakan bahwa siswa tersebut belum memahami bahwa jarak selalu bernilai positif. Berbagai jawaban diberikan siswa baik secara tertulis maupun lisan, namun pada tahap ini secara keseluruhan siswa belum dapat menentukan jarak dengan tepat apabila terdapat komponen bilangan negatif.

Gambar 3. Beberapa jawaban siswa untuk menentukan jarak

Tahap selanjutnya adalah *validation*. *Validation* merupakan suatu proses yang membawa ide 'pembentukan teorema' (Brousseau, 2002: 13). Brousseau menjelaskan bahwa tahap ini dapat dijadikan sebagai sarana berkomunikasi secara eksplisit bagi siswa dan juga sebagai sarana belajar untuk membangun pemikiran logis berdasar bukti. Sedangkan bagi guru sendiri, mengemukakan teorema dan

strategi di papan tulis adalah salah satu cara untuk menunjukkan pemahaman guru terhadap materi matematika (Kinslenko, 2005). Pada tahap ini guru mendorong siswa pada suatu konsep dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan yang mengelaborasi masalah yang diajukan. Pertanyaan ini menggiring siswa pada suatu konsep. Siswa kedua memberikan penjelasannya bahwa seekor ikan yang berada 20 meter di bawah permukaan laut memiliki jarak positif 20 (lihat Gambar 4), sehingga jarak burung dan ikan adalah $20 + 10 = 30$ meter. Dengan demikian, dari tahap ini siswa menyadari bahwa jarak tidaklah dipengaruhi oleh arah.



Gambar 4. Jawaban siswa setelah memahami pengertian jarak

Berdasarkan analisis peneliti, konsep nilai mutlak sebagai konsep jarak lebih mudah dipahami siswa dengan menggunakan konteks dan media yang tepat. Guru dapat menanamkan konsep nilai bilangan riil x yang selalu tak negatif dengan secara aktif membangun interaksi dengan siswa. Sejalan dengan apa yang dikemukakan oleh Schoenfeld (2012) bahwa ketika siswa terlibat dalam situasi matematis dan pedagogis, mereka mengembangkan pemahaman yang mendalam mengenai konsep matematika. Sfard (1991) berpendapat bahwa terdapat dua pendekatan untuk mengembangkan konsep, yaitu operasional yang berfokus pada proses, dan yang lain struktural yang lebih menekankan pada objek. Proses ini disebut sebagai institutionalization (Brousseau, 2002: 18) yaitu proses yang memungkinkan siswa mengubah pengetahuan mereka sebelumnya menjadi pengetahuan baru melalui penguatan oleh guru yang memberi mereka nilai kebenaran dan memungkinkan untuk menggunakan pengetahuan baru yang diperoleh untuk memecahkan masalah berikutnya.

4. Simpulan dan Saran

Upaya perbaikan pembelajaran perlu dilakukan dengan asumsi bahwa untuk memperbaiki kualitas pembelajaran perlu diawali dengan perencanaan pembelajaran yang diwujudkan dengan adanya desain pembelajaran. Perencanaan yang terencana dengan baik memungkinkan untuk melakukan tindakan pembelajaran sesuai dengan kebutuhan siswa. Berdasarkan analisis terhadap keseluruhan proses pembelajaran, melalui desain situasi didaktis menggunakan konteks "Air and Sea", siswa mengetahui bahwa: 1) jarak merupakan selisih dari dua objek, dan 2) jarak selalu bernilai positif dengan tidak memperhatikan arahnya. Dalam perencanaan pembelajaran, terdapat kemungkinan bahwa materi akan diajarkan dalam waktu yang dialokasikan sehingga pembelajaran dapat berjalan sesuai dengan waktu yang diharapkan dalam silabus. Bagaimana guru merencanakan pengajaran mereka tidak lepas dari pengalaman mengajar mereka sebelumnya, meskipun sebagian besar guru mendasarkan pelajaran mereka pada buku guru yang melengkapi buku teks siswa. Ketika guru mengontrol dan menyesuaikan rencana mereka untuk kemajuan yang akan dicapai oleh siswa, maka akan ada efek positif pada pembelajaran. Desain pembelajaran nilai mutlak ini dapat dikembangkan lagi dengan berbagai karakter dan level kemampuan siswa. Dengan demikian akan didapat beberapa desain yang dapat dipilih guru sesuai dengan kondisi dan kebutuhan pembelajaran. Desain pembelajaran ini juga dapat diintegrasikan ke dalam materi yang sesuai.

Ucapan Terima Kasih

Peneliti mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada para dosen yang membantu dalam menelaah desain yang disusun peneliti dan para guru yang telah memberikan masukan dan saran sehingga pelaksanaan penelitian dapat berjalan dengan baik.

Daftar Pustaka

- Artigue, M., Haspekian, M. & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the theory of didactical situation (TDS). In: Ahsbahs & Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*: 47 – 65. Switzerland: Springer International Publishing.
- Altiparmak, K., & Ozdogan, E. (2010). A Study on the teaching of the concept of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(1): 31-47. <http://dx.doi.org/10.1080/00207390903189179>.
- Almog, N., & Ilany, B. S. (2012). Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 81(3), 347-364.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situation in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chiarugi, I., Fracassina, G., & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceedings of PME*, 14, 231-238.
- Clements, D., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(1), 99-122. <http://dx.doi.org/10.2307/3482604>
- Fuadiah, N. F., Suryadi, D., & Turmudi, T. (2016). Some difficulties in understanding negative numbers faced by students: A qualitative study applied at secondary schools in Indonesia. *International Education Studies*, 10(1), 24. <http://dx.doi.org/10.5539/ies.v10n1p24>
- Gagatsis, A., & Panaoura, A. (2014) A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(2), 159-173. <http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2013.790510>
- Heffer, A. (2011). Historical objections against the number line. *Science & Education*, 20(9), 863–880. <http://dx.doi.org/10.1007/s11191-011-9349-0>.
- Larsen, J. (2012). Epistemological obstacles of negative numbers. *Vector: The Official Journal of the BC Association of Mathematics Teachers*, 53(2), 56-60. [online]. Diunduh dari: https://www.researchgate.net/publication/274310485_Epistemological_Obstacles_of_Negative_Numbers.
- Kemendikbud. (2014). *Matematika SMP/MTs Kelas 7 Semester 1*. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
- Keirinkan. (2013). *Gate the Way For the Future Math 1 For Junior High School*. Tokyo: Shinko Shuppansha Keirinkan Co. Ltd.
- Kislenko, K. (2005). Student's beliefs about mathematics from the perspective of the theory of didactical situations. In C Winslow (Ed.), *Didactic of Mathematics-the French Way* (pp. 83-96). Center For Naturfagenes Didaktis University of Copenhagen.
- Manno, G. (2006). Embodiment and a-didactical situation in the teaching-learning of the perpendicular straight lines concept. *Doctoral thesis*. Departemen of didactic mathematics Comenius University Bratislava.
- Ormrod, J.E. (2002). *Psikologi Pendidikan, Membantu Siswa Tumbuh dan Berkembang jilid 2*. Jakarta: Erlangga.
- Schoenfeld, A. (2012). Problematizing the didactic triangle. *ZDM*, 44(5), 587-599. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-012-0395-0>.
- Suryadi, D. (2013). *Didactical Design Research (DDR) dalam pengembangan pembelajaran matematika. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. Bandung: STKIP Siliwangi.
- Sfard, A. (1991). On the due nature of mathematical conception: reflection on processes and object of different side on the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 2(1): 1–36.
- Uno, H.B. (2006). *Perencanaan Pembelajaran*. Jakarta: Bumi Aksara
- Wena, M. (2011). *Strategi Pembelajaran Inovatif Kontemporer, Suatu Tinjauan Konseptual Operasional*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Wilhelmi, M.R., Godino, J.D., & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(2), 73 – 90.

PEMBELAJARAN ALJABAR BERBASIS NILAI-NILAI AKHLAK UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR ALJABAR MAHASISWA SEMESTER I UNIT 1 PRODI TADRIS MATEMATIKA STAIN MALIKUSSALEH LHOKSEUMAWE T.A 2015/2016

Rosimanidar¹, Abdussakir²

¹Prodi Tadris Matematika IAIN Lhokseumawe,

²Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
rosi_stainmal@ymail.com, abdussakir@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan bentuk pembelajaran aljabar berbasis nilai-nilai akhlak agar meningkatkan hasil belajar aljabar Mahasiswa Semester I Unit 1 Prodi Tadris Matematika STAIN Malikussaleh Lhokseumawe T.A 2015/2016. Harus diakui bahwa pembelajaran aljabar selama ini masih mengutamakan pencapaian tujuan pendidikan matematika yang bersifat material, tetapi kurang memperhatikan pencapaian tujuan pendidikan matematika yang bersifat formal, yakni untuk menata nalar mahasiswa dan membentuk kepribadiannya. Hal ini dapat dilihat masih rendahnya hasil belajar aljabar dan akhlak mahasiswa belum terbentuk dengan baik. Salah satu penyebabnya adalah mahasiswa masih memberikan sikap negatif terhadap pembelajaran aljabar, minat mahasiswa belajar aljabar masih rendah serta masih terjadinya krisis akhlak di kalangan mahasiswa. Oleh karena itu, perlu dilakukan Penelitian Tindakan Kelas (PTK), pengumpulan data dilakukan melalui tes, observasi, catatan lapangan, dan wawancara. Hasil penelitian diperoleh bahwa pembelajaran yang dilakukan dengan langkah-langkah menggunakan alat peraga ubin aljabar yang disajikan dalam aktivitas Lembar Kerja Mahasiswa (LKM) yang memuat nilai-nilai akhlak, proses pembelajaran mahasiswa secara kooperatif serta menyimpulkan konsep dari materi tentang operasi tambah dan kurang pada bentuk aljabar dan Persamaan Linier satu Variabel (PLSV) dan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel (SPLDV), menganalisis nilai-nilai akhlak yaitu nilai-nilai akhlak yang terkait dengan *hablun minannas* yaitu nilai tolong menolong, rasa hormat, dan perhatian, sedangkan nilai yang berhubungan dengan *hablun minannafsi* (diri sendiri) yaitu teliti, hemat, cermat, kerja keras, tekun, jujur, tegas, bertanggung jawab, pantang menyerah, percaya diri, dan disiplin, sehingga dapat meningkatkan hasil belajar aljabar mahasiswa semester 1 unit 1 Prodi Tadris matematika STAIN Malikussaleh Lhokseumawe.

Kata Kunci: *Hablun minannas*, *Hablun minannafsi*, Nilai-Nilai Akhlak Pembelajaran Aljabar, Hasil Belajar Aljabar

1. Pendahuluan

Standar kompetensi yang harus dimiliki seorang guru termuat dalam Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 secara utuh dikembangkan dari empat kompetensi utama, yaitu kompetensi pedagogik, kepribadian, sosial, dan profesional. Keempat kompetensi tersebut terintegrasi dalam kinerja guru. Ini menjadi tanggung jawab sivitas akademika di lingkungan program studi untuk melahirkan calon-calon guru sesuai kompetensi di atas.

Terkait dengan keempat kompetensi yang dikemukakan di atas, yang menjadi banyak permasalahan terutama di kalangan mahasiswa adalah kompetensi profesional dan kompetensi kepribadian. Kompetensi profesional berkaitan dengan penguasaan materi. Kompetensi kepribadian salah satu aspeknya adalah menampilkan diri sebagai pribadi yang jujur, tegas, manusiawi, bertakwa, dan berakhlak mulia. Kedua kompetensi ini menjadi modal utama keberhasilan calon guru serta dapat menjadi teladan bagi peserta didik dan masyarakat. Hal ini selaras dengan tujuan pendidikan nasional dan UU No 20 tahun 2003 yaitu untuk mengembangkan potensi peserta didik agar menjadi manusia yang beriman dan bertakwa kepada

Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, sehat, berilmu, cakap, kreatif, mandiri, dan menjadi warga negara yang demokratis serta bertanggung jawab.

Hal ini dikuatkan dengan pandangan Daniel Goleman [1], bahwa keberhasilan seseorang di masyarakat, ternyata 80 persen dipengaruhi oleh kecerdasan emosi (EQ) dan hanya 20 persen ditentukan oleh kecerdasan otak (IQ). Seseorang yang mempunyai masalah dalam kecerdasan emosinya akan mengalami kesulitan belajar, bergaul, dan tidak dapat mengontrol emosinya. Sebaliknya para pemuda dalam hal ini mahasiswa yang berakhlak mulia atau mempunyai kecerdasan emosi tinggi akan terhindar dari masalah-masalah umum yang dihadapi oleh mahasiswa seperti kenakalan, tawuran, narkoba, miras, perilaku seks bebas, pembunuhan, perilaku *copy-paste*, plagiarisme, kurang sopan-santun, dan malas belajar.

Masalah-masalah di atas dapat terjadi terutama disebabkan belum terpadunya nilai-nilai akhlak pada pribadi seseorang. Nilai-nilai akhlak adalah nilai normatif yang menentukan tingkah laku yang diinginkan bagi suatu sistem yang mendidik sesuai dengan tuntunan Islam menuju terbentuknya kepribadian muslim. Nilai-nilai akhlak yang dapat diinternalisasikan dalam pembelajaran aljabar adalah nilai yang terkait dengan *hablun minannas* yaitu nilai tolong menolong, rasa hormat, dan perhatian, serta yang terkait dengan *hablun minannafsi* (diri sendiri) yaitu teliti, hemat dan cermat, kerja keras, tekun dan ulet, jujur, tegas dan bertanggung jawab, pantang menyerah dan percaya diri, serta disiplin sebagaimana hasil penelitian peneliti [2].

Banyak hasil penelitian yang membuktikan bahwa akhlak mulia seseorang dapat mempengaruhi kesuksesan seseorang. Di antaranya berdasarkan penelitian di Harvard University, Amerika Serikat, yang mengungkapkan bahwa kesuksesan hanya ditentukan sekitar 20 persen oleh *hard skill* dan sisanya 80 persen oleh *soft skill*. Bahkan orang-orang tersukses di dunia bisa berhasil dikarenakan lebih banyak didukung kemampuan *soft skill* daripada *hard skill*. Hal ini mengisyaratkan bahwa mutu pendidikan akhlak sangat urgen untuk ditingkatkan. Salah satunya dapat diintegrasikan dalam pembelajaran yang diberikan selama dua belas tahun dari sejak SD sampai dengan SMA, yang porsi jam pembelajarannya paling banyak yaitu matematika, salah satunya melalui pembelajaran aljabar.

Aljabar adalah bagian dari matematika yang mempelajari hubungan dan sifat-sifat dari bilangan dengan menggunakan simbol-simbol umum. Dalam ilmu aljabar, huruf dapat digunakan untuk merepresentasikan bilangan. Dengan menggunakan huruf-huruf dan simbol-simbol matematis, dapat digunakan ekspresi aljabar yang singkat untuk menggantikan kalimat verbal yang panjang. Penguasaan materi aljabar di sekolah, sangat membantu mahasiswa Prodi Tadris Matematika dalam mengikuti mata kuliah aljabar elementer pada semester 1 (satu) dikarenakan deskripsi mata kuliahnya mencakup matematika sekolah.

Hasil pengalaman peneliti pada saat mengajar aljabar elementer diperoleh hasil belajar aljabar mahasiswa masih rendah pada penyelesaian operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dan bentuk aljabar, menerjemahkan kalimat cerita menjadi kalimat matematika dalam bentuk Persamaan Linier Satu Variabel (PLSV) dan Sistem Persamaan Linier Dua variabel (SPLDV), serta menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut. Sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah masih rendah, serta sopan-santun antar mahasiswa dan dosen masih kurang baik.

Dengan demikian pembelajaran aljabar sangat tepat berbasis nilai-nilai akhlak. Hal ini dikarenakan karena nilai-nilai yang termuat pada pembelajaran aljabar bagian dari nilai-nilai akhlak, Pembelajaran aljabar memiliki karakteristik ketaatasaan/konsistensi, artinya tidak dibenarkan adanya kontradiksi sesuai dengan karakteristik dari matematika sendiri [3]. Contohnya, untuk setiap anggota himpunan bilangan bulat, berlaku bahwa jumlah dari 2 bilangan bulat adalah bilangan bulat. Maka hasil dari $3 + 7$ haruslah bilangan bulat. Nilai konsistensi dalam Islam adalah *istiqamah*. *Istiqamah* artinya berdiri tegak di suatu tempat tanpa pernah bergeser, karena akar kata *istiqamah* berasal dari kata "*qaama*" yang berarti berdiri. Dalam kehidupan sehari-hari sangat diperlukan adanya sikap dan nilai *istiqamah* ini, sehingga akan tumbuh sikap keberanian (*Syaja'ah*), ketenangan (*Ithmi'nan*) dan optimis (*Tafa'ul*). Jika setiap mahasiswa telah terbiasa dengan berpikir matematika maka akan *istiqamah* dalam menjalankan kebenaran. Misalkan sikap *istiqamah* seorang mahasiswa dalam menutup aurat, seperti pakaian yang digunakan tidak transparan, kemudian tetap semangat dan tidak malas dalam belajar matematika, karena mahasiswa tersebut sadar akan pentingnya belajar matematika dengan tanpa kenal lelah dan tak mengenal kamus menyerah.

Keterkaitan pembelajaran aljabar sangat tepat berbasis nilai-nilai akhlak sebagaimana penelitian yang pernah dilakukan oleh Miskawayh dalam Kartanegara [4], misalnya menyebutkan sering memberikan nasihat untuk mengajari dan mendidik anak-anak dengan matematika. Ini karena

mengajarkan matematika akan menanamkan rasa cinta di hati anak-anak dan mengerti dengan pasti bahwa $2x + 3x = 5x$ adalah kebenaran, dan selain itu pastilah salah. Jika anak-anak dilatih dengan kebenaran matematika ini akan terpatrit di dalam hati dan pikiran mereka, sehingga mereka akan dengan tegas menolak yang sebaliknya. Mereka tidak akan mentolerir atau berkompromi bahwa $2x + 3x = 4x$ atau $2x + 3x = 7x$, sebagaimana yang sering terjadi dalam perhitungan biaya penelitian atau proyek di negeri ini. Demikian juga halnya Ikhwan al-Shafa' dalam Kartanegara, mencoba mengaitkan matematika dengan perbaikan karakter (*tahzib al-akhlaq*), seperti tercermin dalam salah satu judul risalahnya, "hubungan aritmetika dan geometri dengan perbaikan akhlak". Beliau mendiskusikan tentang proporsi aritmetika dan geometri, bahwa jika engkau letakkan satu bagian tubuh di atas bagian yang lain secara proporsional, maka sikap tubuh mereka akan baik dan dapat diterima dan akhlak mereka akan terpuji. Tetapi jika tidak proporsional, maka sikap tubuh mereka akan canggung dan menakutkan. Dengan kata lain proporsi (nisbat) aritmetika dan geometri dapat mempengaruhi bukan hanya sikap tubuh tetapi juga spriritual dan moralitas seseorang.

Berdasarkan latar belakang inilah timbul gagasan atau ide peneliti untuk melakukan penelitian ini dengan tujuan untuk mendeskripsikan bentuk pembelajaran aljabar berbasis nilai-nilai akhlak dalam meningkatkan hasil belajar aljabar mahasiswa semester 1 unit 1 Prodi Tadris matematika STAIN Malikussaleh T.A 2015/2016.

2. Metode Penelitian

empat yang dijadikan lokasi penelitian adalah Prodi Tadris Matematika STAIN Malikussaleh Lhokseumawe. Pemilihan lokasi ini didasarkan pada pertimbangan sebagai berikut (1) mahasiswa sudah menguasai konsep aljabar sekolah, (2) matakuliah agama diberikan pada kurikulum hampir 50%, (3) rekutmen awal ada tes baca Al-Qur'an, dan (4) mahasiswa hampir 50% berasal dari pesantren dan madrasah aliyah.

Data yang dikumpulkan dalam penelitian ini bersifat deskriptif, yaitu penjelasan tentang pembelajaran aljabar berbasis nilai-nilai akhlak untuk meningkatkan hasil belajar aljabar mahasiswa Prodi Tadris Matematika STAIN Malikussaleh Lhokseumawe. Penelitian ini lebih menekankan pada proses pembelajaran daripada hasil akhir pembelajaran itu sendiri, maksudnya proses pembelajaran yang baik akan memberikan hasil akhir yang baik pula. Melihat karakteristik penelitian seperti dipaparkan di atas, maka pendekatan yang sesuai dan digunakan adalah pendekatan kualitatif. Ditinjau dari bagaimana penelitian ini dilakukan, maka penelitian ini termasuk ke dalam penelitian tindakan kelas. Penelitian tindakan kelas merupakan salah satu upaya guru atau praktisi dalam bentuk berbagai kegiatan yang dilakukan untuk memperbaiki dan atau meningkatkan mutu pembelajaran di kelas.

Data yang dikumpulkan dalam penelitian ini bersumber dari (1) skor tes awal dan tes akhir, (2) observasi, (3) catatan lapangan, dan (4) wawancara mahasiswa semester 1 (satu) unit 1 Prodi Tadris Matematika STAIN Malikussaleh Lhokseumawe Tahun Akademik 2015/2016. Analisis data yang dilakukan setiap kali setelah pemberian tindakan suatu tindakan. Teknik analisis data yang digunakan adalah model air (*flow model*) yang dikemukakan oleh Miles dan Huberman yang meliputi kegiatan (1) mereduksi data, kegiatan menyeleksi, memfokuskan, dan menyederhanakan semua data yang telah diperoleh, (2) menyajikan data, dengan cara menyusun secara naratif sekumpulan informasi, dan (3) menarik kesimpulan serta verifikasi, yaitu menguji kebenaran, keakuratan dan kecocokan makna-makna yang muncul dari data yang ditemukan.

Pengecekan keabsahan data akan digunakan teknik kriteria derajat kepercayaan yang dikembangkan oleh Moleong [5] yaitu (1) triangulasi, dengan cara membandingkan data hasil observasi teman sejawat dengan hasil observasi peneliti dan hasil catatan lapangan, (2) ketekunan pengamatan, dengan cara mengadakan pengamatan secara teliti, rinci dan terus menerus selama kegiatan pembelajaran, dan (3) pemeriksaan sejawat, mendiskusikan proses dan hasil penelitian dengan teman sejawat diharapkan penelitian tidak menyimpang dan data yang diperoleh benar-benar mencerminkan data yang valid.

Tahap-tahap yang dilaksanakan dalam penelitian ini adalah (1) tahap pra tindakan yang terdiri dari refleksi awal, menetapkan, dan merumuskan jenis tindakan dan (2) tahap pelaksanaan tindakan, yang meliputi kegiatan-kegiatan perencanaan (*planning*) yaitu: menyusun Satuan Acara Perkuliahan (SAP) berbasis nilai-nilai akhlak, membuat bahan ajar aljabar berbasis nilai-nilai akhlak, menyiapkan alat peraga ubin aljabar yang dibuat dari potongan kertas dengan ukuran tertentu, menyiapkan Lembar Kerja Mahasiswa (LKM) berbasis nilai-nilai akhlak, menyiapkan lembar pengamatan, catatan lapangan dan pedoman wawancara serta menyiapkan soal tes awal dan tes akhir, menyepakati jadwal penelitian dengan mahasiswa. Tahap pelaksanaan (*acting*) yang dilakukan adalah melaksanakan tindakan disesuaikan dengan tujuan SAP yang telah disusun, yaitu pembelajaran aljabar berbasis nilai-nilai akhlak untuk meningkatkan hasil belajar mahasiswa semester 1 unit 1 Prodi Tadris matematika STAIN Malikussaleh

Lhokseumawe. Tahap pengamatan (*observing*) yaitu mengamati kegiatan pelaksanaan tindakan berlangsung oleh teman sejawat. Objek yang diamati meliputi aktivitas peneliti sebagai pengajar dan aktivitas mahasiswa selama kegiatan pembelajaran berlangsung. Pengamatan dilakukan berdasarkan lembar pengamatan yang telah disiapkan sebelumnya. Selain lembar observasi, disediakan catatan lapangan untuk melengkapi data hasil pengamatan.

Tahap terakhir yaitu tahap refleksi (*reflecting*) untuk melihat keseluruhan proses pelaksanaan tindakan dan hasil pemahaman mahasiswa. Merefleksi adalah menganalisis data-data yang diperoleh dari observasi, wawancara dan catatan lapangan. Tahap refleksi meliputi kegiatan memahami, menjelaskan dan menyimpulkan data. Peneliti merenungkan hasil tindakan sebagai bahan pertimbangan apakah siklus sudah mencapai kriteria atau tidak. Jika kriteria tindakan telah tercapai maka peneliti tidak meneruskan ke tindakan selanjutnya. Siklus ini akan dilakukan terus menerus sampai kriteria yang ditetapkan dalam setiap tindakan tercapai. Kriteria keberhasilan dalam penelitian ini adalah hasil belajar aljabar mahasiswa yang mendapatkan nilai minimal 76 (B) mencapai 70% dan observasi masuk dalam kategori baik.

3. Hasil Penelitian Dan Pembahasan

Nilai-nilai akhlak yang dipadukan dalam pembelajaran aljabar untuk kedua tindakan dengan tahapan kegiatan awal yaitu membaca Basmallah dan do'a belajar, menjelaskan rencana pembelajaran dan membagikan alat peraga ubin aljabar, membagikan Lembar Kerja Mahasiswa (LKM) tentang operasi tambah dan kurang pada bentuk aljabar dan Persamaan Linier satu Variabel (PLSV) dan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel (SPLDV) seperti peduli terhadap keberadaan tempat ibadah (mesjid), peduli terhadap orang tua, keluarga, teman dan menjaga kesehatan pribadi. Kemudian dilanjutkan pada kegiatan inti, yaitu mendampingi mahasiswa bekerja secara kooperatif dalam kelompoknya, meminta kelompok dalam menyiapkan laporan dan hasil kerja kelompok, membantu partisipasi mahasiswa dalam kegiatan diskusi di kelas, mengatur kelancaran kegiatan diskusi kelas dan menciptakan lingkungan belajar. Serta kegiatan pembelajaran akhir yang menanamkan nilai-nilai akhlak dalam pembelajaran aljabar, yaitu menyimpulkan konsep dari materi tentang operasi tambah dan kurang pada bentuk aljabar dan Persamaan Linier satu Variabel (PLSV) dan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel (SPLDV), menganalisis nilai-nilai akhlak yang dapat diinternalisasikan dalam proses pembelajaran. Nilai-nilai akhlak yang dirasakan oleh mahasiswa dan hasil Lembar Kerja Mahasiswa (LKM) selama pembelajaran berkelompok untuk kedua tindakan sebagaimana yang disajikan pada Tabel. 1 berikut ini.

Tabel 1: Persentase Jawaban LKM dan Nilai-Nilai Akhlak yang Diinternalisasikan dalam Pembelajaran Aljabar Per Kelompok

Kelompok	Jawaban Sempurna (%)		Ada usaha menjawab tapi belum sempurna (%)	
	LKM I	LKM II	LKM I	LKM II
I	87,5	100	12,5	0
Nilai-Nilai Akhlak yang Dirasakan	Kesabaran, kegigihan, ketelitian, kekompakan dalam menjawab soal, kejujuran			
II	100	100	0	0
Nilai-Nilai Akhlak yang Dirasakan	Kesabaran, ketelitian, kekompakan, kerja keras, kesepakatan, keyakinan, kerja sama			
III	75	100	25	0
Nilai-Nilai Akhlak yang Dirasakan	Kerja sama, kreatif, kerja sama, kreatif, ketelitian			
IV	87,5	100	12,5	0
Nilai-Nilai Akhlak yang Dirasakan	Kesabaran, kerja sama, optimis			

V	100	100	0	0
Nilai-Nilai Akhlak yang Dirasakan	Kesabaran, kerja sama, kreatif, jujur, ketelitian, usaha (dari tidak bisa menjadi bisa)			
Rata-Rata	90	100	10	0

Berdasarkan Tabel 1 pada saat menyelesaikan permasalahan yang ada di LKM pada tindakan I rata-rata kelompok 90% jawabannya sudah sempurna meningkat menjadi 100% pada tindakan II. Nilai-nilai akhlak yang dirasakan oleh mahasiswa pada pembelajaran aljabar untuk tindakan I dan tindakan II pada tabel diatas adalah nilai akhlak yang terkait dengan manusia (*hablun minannas*), nilai akhlak yang terkait dengan dirinya sendiri (*hablun minannafsi*).

Nilai *hablun minannas*, yaitu nilai-nilai yang harus dikembangkan seseorang dalam hubungannya dengan sesama manusia, seperti tolong-menolong, empati, kasih-sayang, kerjasama, saling mendoakan dan memaafkan, hormat-menghormati, dan sebagainya. Sedangkan nilai yang berhubungan dengan *hablun minannafsi* (diri sendiri), seperti: kejujuran, disiplin, amanah, mandiri, istiqamah, keteladanan, kewibawaan, optimis, tawadhu', dan sebagainya. Berikut ini disajikan contoh nilai *hablun minannas* salah satunya yaitu nilai tolong menolong dan *hablun minannafsi* salah satunya yaitu nilai jujur dan tegas dalam pembelajaran aljabar.

Nilai tolong menolong dalam pembelajaran aljabar yang merupakan bagian dari nilai *hablun minannas*, yaitu: tolong menolong melalui sedekah. Misalkan pada materi bentuk aljabar untuk mengerjakan soal-soal $45x - 8x = \dots$. Di kelas-kelas matematika, guru biasanya mengajarkan pengurangan bersusun dan menggunakan istilah "pinjam" atau "hutang". Hal ini tanpa disadari mengajari anak untuk "berhutang" dan "meminjam". Guru tidak mengajari anak untuk memberi atau bersedekah. Padahal dengan cara memberi atau shadaqah, pengerjaan operasi pengurangan akan lebih mudah. Perhatikan contoh berikut.

$$\begin{aligned} 45x - 8x &= (45 + 2)x - (8 + 2)x \quad \text{[Kedua bilangan sama-sama diberi 2]} \\ &= 47x - 10x \\ &= 37x \end{aligned}$$

Contoh pembelajaran di atas, mengajarkan ke siswa untuk melaksanakan sunnah Rasul-Nya bahwa "*tangan di atas lebih baik daripada tangan di bawah*". Soal di atas juga dapat diselesaikan dengan mengikuti aturan QS. Al-Baqarah ayat 280.

Artinya :

Dan jika (orang berhutang itu) dalam kesukaran, maka berilah angguh sampai dia berkelapangan. Dan menyedekahkan (sebagian atau semua) hutang itu lebih baik bagimu jika kamu mengetahui.

Pada ayat tersebut dapat digaris bawahi: bahwa menyedekahkan (sebagian atau semua) hutang itu lebih baik bagimu jika kamu mengetahui. Maka hitungan soal di atas mengikuti aturan QS. Al Baqarah ayat 280 tersebut.

$$\begin{array}{r} (4\ 5)x \\ (0\ 8)x \\ \text{-----} \\ (40 - 0)x = 40x \\ (5 - 8)x = ? \end{array}$$

Penjelesannya pada sebuah dialog untuk dua siswa: jika saya berhutang $8x$ dan saya bayar $5x$ boleh apa nggak ya? Oh, boleh saja meskipun uangmu masih kurang $3x$ (disimbolkan $-3x$). Ini artinya menyedekahkan sebagian hutang. Kemudian disimpulkan dengan cara mengumpulkan bilangan yang didapatkan.

$$\begin{array}{r} (4\ 0)x \\ (-\ 3)x \\ \text{-----} + \\ (3\ 7)x \\ \text{Jadi } 45x - 8x = 37x \end{array}$$

Berdasarkan contoh pembelajaran di atas, mengajarkan siswa tidak hanya pintar berhitung, tetapi mengajarkan kebiasaan baik untuk bersedekah. Hal tersebut sangat tepat jika mulai di tanamkan sejak sekolah dasar. Sehingga kebiasaan baik untuk bersedekah sudah menjadi nilai akhlak sehari-hari setiap siswa sejak kecil sampai dewasa kelak. Jadi sedekah disini merupakan salah satu contoh nilai akhlak yang dapat diinternalisasikan dalam pembelajaran aljabar.

Pembelajaran aljabar juga mengajarkan sikap jujur dan tegas. Misalkan seorang guru meminta seorang siswa menghitung hasil penjumlahan bentuk aljabar $3x + 4x$. Kalau tidak bisa menghitung, maka siswa tersebut harus jujur untuk mengatakan tidak bisa. Jika tidak bisa tetapi mengatakan bisa, maka saat disuruh mengerjakan akan ketahuan bahwa tidak bisa. Ketahuan kalau tidak jujur dan akan malu pada siswa yang lain. Jadi lebih baik jujur sekalipun pahit. Berikut disajikan salah satu contoh nilai jujur yang dapat diajarkan oleh guru pada saat pembelajaran matematika. Misalnya materi yang dipilih adalah bilangan bulat dan dilihat Al-Qur'an surat An Nisa ayat 112.

Artinya:

Dan siapa saja yang mengerjakan kesalahan atau dosa, kemudian dituduhkannya kepada orang yang tidak bersalah, maka sesungguhnya ia telah berbuat suatu kebohongan dan dosa yang nyata.

Berdasarkan ayat tersebut diberikan simbol-simbol seperti berikut ini:

- (a) "Dan siapa saja yang mengerjakan kesalahan atau dosa" bisa kita beri **simbol - (negatif)**
- (b) "Kemudian dituduhkannya kepada orang yang tidak bersalah" kita beri **simbol + (positif)**
- (c) "Maka sesungguhnya ia telah berbuat suatu kebohongan dan dosa yang nyata" kita beri **simbol - (negatif)** [6].

Perhatikan urutan simbol-simbol itu, "negatif positif negatif". Lihat, pola apa yang terbentuk? Bukankah jika pola "negatif positif negatif" kita lengkapi dengan simbol operasi hitung menjadi semakin lengkap?

$$\ominus \times \oplus = \ominus$$

Pola tersebut pada akhirnya bisa disimpulkan bahwa

- (i) Suatu kesalahan (-) jika kita katakan benar (+), maka sesungguhnya kita berbuat bohong, dosa (-)
- (ii) Suatu yang benar (+) jika kita katakan salah (-), maka sebenarnya kita juga berbuat bohong, dosa (-)
- (iii) Suatu kesalahan (-) jika kita katakan salah (-), maka kita melakukan suatu yang benar (+).

Berdasarkan pola di atas, dapat disimpulkan jika ada pernyataan benar (+) dan kita katakan benar (+) maka itu artinya kita melakukan kejujuran atau kebenaran (+). Jadi dalam dunia matematika pun berlaku *sunnatullah* atau pola yang baku. Misalkan ada soal $-24x + (-5)x - 12x + 7x - (-3)x - (+4)x + 9x - 10x + (-2)x + 103x$, pasti jawaban dengan cepat diperoleh jawaban $65x$. Jadi, menjawab soal aljabar itu jadi mudah kalau jujur mengikuti pola dalam menjawabnya. Dan berbuat jujur itu supaya memudahkan hidup kita.

Contoh pembelajaran aljabar di atas adalah contoh bagaimana seorang anak dapat berbuat jujur dengan mulai memahami makna dalam Al-Qur'an surat An Nisa ayat 112 dan mengaitkannya dengan buku matematika. Kemudian sang guru juga dapat menginternalisasikan nilai akhlak dengan memberikan motivasi, misalnya "Belajarlh terus dan kajilah terus menerus Al-Qur'an mu, niscaya kamu akan menemukan pola-pola matematika yang dapat kamu gunakan di sekolahmu. Rabbana maa khaalqta haadza baathilaa, Allah tidaklah menciptakan semua ini sia-sia Al-Qur'an surat Al- Imran ayat 191."

Selain nilai jujur, dalam pembelajaran matematika juga terdapat nilai-nilai akhlak yaitu nilai tegas. Misalkan pada kasus perkalian $3x + 4x$ di atas, diperoleh hasil penjumlahan bentuk aljabar tersebut pasti $12x$. Siswa dengan tegas mengatakan bahwa jawaban tersebut adalah benar. Dalam matematika hanya ada dua pilihan, benar atau salah. Tidak mungkin benar sekaligus salah. Jadi pembelajaran aljabar mengajarkan sikap tegas mengatakan yang benar adalah benar dan yang salah adalah salah, jadi tidak abu-abu. Seperti yang sekarang marak terjadi pada saat pelaksanaan Ujian Nasional (UN) ditengarai adanya kecurangan seperti terjadinya kasus nyontek masal, seperti yang telah peneliti paparkan. Hal ini dapat terjadi karena pihak manajemen sekolah, pengawas ruang dan juga siswa tidak memiliki sikap tegas pada pelaksanaan UN. Sikap tegas yang harus dimiliki oleh semua manusia sebenarnya jauh sebelumnya telah termuat dalam Al-Qur'an, misalnya surat Luqman ayat 30, yang artinya:

Artinya:

Demikianlah, Karena Sesungguhnya Allah, Dia-lah yang hak [1185] dan Sesungguhnya apa saja yang mereka seru selain dari Allah Itulah yang batil; dan Sesungguhnya Allah dialah yang Maha Tinggi lagi Maha besar. Maksudnya: Allah-lah Tuhan yang Sebenarnya, yang wajib disembah, yang berkuasa dan sebagainya.

Pada ayat tersebut, manusia dengan tegas diperintahkan untuk benar-benar menyembah penguasa alam ini yaitu Allah SWT, Jika menyembah selain Allah adalah perbuatan batil, yaitu sesuatu perbuatan yang salah. Hal yang sama juga disebutkan dalam Al-Qur'an surat Asy Syams ayat 8-10. Arti dari ayat tersebut adalah: Maka Allah mengilhamkan kepada jiwa itu (jalan) kefasikan dan ketakwaannya. (ayat 8)

Sesungguhnya beruntunglah orang yang mensucikan jiwa itu. (ayat 9) Dan Sesungguhnya merugilah orang yang mengotorinya. (ayat 10)

Pada ayat tersebut disebutkan bahwa manusia diberi Allah potensi baik dan buruk (jalan ketakwaan dan jalan keburukan) tergantung manusia itu sendiri mengusahakannya. Barang siapa menuju ke kebaikan maka beruntunglah dia, sedangkan barang siapa menuju pada keburukan maka merugilah dia. Berdasarkan kedua surat dalam Al-Qur'an tersebut, sangat tegas disebutkan mana pilihan jalan hidup yang benar dan mana pilihan jalan hidup yang salah.

Pembelajaran aljabar berbasis nilai-nilai akhlak diatas pada penelitian ini diperoleh hasil belajar mahasiswa yang lebih meningkat. Sebagaimana dapat dilihat pada hasil tes berikut ini

Tabel 2: Persentase Tingkat Kemampuan Mahasiswa pada Tes Awal dan Tes Akhir

Tingkat Kemampuan	Tes Awal		Tes Akhir	
	Nilai	Persentase (%)	Nilai	Persentase (%)
Rendah	19	90,48	4	19,05
Sedang	2	9,52	2	9,52
Tinggi	0	0		71,43

Berdasarkan tabel di atas tingkat kemampuan mahasiswa terjadi peningkatan setelah adanya tindakan I dan tindakan II, dengan uraian persentase tingkat kemampuan rendah menurun dari 90,48% menjadi 19,05%, tingkat kemampuan sedang tetap dan tingkat kemampuan tinggi meningkat dari 0% menjadi 71,43%. Demikian juga halnya dari hasil jawaban mahasiswa terhadap kedua tes berdasarkan butir soal dengan tiga kriteria yaitu jawaban sempurna, ada usaha menjawab tapi masih salah dan tidak menjawab sama sekali. Persentase hasil jawaban mahasiswa kedua tes dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3: Persentase Hasil Jawaban Tes Per Butir Soal

Kriteria Jawaban	Tes Awal	Tes Akhir
Jawaban sempurna	40%	39,29%
Ada usaha menjawab tapi masih salah	28,75%	60,71%
Tidak menjawab sama sekali	31,43%	0%

Berdasarkan tabel di atas pada kedua tes setelah tindakan semua mahasiswa berusaha menjawab soal, meskipun ada jawaban yang belum sempurna. Ini menandakan pembelajaran berbasis nilai-nilai akhlak dapat memperbaiki hasil belajar mahasiswa. Demikian juga halnya dengan hasil observasi kedua pengamat dari tindakan I ke tindakan II terjadi peningkatan persentase terhadap kegiatan dosen dan mahasiswa.

Tabel 4: Hasil Observasi Pengamat terhadap Kegiatan Dosen dan Mahasiswa

Tindakan	Kegiatan Dosen		Kegiatan Mahasiswa	
	PI	PII	PI	PII
I	84,09%	86,36%	86,36%	81,82%
II	95,83%	89,58%	91,67%	87,50%

Ket: PI = Pengamat I
PII = Pengamat II

Berdasarkan tabel di atas terjadi peningkatan pada kegiatan dosen dan mahasiswa dari tindakan I ke tindakan II. Sedangkan hasil tes dan wawancara mahasiswa menunjukkan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan penguasaan terhadap konsep dasar aljabar terutama pada menerjemahkan kalimat verbal ke bentuk aljabar Persamaan Linier Satu Variabel (PLSV) dan Sistem Persamaan Linier Dua Variabel. Selain dari itu kurang berakarnya konsep yang telah diperkenalkan selama masa sekolah dalam ingatan

mereka. Kesulitan ini seharusnya untuk level mahasiswa tidak terjadi lagi, karena yang diuji adalah materi-materi yang sudah dipelajari di SMP dan SMA dan merupakan konsep awal yang wajib dipahami agar dapat memahami konsep berikutnya. Hal ini sesuai dengan pendapat Hudojo [7] yang mengatakan bahwa “Mempelajari konsep B yang mendasari kepada konsep A, seseorang perlu memahami terlebih dahulu konsep A. Tanpa memahami konsep A tidak mungkin orang itu memahami konsep B”. Karenanya berdasarkan hal ini, maka perlu diupayakan kepada pembenahan terhadap kemampuan mahasiswa dalam penguasaan konsep dasar matematika. Hal ini sangat penting dilakukan karena akan berefek pada kemampuan penerimaan materi pada level perkuliahan dan bekal mengajar kelak disekolah, dimana pada level perkuliahan konsep dasar aljabar sudah dianggap selesai pada level sekolah menengah dan tidak diajarkan lagi pada level perkuliahan, pada level ini hanya menerapkan kembali konsep dasar aljabar untuk memahami konsep materi aljabar elementer.

Banyak cara yang dapat dilakukan untuk mengatasi persoalan penguasaan konsep dasar aljabar khususnya dari pengajar, misalnya dengan mengulang kembali konsep dasar aljabar, penggunaan bahan ajar seperti buku, modul, diktat, *handbook* dan sebagainya dengan memperbanyak variasi soal dalam pemecahan masalah, kemampuan komunikasi matematis dan berfikir kritis. Tentu saja setiap cara ini harus dipilih sesuai dengan situasi ketersediaan pengajar, disiplin ilmu dari seorang pengajar, gaya belajar mahasiswa, kapasitas mahasiswa dalam kelas, kemampuan mahasiswa, dan karakteristik lainnya yang tidak mungkin terdeteksi semuanya yang penuh dengan ketidakpastian.

4. Kesimpulan

Berdasarkan paparan data dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa pembelajaran aljabar berbasis nilai-nilai akhlak yaitu nilai terkait dengan *hablun minannas* yaitu nilai tolong menolong, rasa hormat, dan perhatian, sedangkan nilai yang berhubungan dengan *hablun minannafsi* (diri sendiri) yaitu teliti, hemat, cermat, kerja keras, tekun, jujur, tegas, bertanggung jawab, pantang menyerah, percaya diri, dan disiplin dapat diinternalisasikan melalui kegiatan awal, kegiatan inti, dan kegiatan penutup, sehingga dapat meningkatkan hasil belajar aljabar mahasiswa semester 1 unit 1 Prodi Tadris matematika STAIN Malikussaleh Lhokseumawe.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih kepada pimpinan IAIN Lhokseumawe dengan anggaran penelitian DIPA-APBN 2015 IAIN Lhokseumawe yang telah membantu secara substansi maupun finansial, dan terima kasih juga kepada Bapak Abdussakir dari UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah memberikan inspirasi secara substansi serta bersedia berkolaborasi dalam penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] Daniel Goleman, (2004), *Kecerdasan Emosional: Mengapa EI Lebih Penting Daripada IQ*, Terjemahan oleh T. Hermaya, PT. Gramedia Pustaka Utama: Jakarta.
- [2] Rosimanidar, (2013) *Pengembangan Pembelajaran Aljabar SMP Berbasis Nilai-Nilai Akhlak*, Laporan Penelitian : Dana APBN-P. STAIN Malikussaleh Lhokseumawe; p. 31-45 dan 69.
- [3] Abdusysykir, (2007), *Ketika Kyai mengajar matematika*, Malang: UIN-Malang Press.
- [4] Mulyadhi Kartanegara, (2009), *Sains dan Matematika Dalam Islam*, Fakultas Ushuluddin UIN Syarif Hidayatullah: USHUL PRESS: Jakarta, p.81-82.
- [5] Maleong, L.J., (2002), *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung: Remaja Rosda Karya.
- [6] Bektu Hermawan, (2008), *Pembelajaran Matematika Akhlaq Kelas 4A, Keajaiban Bahasa Bilangan untuk Mendidik Akhlaq Mulia*, Rumah Akal, Bogor.
- [7] Herman Hudojo, (1988), *Strategi Mengajar*. Malang : IKIP Malang, p.3.

PENINGKATAN KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA MELALUI STRATEGI BERMAIN JAWABAN

Zulfa Amrina

*Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Bung Hatta
zulfaamrina_alza@yahoo.co.id*

Abstract

This study aimed to describe the increasing ability of mathematical communications students of SDN 26 North Jati in learning mathematics through play strategy answers. This type of research is classroom action research. Research instruments used were: Communication Skills Mathematical Observation Sheet Students, Teachers Teaching Observation Sheet Activity Sheet Mathematical Communication Ability Test Results Students. While the data in this study a qualitative and quantitative data. The qualitative data obtained from the observation sheets mathematical communication abilities of students in the learning process is carried out, while the quantitative data obtained from the test students' mathematical communication skills. The data source is a fifth grade students who were respondents in the study. Furthermore, the data were analyzed using qualitative and quantitative analysis. Based on the results of data analysis can be concluded that the mathematical communication skills of students in the learning process on the strategy of playing the answers increased from the first cycle to the second cycle. The average percentage of first cycle only 49.99% increase in cycle II 81.03%. This shows an increase in 31.04% in the first cycle and the second cycle. While the product of mathematical communication skills increased 22.09% in the first cycle and the second cycle. This shows the percentage of communication skills in processes and products in the second cycle has reached an indicator of success is 75%. This is because the successful strategy of playing answers and liked by the students so that the students' mathematical communication skills increased.

Kata Kunci: Indikator Komunikasi, Matematika, Sekolah Dasar

1. Pendahuluan

Matematika merupakan sumber ilmu dan sarana berpikir logis, analisis, dan sistematis. Sebagai mata pelajaran yang berkaitan dengan konsep-konsep yang abstrak, maka dalam penyajian materi pelajaran, matematika harus dapat disajikan lebih menarik dan sesuai dengan kondisi dan keadaan siswa. Seyogianya dalam pembelajaran Matematika seorang guru harus kreatif dalam memilih metode, media atau strategi pembelajaran yang sesuai dengan bahan atau materi ajar. Kenyataannya pembelajaran yang dilaksanakan cenderung monoton dengan pendekatan konvensional. Dampaknya siswa-siswa yang cerdas dalam matematika seringkali kurang mampu menyampaikan hasil pemikirannya. Mereka kurang mampu berkomunikasi dengan baik, seakan apa yang mereka pikirkan hanyalah untuk dirinya sendiri. Hal ini membuat komunikasi siswa tidak berkembang dengan baik. Sedangkan matematika itu sendiri merupakan bahasa, Jazuli (2009) tetapi banyak siswa yang kurang mampu berkomunikasi melalui bahasa matematika.

Pengamatan peneliti pada pelaksanaan pembelajaran yang dilaksanakan di beberapa sekolah di kota Padang, guru dalam menyampaikan pembelajaran matematika terlalu monoton, karena metode yang digunakan didominasi metode ceramah. Alasan guru menggunakan metode ceramah karena siswa lambat dalam menerima pembelajaran matematika sehingga sangat sulit untuk menggunakan metode lain, seperti metode diskusi yang dianggap guru banyak menghabiskan waktu. Guru juga hanya menggunakan media yang disediakan dari sekolah ataupun guru menggambar sendiri di papan tulis sehingga terlihat tidak menarik. Contoh soal yang diberikan gurupun tidak bervariasi, dan tidak memberi kesempatan kepada siswa untuk mengkomunikasikan cara menyelesaikan soal. Pembelajaran seperti ini membuat siswa-

siswa yang cerdas dalam matematika seringkali kurang mampu menyampaikan hasil pemikirannya. Mereka kurang mampu berkomunikasi dengan baik, seakan apa yang mereka pikirkan hanyalah untuk dirinya sendiri. Hal ini membuat kemampuan komunikasi siswa tidak berkembang dengan baik.

Salah satu sekolah yang peneliti amati adalah SDN no 26 Padang Utara, khususnya kelas V, yang berjumlah 20 orang. Dari 20 orang siswa hanya 40% yang mampu mengkomunikasikan idenya dengan baik. Saat peneliti mewawancarai siswa yang tidak mampu berkomunikasi dalam matematika, mereka mengatakan karena tidak paham dengan materi yang diajarkan guru, dan ada juga yang menjawab, bahwa mereka mengerti namun tidak tahu bagaimana mengkomunikasikan. Mereka bisa menuliskan jawaban dari pertanyaan yang diberikan, namun tidak mampu mengkomunikasikannya. Di samping itu, persentase ketuntasan siswa juga rendah, hanya 15%.

Agar kemampuan komunikasi siswa dapat ditingkatkan maka siswa memerlukan sesuatu hal yang dapat membuat mereka menemukan kesenangan dan menghilangkan kekhawatiran dalam belajar. Suasana tersebut akan membuat siswa yang dulunya tidak aktif dan sulit mengikuti pembelajaran akan termotivasi dan meningkat kemampuan komunikasinya. Siswa diberikan kesempatan menemukan jawaban menurut pendapat dan ide-ide mereka sendiri. Salah satu strategi yang dapat digunakan adalah strategi bermain jawaban. Strategi ini akan membuat semua anggota kelompok berkomunikasi baik dengan anggota kelompok maupun dengan guru ataupun dengan teman yang lain, karena metode ini menggunakan sistem acak nama saat membacakan jawaban dalam kelompok.

Zaini, dkk (2012) menjelaskan bahwa strategi bermain jawaban adalah sebuah strategi permainan yang dapat melibatkan semua siswa dari menit-menit awal sampai akhir. Siswa bebas mengemukakan pendapatnya. Strategi bermain jawaban ini mengajarkan siswa menemukan jawaban-jawaban dan guru bisa langsung menerangkan pembelajaran dari jawaban yang telah ditemukan oleh siswa. Metode bermain jawaban menggunakan pertanyaan yang sama banyak diberikan kepada setiap kelompok serta jawaban yang telah dimasukkan ke dalam kantong kecil dan ditempel di karton selanjutnya ditempel di papan tulis. Setiap kelompok diacak anggotanya untuk menunjukkan pertanyaan serta jawaban yang mereka diskusikan lalu perwakilan kelompok yang telah di acak itu mengambil jawaban di kantong yang sesuai dengan jawaban yang mereka diskusikan, apabila jawaban itu tidak sesuai dengan pertanyaan mereka maka mereka tidak beruntung dan poin mereka hanya setengah itupun kalau jawaban yang mereka diskusikan benar. Strategi ini dapat menghilangkan perasaan siswa yang didiskriminasi oleh guru karena sistem acak nama dalam kelompok. Terakhir, guru menerangkan tentang jawaban yang telah di ambil oleh siswa di dalam kantong namun tidak sama dengan pertanyaan siswa tadi.

Berdasarkan masalah yang ditemukan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana peningkatan kemampuan komunikasi matematis siswa kelas V SDN 26 Jati Utara Padang dengan menggunakan Strategi bermain jawaban?

Pembelajaran menurut Undang-Undang Sistem Pendidikan Nasional Nomor 20 Tahun 2003 adalah proses interaksi peserta didik dan sumber belajar pada suatu lingkungan belajar. Susanto (2013) mengatakan pembelajaran merupakan komunikasi dua arah, mengajar dilakukan oleh pihak guru sebagai pendidik, sedangkan belajar dilakukan oleh peserta didik". Adapun menurut Dimiyati (2009) pembelajaran adalah kegiatan guru secara terprogram dalam desain instruksional, untuk membuat siswa belajar secara aktif, yang menekankan pada penyediaan sumber belajar.

Untuk mencapai tujuan pembelajaran, seorang guru hendaknya dapat menciptakan kondisi dan situasi pembelajaran yang memungkinkan siswa aktif membentuk, menemukan, dan mengembangkan pengetahuannya. Kemudian siswa dapat membentuk makna dari bahan-bahan pelajaran melalui suatu proses belajar dan mengkonstruksinya dalam ingatan yang sewaktu-waktu dapat diproses dan dikembangkan lebih lanjut. Selanjutnya akan mampu mengkomunikasikan apa yang ada dalam pikirannya.

Komunikasi merupakan hal yang penting dalam kehidupan manusia, baik komunikasi dalam lingkungan masyarakat maupun komunikasi dalam pembelajaran di sekolah. Komunikasi berarti proses penyampaian suatu pesan oleh seseorang kepada orang lain [KBBI]. Menurut Armiami (2009) komunikasi matematika adalah suatu keterampilan penting dalam matematika yaitu kemampuan untuk mengekspresikan ide-ide matematika secara koheren kepada teman, guru dan lainnya melalui bahasa lisan dan tulisan.

Armiami (2009) mengemukakan bahwa ada dua alasan untuk fokus pada komunikasi matematis. Pertama, matematika merupakan bahasa yang esensial bagi matematika itu sendiri. Matematika tidak hanya sebagai alat berpikir yang membantu siswa untuk mengembangkan pola, menyelesaikan masalah dan memberikan kesimpulan, tetapi juga sebagai alat untuk mengkomunikasikan pikiran, memvariasikan ide secara jelas, tepat dan singkat. Kedua, belajar dan mengajar matematika merupakan suatu aktifitas sosial yang melibatkan sekurangnya dua pihak yaitu guru dan siswa. Berkomunikasi dengan teman adalah

kegiatan yang penting untuk mengembangkan keterampilan komunikasi, sehingga siswa dapat belajar seperti seorang ahli matematika dan mampu menyelesaikan masalah dengan sukses. Melalui kemampuan komunikasi matematis ini, siswa dapat mengembangkan pemahaman matematika bila menggunakan bahasa matematika yang benar untuk menulis tentang matematika, mengklarifikasi ide-ide dan belajar membuat argument serta merepresentasikan ide-ide matematika secara lisan, gambar dan simbol. NCTM (2000) menyatakan bahwa standar komunikasi matematis adalah penekanan pengajaran matematika pada kemampuan siswa dalam hal (1) Mengorganisasikan dan mengkonsolidasikan berfikir matematis (*mathematical thinking*) mereka melalui komunikasi; (2) Mengkomunikasikan *mathematical thinking* mereka secara koheren (tersusun secara logis) dan jelas kepada teman-temannya, guru dan orang lain; (3) Menganalisis dan mengevaluasi berfikir matematis (*mathematical thinking*) dan strategi yang dipakai orang lain; (4) Menggunakan bahasa matematika untuk mengekspresikan ide-ide matematika secara benar.

Jazuli (2009) mengatakan komunikasi matematika lebih ditekankan pada kemampuan siswa dalam hal (1) Membaca dan menulis matematika dan menafsirkan makna dan ide dari tulisan itu; (2) Mengungkapkan dan menjelaskan pemikiran mereka tentang ide matematika dan hubungannya; (3) Merumuskan definisi matematika dan membuat generalisasi yang ditemui melalui investigasi; (4) Menuliskan sajian matematika dengan pengertian; (5) Menggunakan kosa kata/ bahasa, notasi struktur secara matematika untuk menyajikan ide menggambarkan hubungan dan pembuatan model; (6) Memahami, menafsirkan, dan menilai ide yang disajikan secara lisan, dalam tulisan atau dalam bentuk visual; (7) Mengamati dan membuat konjektur, merumuskan pertanyaan, mengumpulkan dan menilai informasi; (8) Menghasilkan dan menyajikan argumentasi yang meyakinkan.

Menurut Husna (2012) untuk mengukur kemampuan komunikasi matematis siswa dibutuhkan beberapa indikator, antara lain (1) Menghubungkan benda nyata, gambar dan diagram ke dalam ide matematika; (2) Menjelaskan ide, situasi dan relasi matematika secara lisan atau tulisan dengan benda nyata, gambar, grafik atau bentuk aljabar; (3) Menyatakan peristiwa sehari-hari dalam bahasa atau simbol matematika; (4) Mendengarkan, berdiskusi dan menulis tentang matematika; (5) Membaca presentasi matematika tertulis dan menyusun pertanyaan yang relevan; (6) Membuat konjektur, menyusun argumen, merumuskan definisi dan generalisasi.

Selanjutnya NCTM (2000) indikator komunikasi matematis dapat dilihat dari: (1) Kemampuan mengekspresikan ide-ide matematis melalui lisan, tulisan, dan mendemonstrasikannya serta menggambarannya secara visual; (2) Kemampuan memahami, menginterpretasikan, dan mengevaluasi ide-ide matematis baik secara lisan, tulisan, maupun dalam bentuk visual lainnya; (3) Kemampuan dalam menggunakan istilah-istilah, notasi-notasi matematika dan struktur-strukturnya untuk menyajikan ide-ide, menggambarkan hubungan-hubungan dengan model-model situasi.

Dari beberapa pendapat di atas kemampuan komunikasi yang akan diteliti adalah (1) Menulis matematika dan menafsirkan makna; (2) Mengungkapkan dan menjelaskan pemikiran mereka; (3) Menggunakan kosa kata/ bahasa, notasi struktur secara matematika; (4) Memahami permasalahan yang disajikan dalam bentuk visual.

Within (1992) menyatakan kemampuan komunikasi menjadi penting ketika diskusi antar siswa dilakukan, dimana siswa diharapkan mampu menyatakan, menjelaskan, menggambarkan, mendengar, menanyakan dan bekerjasama sehingga dapat membawa siswa pada pemahaman yang mendalam tentang matematika. Anak-anak yang diberikan kesempatan untuk bekerja dalam kelompok dalam mengumpulkan dan menyajikan data, mereka menunjukkan kemajuan baik di saat mereka saling mendengarkan ide yang satu dan yang lain, mendiskusikannya bersama kemudian menyusun kesimpulan yang menjadi pendapat kelompoknya. Ternyata mereka belajar sebagian besar dari berkomunikasi dan mengkonstruksi sendiri pengetahuan mereka. Untuk mengembangkan kemampuan komunikasi siswa, salah satu strategi yang dapat digunakan adalah strategi bermain jawaban.

Bermain jawaban adalah salah satu model pembelajaran berbentuk permainan. Zaini (2012) menjelaskan bahwa bermain jawaban adalah sebuah permainan yang dapat melibatkan semua siswa dari menit-menit awal sampai akhir. Dalam permainan ini, siswa ditantang untuk mencari jawaban yang benar dan sekaligus bergantung pada faktor keberuntungan. Permainan ini dapat digunakan untuk pre-test maupun post-test, disamping tentunya untuk mengajarkan materi yang baru. Dalam permainan ini, guru mengajar dengan menggunakan jawaban-jawaban yang ditemukan oleh siswa.

Selanjutnya langkah-langkah pembelajaran dengan strategi bermain jawaban menurut Suprijono (2012) dan Zaini (2012) adalah sebagai berikut: (1) Bagilah siswa menjadi beberapa kelompok. Besar kelompok disesuaikan dengan jumlah siswa. Usahakan jumlah siswa dalam tiap kelompok tidak lebih dari 5 orang; (2) Kepada setiap kelompok diberikan pertanyaan-pertanyaan. Jumlah pertanyaan untuk setiap kelompok adalah sama; (3) Mintalah masing-masing kelompok untuk mendiskusikan jawaban dan

mencari kira-kira di kantong yang mana jawaban tersebut berada; (4) Mulai permainan dengan meminta salah satu kelompok untuk membacakan satu pertanyaan, kemudian salah satu anggota kelompok mengambil jawaban dari kantong yang ada di depan kelas. Setelah selesai menjawab satu pertanyaan, kesempatan diberikan kepada kelompok yang lain; (5) Langkah nomor (4) diulang untuk kelompok lain sampai pertanyaan habis, atau waktu tidak memungkinkan; (6) Guru memberi klasifikasi jawaban atau menambahkan penjelasan yang bersumber pada materi yang ada dalam permainan tadi.

Berdasarkan kajian teori dan masalah yang telah diuraikan, maka dapat dirumuskan hipotesis tindakan adalah dengan menggunakan strategi bermain jawaban dapat ditingkatkan kemampuan komunikasi matematis siswa di kelas V dalam pembelajaran Matematika SDN 26 Jati Utara Padang. Dengan demikian penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan peningkatan kemampuan komunikasi matematis siswa SDN 26 Jati Utara dalam belajar matematika melalui strategi bermain jawaban. Melalui penelitian ini, guru dapat menerapkan strategi bermain jawaban dalam pembelajaran agar dapat meningkatkan kemampuan komunikasi siswa.

2. Metode Penelitian

Jenis penelitian ini Penelitian Tindakan Kelas (PTK) atau *classroom action research*. Penelitian ini dilakukan di SDN 26 Jati Utara. Subjek dalam penelitian ini adalah siswa kelas V SDN SDN 26 Jati Utara, dengan jumlah siswanya 20 orang, yang terdiri dari laki-laki berjumlah 12 orang dan perempuan berjumlah 8 orang. Penelitian ini dilakukan dengan mengacu pada disain PTK yang dirumuskan Arikunto (2010) yang terdiri dari empat komponen, yaitu: perencanaan, pelaksanaan tindakan, pengamatan dan refleksi. Hubungan keempat komponen tersebut merupakan suatu siklus.

Indikator keberhasilan dalam proses pembelajaran diukur dengan menggunakan kriteria ketuntasan minimal (KKM). KKM pada mata pelajaran Matematika adalah 75, dan indikator pada kemampuan komunikasi siswa meningkat menjadi 75%, dengan rincian (1) kemampuan komunikasi matematis dalam proses pembelajaran meningkat menjadi 75%, (2) kemampuan komunikasi matematis dalam produk meningkat menjadi 75%.

Instrumen Penelitian yang digunakan berupa: Lembar Observasi Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa, Lembar Observasi Kegiatan Pengajaran Guru, Lembar Hasil Tes Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa. Sedangkan data dalam penelitian ini berupa data kualitatif dan kuantitatif. Data kualitatif diperoleh dari lembar observasi kemampuan komunikasi matematis siswa dalam proses pembelajaran yang dilakukan, sedangkan data kuantitatif diperoleh dari hasil tes kemampuan komunikasi matematis siswa. Sumber data adalah siswa kelas V yang menjadi responden penelitian. Selanjutnya data yang diperoleh dianalisis menggunakan analisis kualitatif dan kuantitatif.

3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Hasil data yang diperoleh pada penelitian ini bersumber dari lembar observasi kemampuan komunikasi siswa dan lembar tes kemampuan komunikasi siswa dalam pembelajaran pada 2 siklus yaitu siklus I dan siklus II. Observasi dilaksanakan untuk melihat peningkatan kemampuan komunikasi siswa yang sesuai dengan indikator yang telah ditetapkan. Penelitian untuk siklus I dilaksanakan pada pokok bahasan “menyelesaikan permasalahan pada bangun datar sederhana” dan siklus II dengan pokok bahasan “menyelesaikan masalah bangun datar pada soal cerita”.

Pelaksanaan pembelajaran dilaksanakan sesuai dengan langkah-langkah strategi bermain jawaban. Kegiatan pembelajaran diamati oleh dua orang observer. Pengamatan dilakukan secara terus-menerus mulai dari tindakan pertama sampai tindakan akhir. Pengamatan yang dilakukan pada tindakan pertama dapat mempengaruhi tindakan selanjutnya, yang mana kegiatan tersebut diamati dengan menggunakan lembar observasi kemampuan komunikasi matematis dalam pembelajaran dan tes akhir siklus. Siklus II dilaksanakan karena indikator keberhasilan belum tercapai. Dari hasil pengamatan dan setelah dilakukan refleksi dari pelaksanaan pembelajaran siklus I, maka pada siklus II dilaksanakan beberapa perubahan dalam pembelajaran, agar indikator keberhasilan penelitian tercapai.

Pembelajaran dengan menggunakan strategi bermain jawaban dalam pembelajaran merupakan hal baru bagi siswa. Dalam pelaksanaannya peneliti menemui berbagai masalah terutama dalam pengelolaan kelas, yang disebabkan oleh siswa seperti mengganggu teman, dan izin keluar masuk kelas. Untuk mengatasi hal ini, peneliti melakukan tahap perencanaan dan pelaksanaan pembelajaran menggunakan Strategi bermain jawaban. Akan tetapi, penggunaan strategi bermain jawaban ini juga menyebabkan perubahan cara belajar bagi setiap siswa. Strategi bermain jawaban dapat menunjukkan kemampuan komunikasi siswa baik secara keseluruhan baik berupa ide-ide siswa dalam mengemukakan pendapat.

Hasil Penelitian yang diperoleh pada siklus I dapat digambarkan sebagai berikut (1) Pada indikator pertama yaitu menulis matematika dan menafsirkan makna memiliki persentase yang paling tinggi diantara indikator yang lain, hal ini disebabkan siswa paling banyak menulis yang jawaban dari hasil diskusi kelompok melalui strategi bermain jawaban; (2) Pada indikator kedua yaitu mengungkapkan dan menjelaskan pemikiran mereka memiliki persentase sedang diantara indikator yang lain, hal ini disebabkan sebagian siswa mulai mengungkapkan pemikiran mereka pada bermain jawaban walaupun sedikit malu-malu; (3) Pada indikator ketiga yaitu menggunakan kosakata/bahasa, notasi struktur secara matematika memiliki persentase yang paling rendah diantara indikator yang lain, hal ini disebabkan hampir semua siswa tidak menggunakan penulisan bahasa dalam matematika dengan benar seperti simbol melalui strategi bermain jawaban; (4) Pada indikator keempat yaitu menulis memahami masalah yang disajikan dalam bentuk visual memiliki persentase yang sedang diantara indikator yang lain, hal ini disebabkan siswa baru mengenal melalui strategi bermain jawaban dan belum memahami permasalahan yang ada.

Pada siklus II hasil penelitian diperoleh sebagai berikut (1) Pada indikator pertama yaitu menulis matematika dan menafsirkan makna memiliki persentase yang paling tinggi diantara indikator yang lain, hal ini disebabkan hampir semua siswa menulis yang jawaban dari hasil diskusi kelompok melalui strategi bermain jawaban; (2) Pada indikator kedua yaitu mengungkapkan dan menjelaskan pemikiran mereka memiliki persentase sedang diantara indikator yang lain, hal ini disebabkan sebagian siswa mengungkapkan pemikiran mereka pada bermain jawaban secara lugas; (3) Pada indikator ketiga yaitu menggunakan kosakata /bahasa, notasi struktur secara matematika memiliki persentase yang paling rendah diantara indikator yang lain, hal ini disebabkan sebagian siswa tidak menggunakan penulisan bahasa dalam matematika dengan benar seperti simbol melalui strategi bermain jawaban; (3) Pada indikator keempat yaitu menulis memahami masalah yang disajikan dalam bentuk visual memiliki persentase yang sedang diantara indikator yang lain, hal ini disebabkan siswa sudah mengenal strategi bermain jawaban dan memahami permasalahan yang ada secara visual yang diberikan guru.

Hal yang paling mendasar dalam proses pembelajaran adalah kemampuan komunikasi matematis siswa. Kemampuan komunikasi dalam proses pembelajaran matematika dengan menggunakan strategi bermain jawaban merupakan interaksi antara guru dan siswa ataupun siswa itu sendiri sehingga suasana belajar menjadi segar dan kondusif, yang mana masing-masing siswa dapat melibatkan kemampuannya semaksimal mungkin untuk menemukan jawaban dalam kantong:

Tabel 1: Peningkatan kemampuan komunikasi siswa siklus I ke siklus II

Indikator	Siklus I	Siklus II	Peningkatan
Menuliskan matematika dan menafsirkan makna	59,47 %	83,65 %	24,14 %
Mengungkapkan dan menjelaskan pemikiran	52,92 %	82,38 %	29,45 %
Menggunakan kosa kata/ bahasa notasi struktur secara matematika	40,51 %	78,74 %	38,23 %
Memahami permasalahan yang disajikan dalam bentuk visual	47,05 %	79,36 %	32,31 %

Berdasarkan tabel 1 dapat disimpulkan sebagai berikut: (1) Kemampuan komunikasi siswa yang indikator pertama siklus I dapat dikatakan belum dikatakan banyak dengan rata-rata persentase 59,47 %. Hal ini disebabkan strategi bermain jawaban merupakan hal yang baru dikenal oleh siswa sehingga kemampuan komunikasi dalam menafsirkan makna belum mampu dilakukan oleh siswa secara keseluruhan. Pada siklus II, kemampuan komunikasi siswa mulai meningkat dengan rata-rata persentase 83,65 %. Hal ini menunjukkan adanya peningkatan 24,18 % kemampuan komunikasi siswa dalam menafsirkan makna dalam proses bermain jawaban. Hal ini dikarenakan siswa yang mulai memahami bermain jawaban sehingga kemampuan komunikasi dalam menulis meningkat pada siklus II; (3) Kemampuan komunikasi matematis siswa yang indikator kedua siklus I dapat dikatakan belum dikatakan banyak dengan rata-rata persentase 52,93 %. Hasil persentase ini sangat jauh dari hasil yang diinginkan

yaitu 75 %. Dalam menjelaskan pemikiran mereka masih ada yang malu-malu dan hanya bicara secara bersama-sama. Pada siklus II guru berusaha memberi media menarik untuk menimbulkan ide-ide dan pemikiran yang baru dari mereka sehingga kemampuan komunikasi matematis siswa mulai meningkat dengan rata-rata persentase 82,38 %. Hal ini menunjukkan adanya peningkatan 29,45 % kemampuan komunikasi matematis siswa dalam menjelaskan pemikiran mereka dalam proses bermain jawaban pada siklus I ke siklus II. Hal ini dikarenakan siswa yang mulai memahami bermain jawaban sehingga kemampuan komunikasi matematis dalam mengungkapkan pendapat mereka meningkat pada siklus II; (3) Kemampuan komunikasi matematis siswa yang indikator ketiga siklus I dapat dikatakan jauh dari indikator keberhasilan dengan rata-rata persentase 40,51 %. Hal ini disebabkan dalam strategi bermain jawaban siswa selalu meninggalkan simbol penulisan bahasa pada matematika. Pada siklus II, kemampuan komunikasi matematis siswa mulai meningkat dengan rata-rata persentase 78,74 %. Siswa diberi pengarahan oleh guru untuk membuat simbol pada penulisan bahasa dalam matematika. Hal ini menunjukkan adanya peningkatan 38,23 % kemampuan komunikasi matematis siswa; (4) Kemampuan komunikasi matematis siswa yang indikator keempat siklus I dapat dikatakan belum dikatakan banyak dengan rata-rata persentase 47,05 %. Hal ini disebabkan guru dalam pembelajaran strategi bermain jawaban menggunakan kertas yang tidak menarik sehingga siswa dalam memahami permasalahan dalam bentuk visual belum maksimal. Pada siklus II, kemampuan komunikasi matematis siswa mulai meningkat dengan rata-rata persentase 79,36 %. Hal ini menunjukkan adanya peningkatan signifikan 32,31 % kemampuan komunikasi matematis siswa dalam memahami permasalahan dalam bentuk visual pada bermain jawaban. Hal ini dikarenakan guru melakukan perbaikan media dalam mengajukan masalah sehingga meningkat pada siklus II.

Pelaksanaan pembelajaran oleh guru dalam pembelajaran matematika melalui strategi bermain jawaban mengalami peningkatan sebagaimana peneliti harapkan dalam penelitian tindakan kelas ini. Peneliti sudah mampu menjalankan pembelajaran sesuai RPP dengan menggunakan strategi bermain jawaban sehingga pembelajaran berjalan baik.

Peningkatan kemampuan komunikasi siswa, juga diperoleh data tes yang diberikan. Tes yang diberikan sesuai dengan indikator kemampuan komunikasi siswa. Rata-rata persentase ketuntasan yang diperoleh siswa disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 2 : Persentase Hasil Tes Kemampuan Komunikasi matematis Pada Siklus I dan Siklus II

Siklus	Rata-rata persentase
I	64,85 %
II	86,94 %
Rata-rata persentase	75,89 %
Mengalami kenaikan 22,09 %	

Berdasarkan tabel di atas dapat disimpulkan persentase ketuntasan kemampuan komunikasi matematis siswa meningkat dari siklus I ke siklus II. Pada siklus I rerata persentase adalah 64,85% belum mencapai indikator keberhasilan yang diinginkan yaitu 75 % . Hal ini disebabkan siswa belum paham soal yang diterangkan pada proses pembelajaran bermain jawaban dengan kerja kelompok sehingga saat melakukan tes banyak siswa yang tidak mampu menjawab dengan kriteria nilai yang diinginkan . Pada siklus II, rerata persentase hasil tes kemampuan komunikasi matematis meningkat mencapai 86,94%. Hal ini sudah melewati indikator keberhasilan yang diinginkan yaitu 75 %. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan strategi bermain jawaban dapat meningkatkan kemampuan komunikasi matematis siswa.

4. Penutup

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan maka peneliti dapat menyimpulkan bahwa kemampuan komunikasi matematis siswa dalam proses pembelajaran pada strategi bermain jawaban meningkat dari siklus I ke siklus II. Rata-rata persentase siklus I hanya 49,99 % meningkat pada siklus II 81,03 %. Hal ini menunjukkan adanya peningkatan 31,04 % pada siklus I dan Siklus II. Sedangkan produk kemampuan komunikasi matematis meningkat 22,09% pada siklus I dan siklus II. Hal ini menunjukkan persentase kemampuan komunikasi dalam proses dan produk pada siklus II sudah mencapai indikator keberhasilan yaitu 75 %. Hal ini dikarenakan strategi bermain jawaban berhasil dan disukai oleh siswa sehingga kemampuan komunikasi matematis siswa meningkat.

Sehubungan dengan hasil penelitian yang diperoleh, maka peneliti melihat dari kelemahan selama penelitian menyarankan agar waktu yang digunakan dalam bermain jawaban dapat digunakan dengan efektif dan guru dapat memimpin jalannya diskusi sesuai waktu yang tersedia sehingga kelas tenang dan teratur.

Daftar Pustaka

- Arikunto, Suharsimi, dkk.(2010). *Penelitian Tindakan Kelas*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Armiati (2009). “Komunikasi Matematis Dan Kecerdasan Emosional”. *Prosiding Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY*, 5 Desember 2009.
- Dimiyati, Mahmud dan Mudjiono. (2009). *Belajar dan Pembelajaran*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Husna. (2012). Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah Dan Komunikasi Matematis Siswa Sekolah Menengah Pertama Melalui Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Think-Pair-Share (TPS). *Jurnal Peluang*. Vol 1. No.2. UNSYIAH.
- Jazuli, Akhmad. (2009). “Berpikir Kreatif dalam kemampuan komunikasi matematika”. Makalah disajikan dalam seminar Nasional pada tanggal 5 desember 2009 di UNY Yogyakarta.
- NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA : NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000. *Principles and Standard for School Mathematics*. Virginia: NTCM inc.
- Rusman. (2012) *Model Model Pembelajaran*. Jakarta. PT Rajagrafindo Persada.
- Susanto, Ahmad. (2013). *Teori Belajar dan Pembelajaran*. Jakarta: Kencana.
- Suprijono, Agus. (2012). *Cooperative Learning Teori & Aplikasi PAIKEM*. Yogyakarta: Pustaka Belajar.
- Wardhani, IGAK.dkk.(2007) *Penelitian Tindakan Kelas*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Within.(1992). *Mathematics Task Centre; Proffesional Development and Problem Solving*. In J Wakefield and L.
- Zaini, Ahmad. (2012). *Model-model Pembelajaran*. Jakarta: PT Rajagrafindo Persada.

PENGEMBANGAN LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK BERBASIS *PROBLEM BASED LEARNING* UNTUK MATERI MATEMATIKA SEMESTER 1 KELAS VIII SMP PADA TAHAP VALIDITAS

Zulfah

*Dosen S1 Pendidikan Matematika Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai
Zulfah_asni@yahoo.co.id*

Abstract

Problem-solving skills as one of the essential capabilities for students, is still not fully achieved yet. There are several factors causing the low ability. One of them is the unavailability of teaching materials which facilitates students to grow and develop mathematical problem solving ability optimally. This research aims to develop Teaching Materials of Students' Worksheets (TMSW) based on Problem Based Learning (PBL) for the first semester of math materials which are valid, practical, and effective. The type of this research is design research. This research uses Plomp's model that consists of three phases, for the first phase that is preliminary research, In the prototype phase, it starts to design TMSW mathematics material based PBL for the first semester, then carried out a formative evaluation to determine the validity and practicality of the product in the form of TMSW based on PBL. The last is assessment phase, this phase is to test the practicalities and effectiveness of assessment. The Effectiveness can be seen through quasi experiment research.

Kata Kunci: Problem Based Learning, Student's worksheets, TMSW based on PBL

1. Pendahuluan

Pendidikan memegang peranan penting dalam mencerdaskan kehidupan bangsa. Pendidikan merupakan investasi sumber daya manusia jangka panjang dan berlangsung seumur hidup. Kemajuan dan keunggulan suatu bangsa ataupun suatu peradaban memiliki kaitan dengan penguasaan matematika. Penguasaan matematika tidak cukup jika hanya dimiliki oleh sebagian orang saja dalam suatu peradaban, akan tetapi seluruh manusia perlu dan harus memiliki penguasaan matematika pada tingkatan tertentu. Penguasaan matematika dalam hal ini selain bermaksud penguasaan matematika sebagai ilmu, namun juga penguasaan akan kecakapan matematis yang diperlukan dalam memahami dunia sekitar [1]. Ada beberapa macam kemampuan matematis dalam pembelajaran matematika, salah satunya adalah kemampuan pemecahan masalah matematis. Pentingnya mengembangkan kemampuan pemecahan masalah matematis telah disadari oleh banyak pihak. Sejak Kurikulum 2004 (KBK), Indonesia telah memasukkan kemampuan pemecahan masalah matematis sebagai salah satu tujuan dalam pembelajaran matematika. Permendiknas No. 58 tahun 2014 juga telah menjelaskan bahwa kemampuan pemecahan masalah matematis sebagai satu dari sekian tujuan pembelajaran matematika di sekolah.

Kenyataan yang ditemui di lapangan menunjukkan kemampuan pemecahan masalah matematis peserta didik belum ditumbuhkembangkan secara optimal. Hal tersebut mengakibatkan kemampuan pemecahan masalah matematis peserta didik masih relatif rendah. Salah satu bukti rendahnya kemampuan matematis peserta didik yakni berdasarkan hasil tes PISA. Salah satu mata pelajaran yang dijadikan sebagai fokus penilaian adalah matematika. Hasil tes PISA yang dilaksanakan pada tahun 2012 menunjukkan peringkat Indonesia berada pada ranking 64 dari 65 negara peserta[2].

Kemampuan pemecahan masalah matematis peserta didik yang rendah juga terlihat di beberapa sekolah, misalnya di SMP N 13 dan SMP N 15 Padang. Berdasarkan observasi dan wawancara dengan beberapa guru yang berada di SMP N 13 dan SMP N 15 Padang pada tanggal 26-29 Oktober 2015 diperoleh gambaran bahwa ketika peserta didik diberikan soal yang bersifat pemecahan masalah, maka terlihat beberapa indikator dari kemampuan pemecahan masalah yang bertujuan untuk mengindikasikan kemampuan pemecahan masalah peserta didik tidak terlihat. Misalnya, peserta didik tidak dapat

memahami permasalahan yang diberikan, selain itu peserta didik dapat merencanakan penyelesaian masalah dengan baik sehingga diperoleh hasil yang tidak benar.

Permasalahan kemampuan pemecahan masalah matematis ini perlu dicarikan solusi agar tidak ditemukan lagi peserta didik berkemampuan pemecahan masalah matematis yang rendah. Cara yang dapat dilakukan adalah melaksanakan perbaikan pada proses pembelajaran. Salah satu penentu keberhasilan proses pembelajaran dan keberhasilan dalam pencapaian tujuan pembelajaran matematika adalah perangkat pembelajaran.

Perangkat pembelajaran merupakan perangkat-perangkat yang digunakan dalam proses pembelajaran yang terdiri dari silabus, rencana pelaksanaan pembelajaran (RPP), bahan ajar, dan tes hasil belajar [3]. Satu dari bahan ajar cetak yang digunakan dalam proses pembelajaran di sekolah adalah Lembar Kerja Peserta Didik atau disingkat LKPD. LKPD adalah salah satu bahan ajar cetak yang dapat mempermudah peserta didik untuk berinteraksi dengan materi yang diberikan. Melalui LKPD peserta didik juga dapat dibimbing untuk menemukan kembali suatu konsep. LKPD dapat mempermudah guru dalam melaksanakan proses pembelajaran. LKPD juga kaya akan tugas untuk berlatih. Selain itu LKPD juga dapat membantu peserta didik untuk aktif dalam proses pembelajaran karena berisikan aktivitas yang melibatkan peserta didik.

Selain itu, perlu diadakan kegiatan pembelajaran yang dapat memfasilitasi peserta didik untuk menumbuhkembangkan kemampuan pemecahan masalah matematisnya. Peserta didik juga perlu diajarkan bagaimana cara menyelesaikan permasalahan yang ada. Hal ini didasarkan atas pendapat Arends yang menyatakan bahwa guru yang menuntut peserta didik untuk memiliki penguasaan kemampuan pemecahan masalah yang artinya dapat menyelesaikan masalah, maka guru tersebut haruslah mengajarkan bagaimana peserta didik seharusnya menyelesaikan masalah [4].

Seiring dengan diperlukannya LKPD yang dapat menunjang kemampuan pemecahan masalah, maka diperlukan juga suatu model atau strategi pembelajaran yang dapat dijadikan sebagai landasan dalam mengembangkan LKPD. LKPD akan semakin optimal jika berlandaskan pada salah satu model atau strategi pembelajaran yang memiliki tujuan untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah peserta didik dan mengajarkan cara menyelesaikan sebuah permasalahan. Salah satu model/ strategi pembelajaran yang dapat digunakan untuk mencapai tujuan tersebut adalah melalui *Problem Based Learning* atau disingkat *PBL*. Berdasarkan hal tersebut, maka pengembangan LKPD ini diwujudkan dalam bentuk penelitian dengan judul “Pengembangan Lembar Kerja Peserta Didik Berbasis *Problem Based Learning* untuk Materi Matematika Semester I Kelas VIII SMP”.

2. Metode Penelitian

Pada penelitian ini, model pengembangan yang digunakan diadaptasi dari model yang dikembangkan oleh Plomp. Model Plomp terdiri dari tiga tahap, yaitu tahap analisis pendahuluan, tahap pengembangan atau pembuatan prototipe (*Development or Prototyping Phase*), dan tahap penilaian (*Assessment Phase*) [5]. Pada tahap pengembangan atau pembuatan prototipe (*Development or Prototyping Phase*) dilaksanakan tahapan validitas LKPD berbasis *PBL*. Aspek validitas dapat dilihat dari apakah kurikulum atau model pembelajaran yang dikembangkan berdasarkan pada *state of art (scientific)* pengetahuan (validitas isi), dan apakah berbagai komponen dari LKPD terkait secara konsisten antara yang satu dengan yang lainnya (validitas konstruk) [6]. Validitas dilakukan pada prototipe 1. Validator dalam hal ini dilakukan oleh para ahli. Pada tinjauan ahli, kelompok ahli memberikan penilaian dan saran-saran terhadap produk yang masih dalam rancangan untuk menentukan kelemahan dan kelebihan, serta memperhatikan spesifikasi produk yang diharapkan yaitu berdasarkan aspek didaktik, aspek isi, aspek bahasa, dan aspek penyajian/kegrafikan [7].

Tabel 1. Ringkasan (*Summary*) Kegiatan pada Tahap *Prototyping Phase*

Kegiatan Penelitian	Fokus Penelitian	Pengumpulan Data
Validasi prototipe 1 dilakukan oleh pakar pendidikan, matematika, pakar bahasa, dan pakar teknologi pendidikan. Selanjutnya, dilakukan revisi pada prototipe 1 dan menghasilkan prototipe 2.	<ul style="list-style-type: none"> • Apakah prototipe 1 yang disusun telah sesuai dengan indikator-indikator pada aspek didaktik? • Apakah prototipe 1 yang disusun telah sesuai dengan indikator-indikator pada aspek isi? • Apakah prototipe 1 yang disusun telah sesuai dengan indikator-indikator pada aspek bahasa? • Apakah prototipe 1 yang disusun telah sesuai dengan indikator-indikator pada aspek penyajian dan kegrafikan? 	Lembar validasi

Adapun teknik analisis data hasil validasi LKPD berbasis *PBL* yang digunakan dalam penelitian pengembangan ini yaitu menggunakan analisis kuantitatif. Hasil validasi dari validator terhadap seluruh aspek yang dinilai akan disajikan dalam bentuk tabel. Analisis dilakukan dengan menggunakan skala *Likert*. Kriteria untuk mendapatkan tingkat kevalidan LKPD sebagai berikut [8].

Tabel 2. Kriteria Validitas

Rata-rata Hasil Penilaian	Interpretasi
$R > 3,20$	Sangat Valid
$2,40 < R \leq 3,20$	Valid
$1,60 < R \leq 2,40$	Cukup Valid
$0,80 < R \leq 1,60$	Kurang Valid
$R \leq 0,80$	Tidak Valid

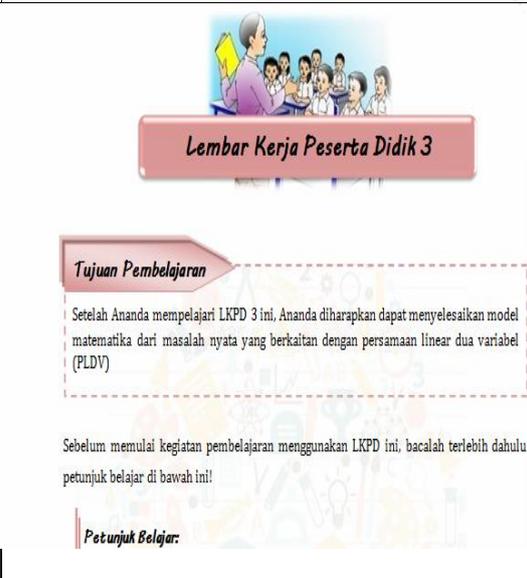
3. Hasil dan Pembahasan

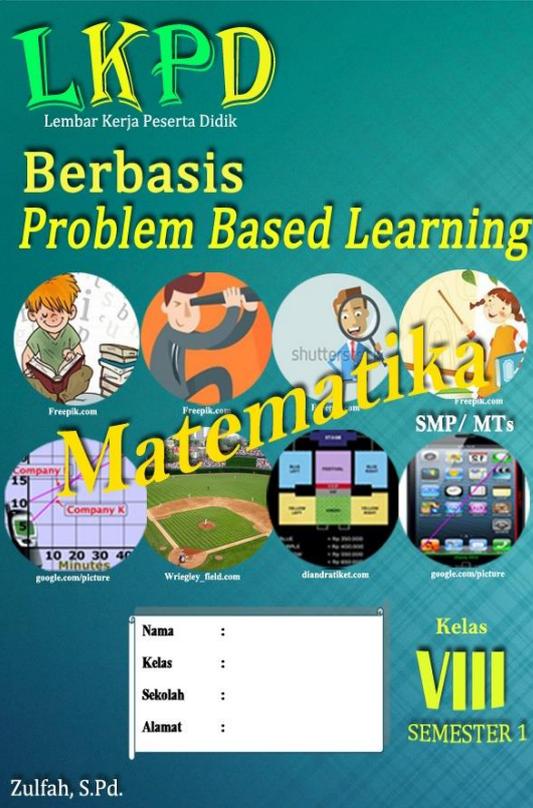
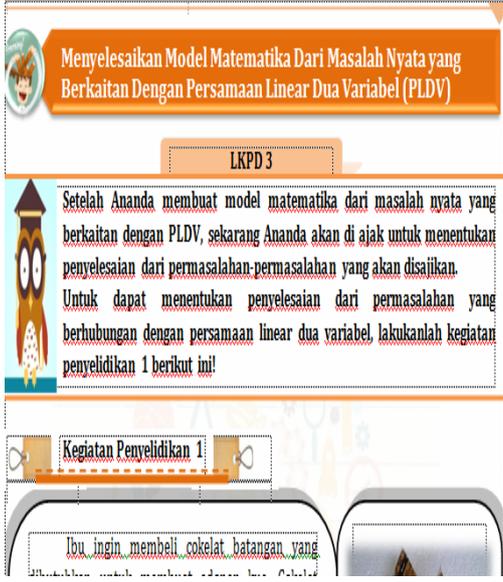
Validasi LKPD dilakukan oleh 5 orang pakar, yang terdiri dari 3 orang dosen matematika, 1 orang dosen teknologi pendidikan, dan 1 orang dosen bahasa. Pada LKPD, aspek yang diamati adalah aspek didaktik, isi, bahasa, serta penyajian/kegrafikan. Selama tahap validasi LKPD melalui tinjauan ahli, terdapat beberapa revisi yang dilakukan dengan berdasarkan saran-saran dari validator. Saran-saran validator untuk LKPD dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Saran Validator Terhadap LKPD Berbasis *PBL* Pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

No	Saran Perbaikan	Setelah Revisi
Aspek Didaktik		
1	<p>Perbaiki permasalahan pada LKPD 1 dan 2</p> <p>LKPD 1</p> <p>Pernyataan 1</p> <p>Kia membeli lima buah buku tulis dan tiga pena. Harga seluruhnya yang harus dibayar Kia ke pedagang adalah Rp.17.000</p>  <p>Sumber: Poskotaneews.com</p> <hr/> <p>Pernyataan 2</p> <p>Kebun yang berbentuk persegi panjang disamping akan ditanami jagung oleh Pak Tani. Keliling kebun tersebut adalah 36m</p>  <p>Sumber: google.com</p>	<p>Permasalahan pada LKPD 1 dan 2 diperbaiki sebagai berikut.</p> <p>LKPD 1</p> <p>Pernyataan 1</p> <p>Ibu ingin membeli cokelat batangan yang dibutuhkan untuk membuat adonan kue. Cokelat batangan yang Ibu butuhkan sebanyak 1500gr. Cokelat batangan tersebut dijual di sebuah toko kue. Terdapat dua macam kemasan yang dijual, yaitu kemasan 100gr dengan harga Rp.12.500 perkemasan, dan kemasan 150gr dengan harga Rp.18.500 perkemasan. Untuk kemasan 100gr toko tersebut memberikan potongan harga Rp. 500 untuk setiap pembelian tiga kemasan cokelat.</p> <p>Pernyataan 2</p> <p>Pemerintah berencana ingin mengganti peraturan mengenai pembayaran dana pensiunan bagi setiap PNS. Pemerintah memiliki dua rencana mengenai pembayaran tersebut yang biasanya dibayarkan perbulan sebesar Rp. 1,200,000. Pilihan pertama yang diusulkan pemerintah adalah uang pensiunan akan dibayarkan pertahun sebesar Rp. 14,400,000. Pilihan kedua, pemerintah akan mencairkan uang pensiunan bagi setiap pensiun sebesar Rp.1,000,000,000, sehingga pemerintah tidak akan kesusahan untuk membayarkan uang pensiunan setiap tahunnya.</p>

	<p>LKPD 2</p> <p>Pernyataan 1</p> <p>Sebuah pabrik memproduksi dua jenis botol yaitu botol A dan botol B. Jumlah produksi seluruhnya adalah 200 botol. Botol A dijual dengan harga Rp. 3000/buah, dan botol B dijual dengan harga Rp. 5000/buah. Setelah dijual dipasaran hasil penjualan botol yang diperoleh Rp. 708.000.</p>	<p>LKPD 2</p> <p>Pernyataan 1</p> <p>Gezi memiliki sebuah toko yang menjual bermacam jenis kopi. Terdapat kopi Toraja yang dijual dengan harga Rp.7000 perkilonya, dan ada juga kopi Arabica yang dijual dengan harga Rp.4000 perkilonya. Gezi menemukan beberapa dari pelanggannya menyukai kopi yang merupakan campuran dari kopi Toraja dan Arabica. Untuk memperoleh 12 kg kopi campuran yang akan dijual dengan harga Rp. 6000 perkilonya, Gezi harus mencampurkan beberapa kilogram dari masing-masing jenis kopi Toraja dan kopi Arabica yang dimilikinya.</p>
Aspek Isi		
1	<p>Pada LKPD 1 dan 2 tidak terdapat pertanyaan yang dapat membantu peserta didik menjawab soal. Oleh sebab itu, LKPD perlu dilengkapi dengan pertanyaan tambahan yang dapat membantu peserta didik menjawab soal</p>	<p>Contoh</p> <p>Pertanyaan tambahan pada LKPD 1 dan 2 dengan menggunakan masalah setelah revisi</p> <ul style="list-style-type: none">  Apa saja data-data yang disajikan pada pernyataan 1?  Berdasarkan data yang telah Ananda miliki, bagaimanakah cara menentukan banyak cokelat kemasan 100gr dan cokelat kemasan 150gr sehingga diperoleh cokelat yang dibutuhkan ibu yaitu sebanyak 1500gr?  Bagaimanakah bentuk aljabar yang dapat menggambarkan pernyataan tersebut! <p>LKPD 2</p> <ul style="list-style-type: none">  Apa saja data-data yang disajikan pada soal tersebut?  Berdasarkan data yang telah Ananda miliki, bagaimana menentukan biaya seragam di perusahaan Raisa Printing, jika seragam yang akan dipesan banyaknya sembarang? Bagaimana pula menentukan biaya seragam di perusahaan Adrian Printing jika seragam yang akan dipesan banyaknya sembarang?  Bagaimanakah bentuk aljabar yang dapat menggambarkan pernyataan tersebut!
2	<p>Tingkat kesulitan soal perlu disesuaikan dengan kemampuan peserta didik tingkat SMP</p>	<p>Pada permasalahan yang terdapat pada LKPD 1 diawali dengan pemberian masalah yang ada dalam keseharian peserta didik, yaitu permasalahan Ibu ketika ingin membeli cokelat</p>
Aspek Bahasa		
1	<p>Perbaiki tanda baca diakhir kalimat</p>	<p>Kalimat-kalimat yang belum dibubuhi tanda baca diperbaiki dengan memberi tanda baca.</p>
2	<p>Perbaiki pernyataan yang meragukan</p>	<p>Dilakukan perbaikan terhadap pernyataan yang masih meragukan</p>
3	<p>Perbaiki pilihan kata</p>	<p>Dilakukan perbaikan terhadap pemilihan kata</p>

<p>4</p>	<p>Kalimat Judul untuk sub-bab tidak sama dengan indikator pada RPP. Misalnya judul subbab: Menyelesaikan Model Matematika Dari Masalah Nyata yang Berkaitan Dengan Persamaan Linear Dua Variabel (PLDV)</p>	<p>Judul Subbab: Penyelesaian untuk Masalah Nyata yang Berkaitan dengan Persamaan Linear Dua Variabel</p>
	<p>Menyelesaikan Model Matematika Dari Masalah Nyata yang Berkaitan Dengan Persamaan Linear Dua Variabel (PLDV)</p>	 <p>Penyelesaian Model Matematika untuk Masalah Nyata yang Berkaitan dengan Persamaan Linear Dua Variabel (PLDV)</p>
<p>Aspek Penyajian/ Kegrafikan</p>		
<p>1</p>	<p>Lay out/ tata letak gambar dan permasalahan perlu penataan yang serasi</p> 	<p>Garis-garis pada pinggir halaman kertas dikurangi, kotak yang membatasi setiap gambar disamping permasalahan di hapus</p> 
<p>2</p>	<p>Tujuan pembelajaran disajikan pada setiap sub-bab/ per LKPD</p>	

<p>3</p>	<p>Cover perlu didesain lebih baik</p> 	<p>Cover didesain ulang agar dapat menyiratkan bahwa LKPD tersebut berbasis PBL</p>  <p>Zulfah, S.Pd.</p>
<p>4</p>	<p>Komposisi warna dan huruf perlu diperhatikan</p> <p>LKPD BERBASIS PBL</p> 	 <p>Pada judul, dan petunjuk jenis tulisan yang digunakan adalah Bell MT, sedangkan soal tulisan yang digunakan adalah cambria</p>

Berdasarkan saran-saran tersebut dilakukan revisi terhadap LKPD berbasis PBL. Setelah dilakukan revisi, para validator selanjutnya memberikan penilaian terhadap validitas LKPD berbasis PBL. Penilaian

dilakukan untuk seluruh aspek pada masing-masing materi. Hasil validasi untuk aspek didaktik pada materi sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Hasil Validasi LKPD Berbasis *PBL* Pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) untuk Aspek Didaktik

No	Aspek Didaktik	Rata-rata	Kategori
1	Permasalahan sebagai <i>starting point</i> dalam proses pembelajaran pada setiap pokok bahasan di materi SPLDV	3,2	Valid
2	Menemukan dan mendefinisikan masalah sebagai tahapan pertama dalam menyelesaikan masalah yang disajikan pada setiap pokok bahasan	3,2	Valid
3	Mengumpulkan data/ fakta sebagai tahapan kedua dalam menyelesaikan masalah yang disajikan pada setiap pokok bahasan	3,6	Sangat valid
4	Mengajukan hipotesis (dugaan sementara) sebagai tahapan ketiga dalam menyelesaikan masalah yang disajikan pada setiap pokok bahasan	3,2	Valid
5	Melakukan penyelidikan sebagai tahapan kelima dalam penyelesaian masalah	3,6	Sangat valid
6	Menarik kesimpulan sebagai tahapan keempat dalam menyelesaikan masalah yang disajikan pada setiap pokok bahasan	3,6	Sangat valid
7	Pembelajaran dengan menggunakan LKPD berbasis <i>PBL</i> dapat dilaksanakan secara individu dan/atau kelompok	3,6	Sangat valid
	Rata-rata	3,43	Sangat valid

Aspek penilaian yang kedua adalah aspek isi. Hasil validasi untuk aspek isi LKPD dapat dilihat pada Tabel 5.

Tabel 5. Hasil Validasi LKPD Berbasis *PBL* Pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) untuk Aspek Isi

No	Aspek Isi	Rata-rata	Kategori
1	Tujuan pembelajaran disusun berdasarkan indikator yang dirancang	3,4	Sangat valid
2	LKPD dirancang sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika terutama untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis melalui proses menyelesaikan masalah pada setiap pokok bahasan pada materi	3,6	Sangat valid
3	LKPD dirancang sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika terutama untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis melalui soal-soal pemecahan masalah	3,4	Sangat valid
4	Permasalahan disajikan pada setiap pokok bahasan	3,6	Sangat valid
5	Permasalahan yang disajikan pada setiap pokok bahasan berhubungan dengan keseharian peserta didik	3,4	Sangat valid
6	Permasalahan yang diberikan merupakan soal pemecahan masalah	3,4	Sangat valid
7	Masalah yang disajikan merupakan masalah yang bersifat non-rutin atau <i>open-ended</i>	3,2	Valid
8	LKPD menyediakan petunjuk penggunaan LKPD yang jelas	3,4	Sangat valid
9	LKPD menyediakan petunjuk belajar yang jelas	3,6	Sangat valid
10	LKPD menyediakan tahapan penyelesaian yang jelas	3,4	Sangat valid
11	Setiap tahapan memiliki pertanyaan penggiring yang dapat membantu peserta didik dalam melaksanakan tahapan tersebut	3	Valid
12	LKPD menyediakan soal-soal yang berasal dari materi prasyarat yang harus dikuasai sebelum memasuki materi pokok	3,4	Sangat valid
13	LKPD memuat kumpulan soal yang disusun dengan tingkat kesukaran berjenjang dari soal dengan tingkat kesukaran rendah sampai dengan tingkat kesukaran tinggi	3,2	Valid

14	Soal yang disajikan dengan tingkat kesukaran tinggi merupakan soal pemecahan masalah yang bersifat kontekstual	3,6	Sangat valid
15	Soal yang disajikan dengan tingkat kesukaran tinggi merupakan soal pemecahan masalah yang bersifat non-rutin dan <i>open-ended</i>	3,2	Valid
Rata-rata		3,39	Sangat Valid

Hasil validasi aspek bahasa dapat dilihat pada Tabel 6.

Tabel 6. Hasil Validasi LKPD Berbasis *PBL* Pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) untuk Aspek Bahasa

No	Aspek Bahasa	Rata-rata	Kategori
1	Kesesuaian kalimat dengan tata bahasa EYD	3,4	Sangat valid
2	Istilah, simbol dan persamaan matematika sesuai dengan kaidah penulisan	3,8	Sangat valid
3	Pernyataan pada LKPD dibuat dengan bahasa yang dapat dipahami dan disesuaikan dengan tingkat kognitif peserta didik	3,2	valid
Rata-rata		3,47	Sangat valid

Aspek terakhir yang dinilai adalah aspek penyajian/ kegrafikan. Hasil validasi aspek penyajian/ kegrafikan dapat dilihat pada Tabel 7.

Tabel 7. Hasil Validasi LKPD Berbasis *PBL* Pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) untuk Aspek Penyajian/ Kegrafikan

No	Aspek Penyajian/ Kegrafikan	Rata-rata	Kategori
1	LKPD terdiri dari petunjuk penggunaan LKPD, tujuan pembelajaran, uji kemampuan awal, petunjuk belajar dan pokok-pokok bahasan pada materi SPLDV dengan setiap pokok bahasan diikuti oleh latihan	3,6	Sangat valid
2	Materi disajikan secara sistematis dan terurut dengan urutan membuat dan menyelesaikan model matematika dari masalah nyata yang berkaitan dengan PLDV, membuat dan menyelesaikan model matematika dari masalah nyata yang berkaitan dengan SPLDV, menentukan penyelesaian atau akar SPLDV dengan metode grafik, menentukan penyelesaian atau akar SPLDV dengan metode substitusi, dan menentukan penyelesaian atau akar SPLDV dengan metode eliminasi	3,4	Sangat valid
3	LKPD berisikan gambar-gambar yang menarik	3	Valid
4	LKPD berisikan gambar-gambar dapat memperjelas permasalahan yang diberikan	3,4	Sangat valid
5	LKPD menggunakan jenis huruf yang jelas sehingga dapat dibaca oleh peserta didik kelas VIII	3,2	Valid
6	Bagian judul dan bagian yang perlu mendapat penekanan dicetak tebal	3,2	Valid
7	Penempatan gambar dan grafis menarik	3,4	Sangat valid
8	Tampilan pada halaman sampul dan isi menarik	3,4	Sangat valid
Rata-rata		3,33	Sangat valid

Berdasarkan hasil analisis validitas LKPD berbasis *PBL*, maka dapat disimpulkan bahwa dihasilkan LKPD berbasis *PBL* yang valid dengan karakteristik seperti LKPD yang dihasilkan telah disesuaikan dengan komponen yang harus dimiliki LKPD yaitu terdiri dari petunjuk penggunaan LKPD, tujuan pembelajaran, petunjuk belajar, tugas-tugas berupa kegiatan penyelidikan sebuah permasalahan, langkah-langkah untuk menyelesaikan tugas tersebut, serta uji kompetensi. LKPD yang dihasilkan telah disesuaikan dengan ciri-ciri dari *Problem Based Learning* (*PBL*) yaitu permasalahan sebagai *starting point* dalam pembelajaran. Permasalahan yang diberikan disesuaikan dengan kriteria soal pemecahan masalah yaitu kontekstual, non-rutin dan/atau *open-ended*.

Daftar Rujukan

- [1] *Permendiknas No 58 tahun 2014*. 2014. Jakarta.
- [2] Pisa Indonesia. 2012. Didownload di <http://pisaindonesia.wordpress.com>
- [3] Trianto. 2009. *Mendesain Model Pembelajaran Inovatif - Progresif*. Jakarta: Kencana
- [4] Trianto. 2009. *Mendesain Model Pembelajaran Inovatif - Progresif*. Jakarta: Kencana.
- [5] Plomp, T and Nieveen, N. 2013. *An Introduction to Educational Design Research*. Enschede: Netherland Institute for Curriculum Development (SLO).
- [6] Nieveen, Nienke. 1999. *Design Approaches and Tools in Education and Training*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- [7] Depdiknas. 2008. *Panduan Pengembangan Bahan Ajar*. Jakarta: Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah.
- [8] Mulyardi. 2006. "Pengembangan Media Pembelajaran Matematika Berbasis Komik di Kelas I Sekolah Dasar". *Disertasi* tidak diterbitkan. Surabaya: UNESA.



Jurusan Matematika
Fakultas MIPA
Universitas Riau